УДК 519.8 + 681.3

БИКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЛИНЕЙНО-РАССРЕДОТОЧЕННОЙ ГРУППИРОВКИ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Н.А. Дуничкина

Волжская государственная академия водного транспорта, Н. Новгород

nadezhda.dunichkina@gmail.com

Поступила в редакцию 27.04.2011

Рассматривается дискретная модель однофазного обслуживания группировки стационарных объектов, рассредоточенных вдоль одномерной рабочей зоны двух осуществляющих встречное движение mobile-процессоров. С каждым объектом ассоциирована пара монотонно возрастающих функций индивидуального штрафа. Формулируются задачи синтеза в плоскости критериев полной совокупности эффективных оценок и соответствующих им Парето-оптимальных стратегий обслуживания. Выводятся решающие соотношения динамического программирования, излагаются алгоритмы их реализации и технология построения стратегий обслуживания.

Ключевые слова: дискретная модель обслуживания, синтез Парето-оптимальных стратегий, динамическое программирование.

1. Введение

Рассматриваемая в статье проблема возникла в связи с созданием компьютерных средств поддержки оперативного управления снабжением дизельным топливом плавучих дизель-электрических комплексов, осуществляющих русловую добычу нерудных строительных материалов (НСМ) в крупномасштабных русловых районах внутренних водных путей РФ. Примерами таких полигонов, протяженностью до нескольких сотен километров, являются Камский грузовой район и 4-й грузовой район на реке Белой. В навигационный период в каждом таком районе работает группировка из 15–20 единиц плавучих добывающих комплексов (ПДК), осуществляющих в непрерывном технологическом цикле выемку, обезвоживание и погрузку НСМ в речные суда и составы для последующей транспортировки их к местам складирования и реализации предприятиям-потребителям [1].

Снабжение ПДК дизельным топливом выполняется закрепленными за полигоном специализированными танкерами-заправщиками.

В условиях высоких расходов на эксплуатацию ПДК и цен на дизельное топливо, сокращения возможностей предприятий по созданию его технически значимых оперативных запасов основная задача диспетчера группировки (лица, принимающего решения – ЛПР) заключается в выработке (и последующем обеспечении реализации) такой стратегии снабжения группировки дизельным топливом, при которой минимизируются экономические потери, связанные с непроизводительными простоями добывающих комплексов.

В статье рассматривается математическая модель одной их типовых технологических схем снабжения линейно рассредоточенной группировки ПДК, согласно которой доставка дизельного топлива осуществляется двумя идентичными танкерами-заправщиками в процессе их встречного движения от исходных базовых пунктов вдоль всего полигона. При этом качество плана снабжения группировки ПДК дизельным топливом оценивается по двум независимым критериям, отражающим те или иные имеющие экономический смысл потери в связи с его реализаций. Выбор конкретного вида пары критериев оценки плана снабжения зависит от складывающейся на горизонте оперативного планирования эксплуатационной ситуации. В этом смысле семейство формулируемых ниже бикритериальных задач принятия решений обобщает экстремальные задачи синтеза оптимальных стратегий обслуживания [2, 3] – оперативных планов снабжения ПДК дизельным топливом, построенных в рамках однокритериальных моделей обслуживания.

В целях разработки инструментария для штатного решения рассматриваемых бикритериальных задач в работе предлагаются алгоритмы синтеза стратегий обслуживания, реализующие в рамках концепции Парето [4] идеологию динамического программирования [5–7].

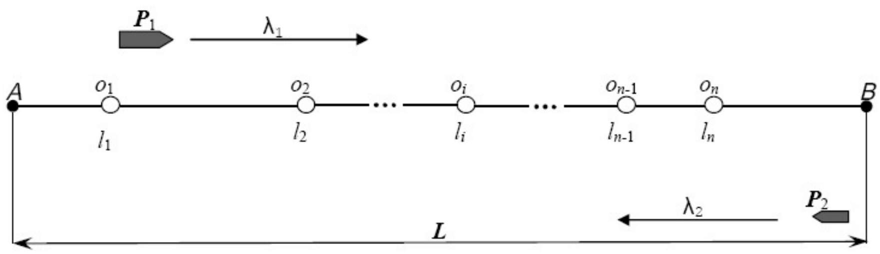

Рис. 1. Схема модели обслуживания стационарных объектов группировки O_n

Технология реализации предлагаемых алгоритмов продемонстрирована на примерах.

