МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.9.+518.61

К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ БЛИЗКОГО К ТРЕУГОЛЬНОМУ ТОЧЕЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов

НИИ прикладной математики и кибернетики
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

olga.antonovsckaja@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.09.2011

Предложена методика исследования близких к треугольным точечных отображений произвольной размерности.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика систем, точечное отображение, неподвижная точка, устойчивость.

Введение

С точки зрения современной науки изучение нелинейной системы дифференциальных уравнений, являющейся математической моделью некоторой реальной системы, означает разбиение ее фазового пространства на траектории всех возможных типов. Наиболее доступными для исследования являются системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры.

В настоящее время широкое применение в задачах исследования поведения траекторий систем дифференциальных уравнений получил метод точечных отображений [1], позволяющий единообразно подходить к исследованию типов траекторий различных систем. Применение приближенных и численных методов при исследовании свойств точечных отображений естественным образом приводит к задаче изучения условий существования и характера устойчивости неподвижных точек точечного отображения, исходя из его приближенного задания [1, 2]. В частности, при помощи метода точечных отображений можно обосновать известные асимптотические методы в случае систем с малой нелинейностью [1, 2], поскольку лежащая в основе каждого метода замена одного уравнения другим состоит в сведении дифференциального уравнения к рассмотрению точечного отображения, близкого к тождественному, и некоторого его приближения. В связи с этим в работах [3, 4] изучались возможности исследования вопросов существования и устойчивости неподвижных точек близкого к тождественному точечного отображения по его приближению.

Однако при исследовании систем, содержащих малые параметры, возникают и точечные отображения более сложного вида. Так, математическую модель синтезатора частоты с делителем частоты и пропорционально-интегрирующим фильтром [5] можно рассматривать как точечное отображение, близкое к треугольному [6] или квазитреугольное.

В работах [7, 8] сформулированы условия, при выполнении которых возможно исследование гладкого точечного преобразования по его приближенному представлению. В настоящей работе при использовании результатов [8] доказаны теоремы о существовании и устойчивости неподвижной точки близкого к треугольному точечного отображения произвольной размерности.

О приближенном исследовании неподвижных точек близких к тождественным точечных отображений

В настоящей работе рассматривается следующая задача. Пусть T – гладкое точечное отображение области $G \subset R^n$ в себя, близкое к треугольному

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, \mu), \\ &\bar{x}_i = x_i + \mu f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu), \;\; i = 2, 3, ..., n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $0<\mu<<1$, причем

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = f_1^0(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n),$$

т.е. при $\mu = 0$ точечное отображение становится треугольным [6]. Пусть для любых точек области G удовлетворяются условия

$$|f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu) - f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n)| \le \mu L \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{2}$$

$$|f'_{ix_j}(x_1, x_2, ..., x_n) - f^{0'}_{ix_j}(x_1, x_2, ..., x_n)| \le \mu S \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

где μL, μS – ошибки нахождения функций и их частных производных.

Будем предполагать, что для любых точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ области G функции f_i^0 и их частные производные удовлетворяют условиям

$$|f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n) - f_i^0(x'_1, x'_2, ..., x'_n)| \le K\rho(M, M') \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4}$$

$$|f^{0'}_{ix_j}(x_1, x_2, ..., x_n) - f^{0'}_{ix_j}(x'_1, x'_2, ..., x'_n)| \le N\rho(M, M') \quad (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{5}$$

где K, N – положительные константы, а расстояние между точками M и M' определяется формулой $\rho(M, M') = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x'_i|$.

Рассмотрим вспомогательное точечное отображение $\widetilde{T}$

$$\tilde{x}_1 = f_1^0(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$\tilde{x}_i = x_i + \mu f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n), \; i = 2, 3, ..., n. \tag{6}$$

Допустим, что точечное отображение (6) имеет неподвижную точку с определенным характером устойчивости. Требуется установить существование и характер устойчивости соответствующей неподвижной точки точечного отображения T и оценить расстояние между этими точками.

