УДК 534.1

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В СПЕКТРЕ КРУТИЛЬНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ СТЕРЖНЕ



***А.В. Серов***

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

p_p_k@list.ru

*Поступила в редакцию 26.09.2011*

Выявлено, что с депланацией может быть связано появление «запрещенной» уравнениями нелинейной теории упругой удвоенной частоты (второй гармоники) в спектре крутильной волны. Определена зависимость амплитуды волны удвоенной частоты от длины волны: в длинноволновом диапазоне амплитуда второй гармоники может достигнуть половины амплитуды волны основной частоты, в коротковолновом диапазоне – лишь её четверти.

*Ключевые слова:* крутильная волна, спектр, нелинейность, стержень.

В теории стесненного кручения предполагается, что кручение стержня складывается из двух связанных друг с другом движений: поворота поперечных сечений в своей плоскости (кручение по Кулону) и их депланации, т.е. выхода поперечного сечения из первоначального плоского состояния. Депланация, возникающая в результате неодинакового растяжения продольных волокон при кручении, при этом считается пропорциональной относительному углу поворота, а крутильные волны описываются уравнением Власова [1–3]. Это уравнение, наряду с «волновым» оператором (оператор Даламбера), содержит слагаемое, описывающее дисперсию крутильной волны, т.е. зависимость ее скорости от частоты.

Обобщение модели Власова на случай учета геометрической нелинейности (нелинейная связь между деформацией и перемещением) проведено в работе [4].

Если в этой модели (уравнение (3) работы [4]) ввести безразмерные переменные $\tilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}$, $\tilde{x} = \frac{x}{\Lambda}$, $\tilde{t} = \frac{tC_\tau}{\Lambda}$, то получим следующее уравнение:

$$\theta''_{tt} - (C_\tau^2 \frac{I_k}{I_p} + 2\alpha_3)\frac{1}{c^2}\theta''_{xx} + \frac{C_l^2}{c^2 X_0^2}\frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxxx} - \\ -\frac{I_d}{I_p X_0^2}\theta''''_{xxtt} = \frac{\alpha_2\theta_0}{c^2}\theta_x'^2 + 2\frac{\alpha_2\theta_0}{c^2}\theta\theta''_{xx} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_1 X_0^2}{c^2}\theta^3 - \\ -\frac{\alpha_3\theta_0^2}{c^2}\theta\theta_x'^2 - \frac{\alpha_3\theta_0^2}{2c^2}\theta^2\theta''_{xx} - \frac{\alpha_2\theta_0^3}{3c^2}\theta^3\theta''_{xx} - \frac{\alpha_2\theta_0^3}{2c^2}\theta^2\theta_x'^2 + \\ +\frac{\alpha_3\theta_0^4}{6c^2}\theta^3\theta_x'^2 - \frac{\alpha_1 X_0^2\theta_0^3}{12c^2}\theta^5. \quad (1)$$

В уравнении (1) знак «волна» опущен и принято, что $\frac{X_0^2}{T^2} = c^2$. Заметим, что это уравнение, кроме кубической нелинейности и нелинейностей более высоких степеней, содержит квадратичную нелинейность. Наличие квадратичной нелинейности позволяет описывать генерацию крутильной волны удвоенной частоты, «запрещенную» теорией упругости, но наблюдаемую экспериментально.

Будем считать, что $\frac{r^2}{\Lambda^2\theta_0} > 1$, тогда вместо (1) можно записать следующее уравнение:

$$\theta''_{tt} - (C_\tau^2\frac{I_k}{I_p} + 2\alpha_3)\theta''_{xx} + C_l^2\frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxxx} - \\ -\frac{I_d}{I_p}\theta''''_{xxtt} = \alpha_2\theta_x'^2 + 2\alpha_2\theta\theta''_{xx}. \quad (2)$$

Будем искать решения уравнения (2) в следующем виде:

$$\theta = A(\varepsilon x)e^{i(\omega t - kx)} + A^*(\varepsilon x)e^{-i(\omega t - kx)} + \\ + B(\varepsilon x)e^{2i(\omega t - kx)} + B^*(\varepsilon x)e^{-2i(\omega t - kx)}. \quad (3)$$

Сохраняя члены не выше первого порядка малости, получим систему укороченных уравнений:

$$A_x(2aik\varepsilon + 4bik^3\varepsilon - 2cik\omega^2\varepsilon) = \\ = A^*B(4dk^4 - 5ek^2), \\ B_x(4aik\varepsilon + 32bik^3\varepsilon - 16cik\omega^2\varepsilon) = \\ = -A^2(dk^2 + ek^2). \quad (4)$$

Здесь буквами $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ по порядку обозначены коэффициенты уравнения (2), начиная со второго.