2. Математическая модель снабжения и постановки оптимизационных задач

Считается заданной группировка $O_n = \{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$ стационарных объектов, расположенных в фиксированных точках $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ($l_1 \le l_2 \le \ldots \le l_n$) соответственно общей рабочей зоны Ξ двух обслуживающих идентичных мобильных процессоров P_1 и P_2. Зона Ξ представляет собой направленный отрезок L, граничные точки A и B которого являются базовыми для процессоров P_1 и P_2 соответственно. Из точки A, начиная от момента времени $t = 0$, процессор P_1 поступательно перемещается к конечной точке B и, последовательно останавливаясь у части объектов группировки O_n, выполняет их однофазное обслуживание. Процессор P_2 начинает своё поступательное движение из точки B в точку A в момент времени $t = \tau_{n+1}$ ($\tau_{n+1} \ge 0$) и аналогично выполняет однофазное обслуживание остальных объектов группировки O_n. Не связанные с обслуживанием объектов простои процессоров и одновременное обслуживание процессором P_1 (P_2) двух и более объектов недопустимы. Для дальнейшего удобно считать, что обслуживание объектов процессором P_1 реализуется в рейсе, именуемом λ_1, а обслуживание объектов процессором P_2 – в рейсе λ_2 (рис. 1); имеющие при этом место очевидные ограничения описываются в теоретико-множественной нотации выражением вида

$$\{o_j : o_j \in \lambda_1\} \cup \{o_j : o_j \in \lambda_2\} = O_n,$$

$$\{o_j : o_j \in \lambda_1\} \cap \{o_j : o_j \in \lambda_2\} = \varnothing.$$

С каждым объектом o_j, $j = \overline{1,n}$, ассоциируются две монотонно возрастающие (в нестрогом смысле) функции индивидуального штрафа $\varphi_j(t)$ и $\psi_j(t)$, выражающие зависящие от момента завершения обслуживания o_j величины потерь; если в силу специфики условий реализации обслуживания удобно говорить о потерях по объекту o_j, $j = \overline{1,n}$, за некоторый временной интервал $[p, q]$, то в этом случае величины потерь определяются соответственно как $\varphi_j(q) - \varphi_j(p)$ и (или) $\psi_j(q) - \psi_j(p)$.

Для используемых ниже норм времени примем обозначения: τ_j – продолжительность обслуживания объекта o_j; $\gamma_{j-1,j}$ ($\gamma_{j+1,j}$) – затраты времени на перемещение процессора P_1 (P_2) между точками расположения соседних объектов, $j = \overline{1,n}$; при этом $\gamma_{0,1}$ – продолжительность перемещения процессора P_1 от базовой точки A к точке l_1, $\gamma_{n+1,n}$ – продолжительность перемещения процессора P_2 от базовой точки B к точке l_n. Параметры τ_j, $\gamma_{j-1,j}$, $\gamma_{j+1,j}$ ($j = \overline{1,n}$) считаем принимающими значения из натурального ряда.

Стратегией обслуживания именуем произвольное подмножество элементов W из совокупности индексов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Объекты o_j, $j \in W$, в реализации стратегии W обслуживаются процессором P_1, остальные объекты группировки O_n – процессором P_2. Очевидно, число различных стратегий обслуживания равно 2^n.

При реализации определяемого стратегией W рейса обслуживание любого объекта o_j, $j \in N$, начинается от момента прибытия процессора в точку j; по завершении обслуживания процессор продолжает своё движение. Любая стратегия однозначно определяет моменты начала и завершения обслуживания каждого из объектов группировки O_n.