Заметим, что поскольку

$$\bar{x}_1 - x_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, \mu) - x_1,$$
$$\bar{x}_i - x_i = \mu f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu), \; i=2,3,...,n,$$
$$\tilde{x}_1 - x_1 = f_1^0(x_1, x_2, ..., x_n) - x_1,$$
$$\tilde{x}_i - x_i = \mu f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n), \; i = 2,3,...,n,$$

координаты неподвижной точки точечного отображения $\widetilde{T}$ удовлетворяют системе уравнений

$$f_1^0(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1, \; f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$
$$i = 2,3,...,n.$$

Введем необходимые для дальнейшего рассмотрения функции [8]

$$\phi_1(M) = \phi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1^0(x_1, x_2, ..., x_n) - x_1,$$
$$\phi_i(M) = \phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = f_i^0(x_1, x_2, ..., x_n),$$
$$i = 2,3,...,n,$$

$$\Phi_1(M) = \Phi_1(x_1, x_2, ..., x_n, \mu) =$$
$$= f_1(x_1, x_2, ..., x_n, \mu) - x_1,$$
$$\Phi_i(M) = \Phi_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu) =$$
$$= \mu f_i(x_1, x_2, ..., x_n, \mu), \; i = 2,3,...,n,$$

и определители

$$\Delta_1 = \det \| \phi'_{ix_j}(M_i) \|, \; \Delta_2 = \det \| \Phi'_{ix_j}(M_i) \|.$$

Пусть $M^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ – неподвижная точка отображения $\widetilde{T}$ и характеристический полином, определяющий ее устойчивость, не имеет корней, лежащих на единичной окружности [9]. Это означает, что $\phi_i(M^*) = 0$ ($i = 1,2,...,n$), $\Delta^* = \Delta_1(M^*) \ne 0$. Согласно [8], имеют место неравенства

$$|\Delta_1 - \Delta^*| \le n![(N \max_i \{\rho(M_i, M^*)\} + e_{\max})^n - e_{\max}^n], \tag{7}$$

$$|\Delta_2 - \Delta_1| \le n![(\mu S + N \max_i \{\rho(M_i, M^*)\} + e_{\max})^n - (N \max_i \{\rho(M_i, M^*)\} + e_{\max})^n, \tag{8}$$

где величины

$$e_{\max} = \max_{i,j} \{|\phi'_{ix_j}(M^*)|\},$$
$$e = \min_i \{|\phi'_{ix_i}(M^*)|\} \ne 0.$$

При выводе неравенств (7), (8) используются соотношения (2)–(5) и оценки абсолютных величин разностей развернутых определителей [10] $\Delta^*, \Delta_1, \Delta_2$.

Поскольку характеристический полином, определяющий устойчивость M^*, не имеет корней, лежащих на единичной окружности, а величина e отлична от нуля, то, согласно теореме о существовании и свойствах неявной функции [11], в некоторой окрестности точки M^* уравнение $\phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ определяет однозначную гладкую поверхность $x_i = \phi_i^0(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$. Обозначим эту окрестность через $D = (x_1^* - b, x_1^* + b, ..., x_n^* - b, x_n^* + b)$ и покажем, что в качестве величины b можно взять значение

$$b = a \min\{1, \alpha(e - Nna)/(K(n-1))\}, \tag{9}$$

где $0 < \alpha < 1$,

$$a = (1/Nn) \min\{\alpha e, (e_{\max}^n + (\alpha/n!)|\Delta^*|)^{1/n} - e_{\max}\}. \tag{10}$$

Рассмотрим множество параллелепипедов

$$D_i = (x_1^* - b, x_1^* + b, ..., x_{i-1}^* - b, x_{i-1}^* + b; x_i^* - a, x_i^* + a; x_{i+1}^* - b, x_{i+1}^* + b; ..., x_n^* - b, x_n^* + b),$$

содержащих точку M^*. В силу (4), (5) в области D_i выполняются неравенства

$$|\phi'_{ix_i}(M)| \ge |\phi'_{ix_i}(M^*)| - |\phi'_{ix_i}(M) - \phi'_{ix_i}(M^*)| \ge |\phi'_{ix_i}(M^*)| - Nna, \tag{11}$$

$$|\phi_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_{i\pm a}^*,x_{i+1}^*,x_n)|\geq(|\phi'_{ix_i}(M^*)|-Nna)a, \quad (12)$$

$$|\phi_i(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_{i\pm a}^*,x_{i+1}^*,x_n)|\geq a(e-Nna)-K(n-1)b. \quad (13)$$

Отсюда следует, что уравнение $\phi_i(x_1,x_2,...,x_n)=$ $=0$ в области D_i, а следовательно, и в области D определяет однозначную гладкую поверхность $x_i=\phi_i^0(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$.