Видно, что взаимодействие первой и второй гармоник имеет несимметричный характер. Квадрат амплитуды первой гармоники входит в уравнение второй гармоники в виде вынуждающей силы. Амплитуда второй гармоники входит в уравнение для первой параметрическим образом. Следовательно, вторая гармоника воздействует на первую лишь при наличии сигнала первой гармоники.

Сделав замену

$$A = C_1 e^{iS_1},\ B = C_2 e^{iS_2}, \qquad (5)$$

получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dC_1}{dx} a_1 = -C_1 C_2 b_1 \sin\Delta, \\ &\frac{dC_2}{dx} a_2 = -C_1^2 b_2 \sin\Delta, \\ &\frac{d\Delta}{dx} = \left(\frac{C_1^2 b_2}{C_2 a_2} - 2\frac{C_2 b_1}{a_1}\right)\cos\Delta, \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\Delta = 2S_1 - S_2$,

$$a_1 = 2k\left(C_\tau^2 \frac{I_k}{I_p} + 2\alpha_3\right) + 4k^3 C_l^2 \frac{I_d}{I_p} + 2k\omega^2 \frac{I_d}{I_p},$$

$$b_2 = 3\alpha_2 k^2,\ b_1 = -4\alpha_2 k^4 - 10\alpha_2 k^2,$$

$$a_2 = 4k\left(C_\tau^2 \frac{I_k}{I_p} + 2\alpha_3\right) + 32k^3 C_l^2 \frac{I_d}{I_p} + 16k\omega^2 \frac{I_d}{I_p}.$$

Поскольку $C_2(0) = 0$, то $\cos\Delta = 0$ и, следовательно, $\Delta = \frac{\pi}{2} + \pi n$. В силу этого первые два уравнения системы (6) примут вид:

$$\frac{dC_1}{dx} a_1 = -C_1 C_2 b_1,\ \frac{dC_2}{dx} a_2 = C_1^2 b_2.$$

Решив эту систему уравнений, получим $C_1$ и $C_2$:

$$C_2 = C_{10}\sqrt{\frac{a_1 b_2}{b_1 a_2}}\,\mathrm{th}\left(C_{10}\sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}x\right),$$

$$C_1 = C_{10}\,\mathrm{ch}\left(C_{10}\sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}x\right)^{-1}, \qquad (7)$$

где $C_{10}$ – амплитуда волны.

Таким образом, амплитуда второй гармоники при малых $k$ достигает половины значения $C_{10}$ и с ростом $k$ убывает до уровня $0.25C_{10}$. При $x \to \infty$ происходит полная перекачка энергии во вторую гармонику. В случае когда $k \to 0$, график второй гармоники имеет асимптоту $0.5C_{10}$, при $k \to \infty$ амплитуда второй гармоники достигает значения $0.25C_{10}$.

Значение функции $C_1$ с ростом $x$ убывает от $C_{10}$ до нуля. При больших $k$ значение $C_1$ больше, однако при значениях $k$, близких к 0, функция $C_1$ также будет иметь значение, близкое к $C_{10}$.

По мере распространения волны происходит полная перекачка энергии в гармонику удвоенной частоты, причём при малых волновых числах $k$ значение амплитуды второй гармоники устанавливается на уровне половины от первой, а при больших $k$ амплитуда второй гармоники достигает лишь $\frac{1}{4}$ амплитуды первой гармоники.

*Список литературы*


1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
2. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Т.1 / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978.
3. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные волны конечной амплитуды в упругом стержне // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 157–163.


**MODELING SECOND HARMONIC GENERATION IN THE SPECTRUM OF TORSIONAL WAVES PROPAGATING IN NONLINEAR ELASTIC RODS**

***A.V. Serov***

We have revealed that warping may occur due to the emergence in the spectrum of the torsional wave of an elastic double frequency (second harmonic) "forbidden" by the equations of nonlinear theory. The dependence of the second harmonic amplitude on the wavelength has been determined: in the longwave range it can reach half the amplitude of the fundamental wave, whereas in the shortwave range - only its quarter.

*Keywords:* torsional wave, spectrum, nonlinearity, rod.