Для объекта o_j через $t_j^*(W)$, $j = \overline{1,n}$, обозначим момент завершения его обслуживания при реализации стратегии W. Если объект o_j обслуживается в рейсе λ_1 ($j \in W$), то $t_j^*(W) = \sum_{k=1}^{j} \gamma_{k-1,k} + \sum_{k \in W(j)} \tau_k$, где $W(j)$ – совокупность не превосходящих j элементов из W. Если объект

o_j обслуживается в рейсе λ_2 $(j \in N \setminus W)$, то $t_j^*(W) = \sum_{k=0}^{n-j} \gamma_{n+1-k,n-k} + \sum_{k \in \{0...n-j\} \setminus W(j)} \tau_{n+1-k}$.

С позиций повышения эффективности управления обслуживанием объектов $o_1, o_2, \ldots, o_n$ в зависимости от эксплуатационной ситуации возникают следующие задачи.

Задача 1. Найти полную совокупность Парето-оптимальных стратегий обслуживания для бикритериальной проблемы

$$\min_W \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(W)), \max_j \psi_j(t_j^*(W)) \right) \quad (1)$$

минимизации суммы индивидуальных штрафов φ_j и величины максимального из индивидуальных штрафов ψ_j по всем объектам группировки O_n.

Задача 2. Найти полную совокупность Парето-оптимальных стратегий обслуживания для бикритериальной проблемы

$$\min_W \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(W)), \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t_j^*(W)) \right) \quad (2)$$

минимизации суммы индивидуальных штрафов φ_j и ψ_j по всем объектам группировки O_n.

Задача 3. Найти полную совокупность Парето-оптимальных стратегий обслуживания для бикритериальной проблемы

$$\min_W \left(\max_j \varphi_j(t_j^*(W)), \max_j \psi_j(t_j^*(W)) \right) \quad (3)$$

минимизации величин максимального из индивидуальных штрафов φ_j и максимального из индивидуальных штрафов ψ_j по всем объектам группировки O_n.

3. Алгоритмы синтеза стратегий обслуживания

Для задач 1, 2, 3 в рамках концепции Парето сконструируем решающие алгоритмы на основе идеологии динамического программирования. При этом записью вида $eff(M)$ будем обозначать максимальное по включению подмножество недоминируемых в M векторов, где M – произвольное множество двумерных векторов-оценок. Также с целью компактного выражения соответствующих рекуррентных соотношений определим (специфическим образом для каждой из задач) двуместную операцию $\oplus$ с использованием записей $x = (x_1, x_2)$, Y для обозначения соответственно двумерного вектора и множества векторов той же размерности.

3.1. Алгоритм решения задачи 1. Выражением вида $Y \oplus x$ будем обозначать совокупность всех векторов $v = (v_1, v_2)$, у которых первая компонента представима в виде $v_1 = y_1 + x_1$, вторая компонента определяется по правилу $v_2 = \max(y_2, x_2)$, где $y = (y_1, y_2) \in Y$.

Пусть $Z(i, D_1, D_2)$ – задача, отличающаяся от исходной задачи 1 только следующим: функции индивидуального штрафа по объектам $o_1, o_2, \ldots, o_n$ тождественно нулевые; общее время, затрачиваемое на обслуживание в рейсе λ_1 объектов $o_1, o_2, \ldots, o_i$, равно D_1, а общее время, затрачиваемое на обслуживание в рейсе λ_2 объектов $o_{i+1}, o_{i+2}, \ldots, o_n$, равно D_2. Обозначим через $E(i, D_1, D_2)$ полную совокупность эффективных оценок в задаче $Z(i, D_1, D_2)$.

Тройки (i, D_1, D_2) далее будем именовать ситуациями. Не все ситуации реализуемы в процессах обслуживания; так, для $i = 1$ реализуемы только ситуации $(1, \tau_1, D_2)$ и $(1, 0, D_2)$ ($\forall D_2 \in D$, где $D = \{0\} \cup \bigcup_{K \subseteq \{2..n\}} \{\sum_{k \in K} \tau_k\}$). Удобно считать, что для всех нереализуемых ситуаций (i, D_1, D_2) имеет место соотношение $E(i, D_1, D_2) = \{(+\infty, +\infty)\}$. Отметим также, что ситуации (i, D_1, D_2) нереализуемы, если $D_1 \notin \{0\} \cup \bigcup_{K \subseteq \{1..i\}} \{\sum_{k \in K} \tau_k\}$ или $D_2 \notin \{0\} \cup \bigcup_{K \subseteq \{i+1..n\}} \{\sum_{k \in K} \tau_k\}$. В частности, $E(i, D_1, D_2) = \{(+\infty, +\infty)\}$ при всех отрицательных значениях D_1 или D_2.