Для любых точек M_i (i = 1,2,...,n) области $D=\bigcap_{i=1}^{n}D_i$ в силу соотношения (7) имеет место неравенство

$$|\Delta_1-\Delta^*|\leq n![(Nnb+e_{\max})^n-e_{\max}^n]\leq\alpha|\Delta^*|<|\Delta^*|, \quad (14)$$

из которого следует, что $\Delta_1\neq 0$. Это означает, что нормали к поверхностям $x_i=\phi_i^0(x_1,...,x_{i-1},$ $x_{i+1},...,x_n)$ в области D взаимно не параллельны.

Выясним, при каких условиях в окрестности D точки M^* лежит единственная неподвижная точка точного точечного отображения T. Сначала покажем, что при определенных величинах μL и μS существует по крайней мере одна неподвижная точка преобразования T.

Из неравенства

$$|\phi_i(M)|-|\Phi_i(M)|\leq|\phi_i(M)-\Phi_i(M)|\leq\mu L \quad (15)$$

и соотношения (13) следует, что при $|x_j-x_j^*|\leq b$ (j = 1,2,...,n, $j\neq i$), $x_i=x_i^*\pm a$

$$|\Phi_i(M)|\geq a(e-Nna)-K(n-1)b-\mu L. \quad (16)$$

Кроме того, из неравенства

$$|\phi'_{ix_j}(M)|-|\Phi'_{ix_j}(M)|\leq|\phi'_{ix_i}(M)-\Phi'_{ix_i}(M)|\leq\mu S \quad (17)$$

и соотношения (11) получаем, что в области D_i

$$|\Phi'_{ix_i}(M)|\geq|\phi'_{ix_i}(M)|-\mu S\geq e-Nna-\mu S. \quad (18)$$

Допустим, что величины μL и μS таковы, что правые части неравенств (16), (18) положительны. Тогда уравнение $\Phi_i(x_1,x_2,...,x_n,\mu)=0$ в окрестности D_i точки M^* определяет однозначную гладкую поверхность $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},$ $x_{i+1},...,x_n,\mu)$ [11].

Для того чтобы $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},\ ...,x_n,\mu)$ при i=1,2,...,n в области D пересекались только в одной общей точке, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{gathered}\mu L<b(e-Na-\mu S)\times\\ \times\min\{1,(\frac{(1\text{-}\alpha)|\Delta^*|+n!(Nnb+e_{\max})^n}{n!(e_{\max}+Nnb+\mu S)^n}-1)^{1/n}\}.\end{gathered} \quad (19)$$

При выполнении неравенства (19) и соотношений

$$\begin{gathered}|\Phi_i(M^*)|\leq|\Phi_i(M^*)-\phi_i(M^*)|\leq\mu S\\ (i=1,2,...,n)\end{gathered} \quad (20)$$

в области D существует такая точка пересечения поверхностей $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n,\mu)$ с прямой $x_j=x_j^*$ ($j\neq i$), x_i – любое, которая лежит от точки M^* на расстоянии, меньшем b. Поэтому всякая точка поверхности $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},$ $x_{i+1},...,x_n,\mu)$ в области D принадлежит хотя бы одной из плоскостей [11]

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}(M_i)(x_j-x_j^*+\Delta x_j\delta_{ij})=0, \quad (21)$$

где M_i – любая точка, лежащая в области D на поверхности $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n,\mu)$, δ_{ij} – символ Кронекера, а величина

$$|\Delta x_j|\leq\mu L(e-Nna-\mu S)^{-1}. \quad (22)$$

Используя неравенство (6) и условия (19), (22), можно убедиться, что величина $\max_i\{|x_i-x_i^*|\}$, определяемая из системы уравнений (21) при i = 1,2,...,n, меньше b. В силу непрерывности поверхностей $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},$ $x_{i+1},...,x_n,\mu)$ это означает, что в области D имеется хотя бы одна точка их пересечения.

Убедимся теперь, что эта точка будет единственной. Принимая во внимание неравенства (7), (8) и (14), получаем соотношение

$$\begin{gathered}|\Delta_2-\Delta^*|\leq|\Delta_2-\Delta_1|+|\Delta_1-\Delta^*|\leq\\ \leq n!(\mu S+Nnb+e_{\max})^n-n!(Nnb+e_{\max})^n+\alpha|\Delta^*|,\end{gathered} \quad (23)$$

из которого следует, что величина $\Delta_2\neq 0$ в области D. Это означает, что нормали к поверхностям $x_i=\Phi_i^o(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n,\mu)$ взаимно не параллельны, и, следовательно, точка пересечения указанных поверхностей в области D может быть только одна. Таким образом, в области D существует единственная неподвижная точка исходного точечного отображения T.

