УДК 534.1

О СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНАМИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ В СТРУНЕ И БАЛКЕ

Т.С. Денисова [1]***, В.И. Ерофеев*** [1,2]***, П.А. Смирнов*** [1]

[1] Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

erf04@sinn.ru

Поступила в редакцию 26.09.2011

Проведен анализ соотношений, связывающих групповые скорости и скорости переноса энергии поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на нелинейно-упругом основании, изгибной волны, распространяющейся в нелинейно-упругой балке.

Ключевые слова: упругие волны, перенос энергии.

Знание истинной скорости переноса энергии упругими волнами весьма важно, поскольку многие методы диагностики материалов и конструкций (например, метод акустоупругости [1, 2]) основаны на измерении скорости волнового пакета.

Публикуемая работа посвящена анализу соотношений, связывающих групповые скорости и скорости переноса энергии поперечной волны, распространяющейся в струне, лежащей на нелинейно-упругом основании, изгибной волны, распространяющейся в нелинейно-упругой балке.

Поперечные волны в струне, лежащей на нелинейно-упругом основании

Уравнение поперечных колебаний струны, лежащей на нелинейно-упругом основании, имеет вид [3]:

$$\rho u_{tt} - N u_{xx} + h_1 u + 2h_2 u^3 = 0\,. \tag{1}$$

Здесь $u(x,t)$ – поперечное смещение точек струны, ρ – плотность материала, N – напряжение, h – коэффициент, характеризующий жесткость основания.

Если решение уравнения (1) искать в виде бегущей гармонической волны $u(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + A^* e^{-i(\omega t - kx)}$, то придем к закону дисперсии поперечной волны

$$\omega = \sqrt{\left(Nk^2 + h_1 + 4h_2|A|^2\right)/\rho}\,, \tag{2}$$

определяющему связь круговой частоты ω, волнового числа k и комплексной амплитуды A (через A^* обозначено ее комплексно-сопряженное значение).

Соотношение (2) позволяет, в частности, вычислить групповую скорость поперечной волны

$$\upsilon_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{Nk}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\sqrt{Nk^2 + h_1 + 4h_2|A|^2}}{Nk^2 + h_1 + 4h_2|A|^2}\,. \tag{3}$$

Уравнение (1) может быть получено из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского с помощью уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0, \tag{4}$$

где лагранжиан L следует задать в виде:

$$L = \left(\rho (u_t)^2 - N(u_x)^2 - h_1 u^2 - h_2 u^4\right)/2\,. \tag{5}$$

Уравнение переноса энергии (уравнение Умова–Пойнтинга), соответствующее (4), запишется в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Здесь $W = \frac{\partial L}{\partial u_t} u_t - L$ – плотность энергии, $S = \frac{\partial L}{\partial u_x} u_t$ – плотность потока энергии.

Для лагранжиана (5) явный вид этих выражений следующий:

$$W = \left(\rho u_t^2 + N u_x^2 + h_1 u^2 + h_2 u^4\right)/2\,;\ S = -N u_x u_t\,.$$

Скорость переноса энергии волны введем как отношение $v_{эн} = \frac{<S>}{<W>}$, где в числителе стоит среднее значение плотности потока энергии

$$\langle S \rangle = 4Nk\omega\pi|A|^2, \tag{7}$$

а в знаменателе – среднее значение плотности энергии

$$\langle W \rangle = 2\pi|A|^2[\rho\omega^2 + Nk^2 + h_1 + 3h_2|A|^2]\,. \tag{8}$$

Усреднение проведено по периоду изменения фазы $\theta = \omega t - kx$ гармонической волны ($<>= = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta$).

С учетом (7), (8) и (2) скорость переноса энергии задается соотношением:

$$\upsilon_{эн} = \frac{\langle S\rangle}{\langle W\rangle} = \frac{Nk}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\sqrt{Nk^2 + h_1 + 4h_2|A|^2}}{Nk^2 + h_1 + 7h_2|A|^2/2}. \quad (9)$$

Очевидно, что при отсутствии в системе нелинейности скорости, задаваемые соотношениями (3) и (9), тождественно совпадают. Поэтому для линейных волн групповую скорость справедливо именуют скоростью переноса энергии. Также очевидно, что для нелинейного случая такое тождество не выполняется.