Очевидно, ситуации $(1, 0, D_2)$, где $D_2 \in D$, соответствуют обслуживанию объекта o_1 в рейсе λ_2, которое завершается в момент времени $\sum_{i=n}^{1} \gamma_{i+1,i} + \tau_1 + D_2 + \tau_{n+1}$. Ситуации $(1, \tau_1, D_2)$ описывают обслуживание объекта o_1 в рейсе λ_1, завершающееся в момент $\gamma_{0,1} + \tau_1$. При $D_1 \notin \{0, \tau_1\}$ или $D_2 \notin D$ величины $E(i, D_1, D_2)$ смысла не имеют. Поэтому для задачи 1 справедливы соотношения

$$E(1,0,D_2) = \{(\varphi_1(\sum_{i=n}^{1} \gamma_{i+1,i} + \tau_1 + D_2 + \tau_{n+1}), \psi_1(\sum_{i=n}^{1} \gamma_{i+1,i} + \tau_1 + D_2 + \tau_{n+1}))\}, \text{ где } D_2 \in D, \quad (4)$$

$$E(1,0,D_2) = \{(\varphi_1(\gamma_{0,1} + \tau_1), \psi_1(\gamma_{0,1} + \tau_1))\}, \text{ где } D_2 \in D, \quad (5)$$

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5
$\gamma_{i,i+1}$	51	35	30	49	59	36
$\gamma_{i+1,i}$	56	38	33	54	65	40
τ_{i+1}	11	12	10	16	16	20
φ_{i+1}	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 83,\\ 4(t-83) \text{ при } t > 83\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 108,\\ 3(t-108) \text{ при } t > 108\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 50,\\ 8(t-50) \text{ при } t > 50\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 82,\\ 9(t-82) \text{ при } t > 82\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 194,\\ 2(t-194) \text{ при } t > 194\end{cases}$	
ψ_{i+1}	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 37,\\ t-37 \text{ при } t > 37\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 77,\\ t-77 \text{ при } t > 77\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 48,\\ t-48 \text{ при } t > 48\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 69,\\ t-69 \text{ при } t > 69\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ при } t \le 46,\\ t-46 \text{ при } t > 46\end{cases}$	

$$E(i,D_1,D_2) = \{(+\infty, +\infty)\}$$
$$\text{при } D_1 \notin \{0,\tau_1\} \text{ или } D_2 \notin D. \tag{6}$$

Пусть все значения $E(i,D_1,D_2)$ для некоторого $i \in \{1,2,...,n-1\}$ уже найдены. При отыскании значений $E(i+1,D_1,D_2)$ следует учитывать следующие две возможности:

1) объект o_{i+1} обслуживается в рейсе λ_1, и тогда рассматриваемой ситуации $(i+1, D_1, D_2)$ непосредственно предшествует ситуация $(i, D_1 - \tau_{i+1}, D_2)$;

2) объект o_{i+1} обслуживается в рейсе λ_2, и тогда ситуации $(i+1,D_1,D_2)$ непосредственно предшествует ситуация $(i,D_1,D_2+\tau_{i+1})$.

С учетом указанных возможностей для $i \in \{1,2, ..., n-1\}$ получаем соотношение

$$E(i+1,D_1,D_2) = eff(K_1,K_2), \tag{7}$$

где

$$K_1 = E(i,D_1-\tau_{i+1},D_2) \oplus$$
$$\oplus (\varphi_{i+1}(\sum_{j=0}^{i}\gamma_{j,j+1}+D_1), \psi_{i+1}(\sum_{j=0}^{i}\gamma_{j,j+1}+D_1)), \tag{8}$$
$$K_2 = E(i,D_1,D_2+\tau_{i+1}) \oplus$$
$$\oplus (\varphi_{i+1}(\sum_{j=n}^{i+1}\gamma_{j+1,j}+\tau_{i+1}+D_2+\tau_{n+1}), \tag{9}$$
$$\psi_{i+1}(\sum_{j=n}^{i+1}\gamma_{j+1,j}+\tau_{i+1}+D_2+\tau_{n+1})).$$

Величины K_1 и K_2 ниже именуем соответственно первой и второй компонентами формулы (7).