Рассмотрим вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения T. Пусть

$$Q_n(z)=b_0^0z^n+b_1^0z^{n-1}+...+b_{n-1}^0z+b_n^0 \quad (24)$$

– характеристический полином, определяющий устойчивость неподвижной точки точечного преобразования T, и пусть задан характеристический полином

$$P_n(z)=a_0^0z^n+a_1^0z^{n-1}+...+a_{n-1}^0z+a_n^0, \quad (25)$$

определяющий устойчивость неподвижной точки M^* точечного преобразования $\widetilde{T}$.

Выражая коэффициенты (24), (25) через элементы соответствующих вековых определителей [12] и используя неравенство (8), можно убедиться [8], что

$$\max_k |b_k^0 - a_k^0| \le \varepsilon_0 = \\ = \max_k \{k! C_n^k [(\mu S + Nnb + M)^k - (Nnb + M)^k]\}, \quad (26)$$

где

$$M = \max_{i,j} \{|\phi'_{ix_j}(M^*)|\}, C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (27)$$

Если величина μS такова, что удовлетворяются соотношения

$$\varepsilon_j < \beta_j - \alpha_j \ (j = 0,1,...,n\text{-}1), \quad (28)$$

где ε_0 определяется формулой (26), а для остальных ε_j (j = 1,2,...,n-1) имеет место рекуррентная формула

$$\varepsilon_{j+1} = (1 + ((\alpha_j + \beta_j)M_j + \beta_j(\alpha_j + \varepsilon_j)) \times \\ \times (\beta_j(\beta_j - \varepsilon_j))^{-1})\varepsilon_j, \quad (29)$$

где

$$M_j = \max_k |a_k^j| \, \alpha_j = \min\{|a_0^j|, |a_{n-j}^j|\},$$

$$\beta_j = \max\{|a_0^j|, |a_{n-j}^j|\},$$

а величины a_k^j (k=0,1,...,n-1) определяются рекуррентными соотношениями

$$a_k^j = a_{k+1}^{j-1} - (a_0^{j-1} / a_{n-j+1}^{j-1}) a_{n-j-k}^{j-1}, |a_0^{j-1}| < |a_{n-j+1}^{j-1}|, \quad (30)$$

$$a_k^j = a_{k-1}^{j-1} - (a_{n-j+1}^{j-1} / a_0^{j-1}) a_{n-j-k+1}^{j-1}, |a_0^{j-1}| > |a_{n-j+1}^{j-1}|,$$

то при выполнении неравенства (27) полином (24) имеет столько же корней внутри и вне единичного круга, сколько и полином (25) [13]. Это означает, что характер устойчивости неподвижной точки точечного отображения T совпадает с характером устойчивости неподвижной точки M^* точечного преобразования $\widetilde{T}$.

Следствием всего вышеизложенного является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M^* – неподвижная точка приближенного точечного преобразования $\widetilde{T}$, удовлетворяются соотношения* (20), (27) *и, кроме того,*

$$\mu L < a(e\text{-}Nna)\text{-}K(n\text{-}1)b, \quad (31)$$

$$\mu S < e\text{-}Nna. \quad (32)$$

Тогда в кубе $|x_i - x_i^*| < b$ (i = 1,2,...,n) существует единственная неподвижная точка точечного преобразования T. Характер устойчивости этой неподвижной точки совпадает с характером устойчивости неподвижной точки M^*.

Заметим, что характер рассуждений не изменится в предположении, что отлично от нуля любое из слагаемых вида $(-1)^r \phi'_{1x_{k_1}}(M^*) \cdot ... \cdot \phi'_{nx_{k_n}}(M^*)$, входящих в определитель Δ^*. Вопрос о соответствии характера устойчивости неподвижной точки точечного отображения T характеру устойчивости неподвижной точки M^* может решаться и на основе метода D-разбиений [1,14].