Проанализируем, как соотносятся между собой скорость переноса энергии и групповая скорость. Для этого зададим их отношение:

$$\frac{\upsilon_{гр}}{\upsilon_{эн}} = \frac{Nk^2 + h_1 + \frac{7}{2}h_2|A|^2}{Nk^2 + h_1 + 4h_2|A|^2} = \frac{\rho\omega^2 - \frac{h_2}{2}|A|^2}{\rho\omega^2} = \quad (10)$$

$$= 1 - \frac{h_2|A|^2}{2\rho\omega^2} < 1.$$

Из (10) следует, что для струны, лежащей на нелинейно-упругом основании, скорость переноса энергии больше групповой скорости. Рассмотрим пределы отношения. При увеличении частоты отношение увеличивается, его предельное значение при $\omega \to \infty$ и фиксированной амплитуде равно единице, т.е. при большой частоте скорости близки и стремятся к значению $\upsilon_{эн} = \upsilon_{гр} = \sqrt{N/\rho}$. При уменьшении частоты отношение скоростей уменьшается. При $\omega \to \omega_{кр}$ (где $\omega_{кр} = \sqrt{h/\rho}$; при меньших частотах колебания не будут иметь волнового характера) отношение скоростей стремится к наименьшему значению $\frac{\upsilon_{гр}}{\upsilon_{эн}} = 1 - \frac{h_2|A|^2}{2\rho\omega^2} \to 1 - \frac{h_2|A|^2}{2h_1 + 8h_2|A|^2}$. Видно, что при увеличении амплитуды колебаний это выражение стремится к числу 7/8, которое характеризует максимальную разницу между скоростями. При малой амплитуде колебаний отношение скоростей близко к единице. Можно заметить, что в нелинейной системе присутствует нормальная дисперсия $\upsilon_{гр} < \upsilon_{ф}$.

Изгибные волны в нелинейно-упругой балке

Изгибные колебания нелинейно-упругой балки описываются уравнением [3]:

$$\rho F u_{tt} + EJu_{xxxx} = au_x^2 u_{xx}, \quad (11)$$

где u – поперечное перемещение частиц срединной линии балки, J – осевой момент инерции поперечного сечения, ρ – плотность, F – площадь поперечного сечения, E – модуль Юнга, a – коэффициент нелинейности.

Закон дисперсии изгибной волны описывается выражением

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ + 2a|A|^2}{\rho F}} k^2, \quad (12)$$

а групповая скорость задается как

$$\upsilon_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = 2k\sqrt{\frac{EJ + 2a|A|^2}{\rho F}}. \quad (13)$$

Уравнение, с помощью которого из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского можно получить (11), имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right) = 0, \quad (14)$$

в котором лагранжиан следует задать соотношением:

$$L = \frac{\rho F}{2}u_t^2 - \frac{EJ}{2}u_{xx}^2 - \frac{a}{4}u_x^4. \quad (15)$$

Через лагранжиан (15) можно записать плотность энергии:

$$W = \frac{\partial L}{\partial u_t}u_t - L$$

и плотность потока энергии:

$$S = \frac{\partial L}{\partial u_{xx}}u_{xt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xx}}\right)u_t.$$

Их явный вид через перемещения следующий:

$$W = \frac{\rho F}{2}u_t^2 + \frac{EJ}{2}u_{xx}^2 + \frac{a}{4}u_x^4,$$

$$S = -au_x^3 u_t + EJu_{xxx}u_t - EJu_{xx}u_{xt}.$$

Их средние значения задаются выражениями:

$$\langle W\rangle = |A|^2(\rho F\omega^2 + EJk^4) + \frac{3}{2}k^4 a|A|^4,$$

$$\langle S\rangle = 6ak^3\omega|A|^4 + 4EJk^3\omega|A|^2.$$

Скорость переноса энергии вычисляется по формуле:

$$\upsilon_{эн} = \frac{\langle S\rangle}{\langle W\rangle} = \upsilon_{гр}\frac{6a|A|^2 + 4EJ}{4EJ + 7a|A|^2}. \quad (16)$$

Скорость переноса энергии (16) не равна групповой скорости (13). Для сравнения величин скоростей вычислим их отношение:

$$\frac{\upsilon_{гр}}{\upsilon_{эн}} = \frac{4EJ + 7a|A|^2}{4EJ + 6a|A|^2} = 1 + \frac{a|A|^2}{4EJ + 6a|A|^2} > 1. \quad (17)$$

Из (17) следует, что скорость переноса энергии меньше групповой скорости, причем отношение этих скоростей зависит от амплитуды колебаний и не зависит от волнового числа k и частоты ω. Предельное значение отношения (17) при амплитуде колебаний, стремящейся к нулю $A \to 0$, близко к единице, значит, волны в этом случае будут линейными. При бесконечном увеличении амплитуды $A \to \infty$ отношение (17) стремится к максимальному значению, равному 7/6, т.е. скорость переноса энергии (16) составляет 0.86 от групповой скорости (13).

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-08-97066-р_поволжье).

Список литературы

1. Никитина Н.Е. Акустоупругость: Опыт практического применения. Н. Новгород: Изд-во «Талам», 2005. 208 с.
2. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов С.И. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
3. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.

ON THE RATE OF ENERGY TRANSFER BY NONLINEAR WAVES IN STRINGS AND BEAMS

T.S. Denisova, V.I. Erofeev, P.A. Smirnov

An analysis is carried out of the relations between the group velocity and the energy transfer rate of a transverse wave propagating in a string lying on a nonlinear elastic foundation and a bending wave propagating in a nonlinearly elastic beam.

Keywords: elastic waves, energy transfer.