Таким образом, полная совокупность эффективных оценок E в задаче 1 определяется по формуле

$$E = eff(\bigcup_{D_1=0}^{\sum_{k=1}^{n}\tau_k}\bigcup_{D_2=0}^{\sum_{k=2}^{n}\tau_k} E(n,D_1,D_2)). \tag{10}$$

Формулы (4)–(7) суть рекуррентные соотношения динамического программирования, позволяющие совместно с (8)–(10) получить решение задачи 1. Процесс вычислений по этим соотношениям удобно представлять как последовательное заполнение n таблиц значений функций $E(i, D_1, D_2)$, каждая таблица отвечает своему значению параметра i. Строки таблицы соответствуют значениям параметра D_1, а столбцы – значениям параметра D_2 ($D_1 \in \{0, 1, 2, \dots, \sum_{k=1}^{n}\tau_k\}$, $D_2 \in \{0, 1, 2, \dots, \sum_{k=2}^{n}\tau_k\}$). Таблицы заполняются в порядке возрастания индекса i. Зафиксировав в процессе вычислений по формуле (7) для каждого найденного значения $E(i+1, D_1, D_2)$ номер компоненты, которая попала в множество недоминируемых оценок на этом этапе, и номер оценки из совокупности $E(i, D_1 - \tau_{i+1}, D_2)$ или $E(i, D_1, D_2 + \tau_{i+1})$, из которой было получено текущее значение, а также определив значения параметров D_1 и D_2, при которых соответствующие оценки попадают в множество недоминируемых на последнем шаге (10), легко строим оптимальную стратегию.

Процедуру решения задачи 1 можно представить как последовательность выполнения двух этапов.

1. Построение полной совокупности эффективных оценок путем реализации вычислительного процесса по соотношениям (4)–(10).

2. Построение совокупности оптимальных стратегий, соответствующих полученным эффективным оценкам.

Отметим, что для практической реализации выбирается только одна стратегия, которую ЛПР сочтет наиболее целесообразной. В этом случае на втором этапе осуществляется построение единственной стратегии обслуживания, соответствующей выбранной ЛПР эффективной оценке.

Пример 1. Требуется построить полную совокупность Парето-оптимальных стратегий обслуживания для бикритериальной проблемы (1) при функциях штрафа и значениях параметров модели обслуживания, представленных в табл. 1.

Реализуя счет по соотношениям (4)–(10), получаем множество эффективных оценок $E = \{(2897, 280), (3381, 227)\}$. Восстанавливаем стратегии, соответствующие оценкам множества E: $W_1 = \{2,3,4,5\}$ и $W_2 = \{1\}$ соответственно.

3.2. Алгоритм решения задачи 2. Введём следующее соглашение. Выражением вида $Y \oplus x$ будем обозначать совокупность всех векторов $v = (v_1, v_2)$, у которых первая компонента представима в виде $v_1 = y_1 + x_1$, вторая компонента определяется по правилу $v_2 = y_2 + x_2$, где $y = (y_1, y_2) \in Y$.

Использование данного соглашения при вычислении по формулам (8), (9) значений компонент K_1 и K_2 позволяет путем реализации рекуррентных соотношений (4)–(7) и формулы (10) находить решение задачи 2.

Замечание. Отметим важную для приложений интерпретацию задачи 2 для моделей, где объектам предписаны директивные сроки обслуживания d_j $(j = \overline{1,n})$. Нарушение директивных сроков влечет за собой монотонно возрастающий в зависимости от продолжительности задержки штраф. Такой штраф равен нулю при $t \in [0, d_j]$ и определяется монотонно возрастающей функцией $\Phi_j(t - d_j)$ при $t > d_j$. В подобных моделях произвольную стратегию W целесообразно оценивать двумя аддитивными критериями: $Q_1(W) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign}(\varphi_j(t_j^*(W)))$ – числом объектов, обслуживаемых с нарушениями директивных сроков, и $Q_2(W) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t_j^*(W))$ – суммарным штрафом. Возникающая при этом нижеследующая оптимизационная задача 2′

$$(\min Q_1(W), \min Q_2(W))$$

является частным случаем задачи 2.