Поскольку корни характеристического полинома $P_n(z)$, определяющего устойчивость неподвижной точки M^*, не принадлежат единичной окружности, то величины $P_n(1), P_n(-1)$, $P_n(e^{j\phi})$, $0 < \phi < 2\pi, j = \sqrt{-1}$, будут отличны от нуля. Заметим, что

$$|Q_n(\pm 1)| \ge |P_n(\pm 1)| - n \max_k |b_k^0 - a_k^0| \ge \\ \ge |P_n(\pm 1)| - n\varepsilon_0, \quad (33)$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mu)$ определяется в силу (26). А значит, величины $Q_n(\pm 1)$ будут иметь тот же знак, что и $P_n(\pm 1)$, как только

$$n \max_k \{k! C_n^k [(\mu S + Nnb + M)^k - (Nnb + M)^k]\} < \\ < \min\{|P_n(\pm 1)|\}. \quad (34)$$

В случае $e^{j\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, можно поступить аналогично. Таким образом, для совпадения характера устойчивости неподвижной точки исходного точечного отображения T с характером устойчивости неподвижной точки M^* приближенного точечного отображения достаточно выполнения неравенства

$$n \max_k \{k! C_n^k [(\mu S + Nnb + M)^k - (Nnb + M)^k]\} < \\ < \min\{|P_n(1)|, |P_n(-1)|, \min_{0<\phi<2\pi} |P_n(e^{j\phi})|\}, \quad (35)$$

представляющего собой ограничение на величину μ, и, следовательно, доказана теорема:

Теорема 2. *Пусть M^* – неподвижная точка приближенного точечного преобразования $\widetilde{T}$ и удовлетворяются соотношения* (21), (33), (34) *и* (35). *Тогда в кубе $|x_i - x_i^*| < b$ (i = 1,2,...,n) существует единственная неподвижная точка точечного преобразования T. Характер устойчивости этой неподвижной точки совпадает с характером устойчивости неподвижной точки M^*.*

Следует отметить, что единый параметр 0<α<1, подобно [8], введен в формулах (9), (10), (23) для удобства и компактности записи. На самом деле ход доказательства не изменится, если формулы (9), (10) переписать в более общем виде

$$b = a \min\{1, \alpha_1(e - Nna)/(K(n-1))\}, \ 0 < \alpha_1 < 1,$$

$$a = (1/(Nn)) \min\{\alpha_2 e, (e_{\max}^n + (\alpha_3 / n!) |\Delta^*|)^{1/n} - e_{\max}\},$$

$$0 < \alpha_2, \alpha_3 < 1.$$

При этом наличие независимых параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ дает больше возможностей для выбора подходящих размеров области D = = ($x_1^* - b, x_1^* + b, ..., x_n^* - b, x_n^* + b$), а также величины параметра μ из условий (33), (34),

$$\mu(L + bS) < b(e\text{-}Nna),$$

$$\mu S < -(Nnb + e_{\max}) + ((Nnb + e_{\max})^n +$$
$$+ (1+\alpha_4)|\Delta^*|/n!)^{1/n},\ 0 < \alpha_4 < 1,$$

существования и единственности неподвижной точки точечного преобразования T и одного из условий (30), (35), гарантирующих совпадение характера устойчивости неподвижных точек преобразований T и $\widetilde{T}$.

Заключение

В заключение отметим, что изложенные выше результаты позволят, подобно [15], решать задачу о применимости результатов приближенного исследования математической модели синтезатора частоты с пропорционально-интегрирующим фильтром произвольной размерности [16] на предмет существования периодических решений посредством изучения точечного отображения достаточно простого вида.

Список литературы

1. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
3. Антоновская О.Г. // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(27). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. С. 63–69.
4. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 1(31). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. С. 9–16.
5. Антоновская О.Г., Горюнов В.И., Лобашов Н.И. // Динамика систем. Управление и оптимизация: Межвуз. сборник. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 59–72.
6. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
7. Горюнов В.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 3. С. 426–431.
8. Горюнов В.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 11. С. 1700–1705.
9. Неймарк Ю.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 2. С. 95–117.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Физматгиз, 1962. 608 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Том II. М.: Гостехиздат, 1970. 800 с.
12. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1960. 402 с.
13. Горюнов В.И. // Динамика систем: Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1976. С. 169–173.
14. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.
15. Антоновская О.Г. // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып. 2(21). Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. С. 198–208.
16. Горюнов В.И. // Динамика систем: Межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1985. С.113–125.

ON THE STUDY OF NEAR-TRIANGULAR ARBITRARY-DIMENSIONAL POINT MAPPING

O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov

A technique to study near-triangular arbitrary-dimensional point mappings is proposed.

Keywords: mathematical modeling, system dynamics, point mapping, fixed point, stability.