Пример 2. Требуется построить полную совокупность Парето-оптимальных стратегий обслуживания для бикритериальной проблемы (2) на исходных данных примера 1.

Реализуя счет по соотношениям (4)–(10), получаем множество E = {(2897, 757), (3381, 695)}. Оценкам этого множества соответствуют оптимальные стратегии $W_1 = \{2,3,4,5\}$ и $W_2 = \{1\}$ соответственно.

3.3. Алгоритм решения задачи 3. Через $Y \oplus x$ будем обозначать совокупность всех векторов $v = (v_1, v_2)$, первая компонента которых представима в виде $v_1 = \max(y_1, x_1)$, а вторая компонента $v_2 = \max(y_2, x_2)$, где $y = (y_1, y_2) \in Y$. В таком случае рекуррентные соотношения (4)–(7), (10) позволяют решить задачу 2, но при использовании формул (8), (9) с введенным в данном подразделе определением совокупности операции $Y \oplus x$.

Пример 3. Требуется построить полную совокупность Парето-оптимальных стратегий обслуживания для бикритериальной проблемы (3) на исходных данных примера 1.

Реализуя счет по соотношениям (4)–(10), получаем множество E = {(984, 292), (1089, 280), (1632, 227)}. Оценкам этого множества соответствуют оптимальные стратегии W_1 = {3, 4, 5}, $W_2 = \{2,3,4,5\}$ и $W_3 = \{1\}$ соответственно.

4. Заключение

Заметим, что рассмотренные задачи 1 и 2 относятся к числу NP-трудных ввиду того, что NP-трудными являются задачи обслуживания группировки объектов при наличии одного обслуживающего процессора [3]. Вместе с тем, при реализации метода динамического программирования для практически значимых размерностей задач формирования планов-графиков снабжения топливом группировок ПДК временные затраты оказываются вполне приемлемыми, поскольку штатным регламентом на этот процесс обычно отводится до 15–20 минут.

Список литературы

1. Синий А.В., Федосенко Ю.С. Базовые математические модели снабжения топливом земснарядов в крупномасштабных районах русловой добычи нерудных строительных материалов // Международный научно-промышленный форум «Великие реки 2004». Генеральные доклады, тезисы докладов. Н.Новгород, ННГАСУ. 2004. С. 468–470.

2. Коган Д.И., Федосенко Ю.С. Задачи синтеза оптимальных стратегий обслуживания стационарных объектов в одномерной рабочей зоне процессора // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 50–62.

3. Коган Д.И., Федосенко Ю.С., Дуничкина Н.А. Задачи обслуживания линейно рассредоточенных стационарных объектов перемещающимися процессорами II. // VI Московская Международная конференция по исследованию операций (ORM2010). Москва, 19–23 октября 2010 г.: Труды. М.: МАКС Пресс, 2010. С. 298–299.

4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 255 с.

5. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 457 с.

6. Klamroth K., Wiecek M. Dynamic Programming Approaches to the Multiple Criteria Knapsack Problem // Technical Report #666. Dept. of Math. Sc., Clemson University. Clemson, SC, 1998.

7. Коган Д.И. Динамическое программирование и дискретная многокритериальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2005. 260 с.

BICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS OF SERVICING A GROUP OF LINEARLY DISTRIBUTED STATIONARY OBJECTS

N.A. Dunichkina

A discrete model of one-stage service for a group of stationary objects is considered. The objects are located along a one-dimensional working zone of two counter-moving mobile processors. Each object is associated with a pair of monotonically increasing penalty functions. Synthesis problems are formulated in the criteria plane of a full set of effective estimates and corresponding Pareto-optimal service strategies. Recurrence relations of dynamic programming are derived; their implementation algorithms and the technology of service strategies are presented.

Keywords: discrete model of service, synthesis of Pareto-optimal strategies, dynamic programming.