МАТЕМАТИКА

УДК 517.95:517.97

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА

В.С. Гаврилов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vladimir.s.gavrilov@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2011

Доказывается существование и единственность решения из энергетического класса однородной первой начально-краевой задачи для полулинейного гиперболического уравнения дивергентного вида.

Ключевые слова: кубичное дифференциальное уравнение, улитка Паскаля, частный алгебраический интеграл, предельный цикл, круг Пуанкаре.

В настоящей работе доказывается существование и единственность решения, принадлежащего энергетическому классу, однородной первой начально-краевой задачи для полулинейного гиперболического уравнения дивергентного вида. Необходимость в подобного рода результатах возникает при изучении задач оптимального управления, динамика которых описывается гиперболическими уравнениями с начально-краевыми условиями (см., например, [1–6]).

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$z_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)z_{x_j} + a_i(x,t)z) +$$
$$+ a(x,t,z(x,t)) + b_i(x,t)z_{x_i} +$$
$$+ c(x,t)z_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T; \qquad (1)$$
$$z(x,0) = \varphi(x), \quad z_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega;$$
$$z(s,t) = 0, \quad (s,t) \in S_T.$$

Здесь и ниже $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с границей S, $S_T \equiv S \times (0,T)$, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$.

Считаем, что выполнены следующие условия на исходные данные задачи (1):

а) функции a_{ij}, a_i, b_i, c, a_{ijt}, a_{it}, b_{it}, c_t, $i,\ j = \overline{1,n}$, определены и измеримы по Лебегу на Q_T;

б) справедливы условия и оценки

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \psi \in L_2(\Omega);$$
$$\nu_1 \mid \xi \mid^2 \le a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \le \nu_2 \mid \xi \mid^2$$
$$\forall (x,t) \in Q_T,\ \xi \in R^n \ (\nu_1,\ \nu_2 > 0);$$

$$\|a_{ij}\|_{\infty,1,Q_T} + \|a_i\|_{\infty,1,Q_T} + \|b_i\|_{\infty,1,Q_T} + \|c\|_{\infty,1,Q_T} +$$
$$+ \|a_{ijt}\|_{\infty,Q_T} + \|a_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|b_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|c_t\|_{\infty,Q_T} \le \nu_3;$$

в) при всех $z \in R$ функция $a(\cdot,\cdot,z)$ измерима по Лебегу и $a(\cdot,\cdot,0) \in L_{2,1}(Q_T)$; существует функция $k \in L_1[0,T]$, такая, что

$$|a(x,t,z_1) - a(x,t,z_2)| \le k(t)|z_1 - z_2|$$
$$\forall (x,t,z_i) \in Q_T \times R, \quad i = 1,\ 2.$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения.

Через $L_p(\Pi)$, где $\Pi \subset R^m$, обозначено банахово пространство суммируемых с p-й степенью (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций $\xi : \Pi \to R$, с нормой

$$\|\xi\|_{p,\Pi} \equiv \left(\int_\Pi |\xi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|\xi\|_{\infty,\Pi} \equiv \operatorname*{vraisup}_{x\in\Pi} |\xi(x)|, \qquad p = \infty.$$

Под $H^1(\Pi)$, где $\Pi \subset R^m$ — ограниченная область, понимается банахово пространство функций $\xi \in L_2(\Pi)$, все первые обобщённые производные которых суммируемы с квадратом. Норма в $H^1(\Pi)$ определяется формулой

$$\|\xi\|_{2,\Pi}^{(1)} \equiv \left(\int_\Pi [|\xi(x)|^2 + |\nabla\xi(x)|^2] dx \right)^{1/2}.$$

Через $L_{2,1}(Q_T)$ обозначено банахово пространство измеримых по Лебегу на Q_T функций ξ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{2,1,Q_T} \equiv \int_0^T \left(\int_\Omega |\xi(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} dt,$$

а через $L_{\infty,1}(Q_T)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу на Q_T функций ξ с конечной нормой

$$\|\xi\|_{\infty,1,Q_T} \equiv \int_0^T \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\Omega} |\xi(x,t)| dt.$$

Пусть $W^{0,1}_{\infty,1}(Q_T)$ — банахово пространство измеримых по Лебегу функций $\xi \in L_{\infty,1}(Q_T)$, у которых $\xi_t \in L_{\infty,1}(Q_T)$. Норма в $W^{0,1}_{\infty,1}(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(0,1)}_{\infty,1,Q_T} \equiv \|\xi\|_{\infty,1,Q_T} + \|\xi_t\|_{\infty,1,Q_T}.$$

Под $H^1_0(\Omega)$ понимается замыкание в норме $H^1(\Omega)$ пространства бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Норма в пространстве $H^1_0(\Omega)$ определяется так:

$$\|\xi\|^{(1)}_{2,\Omega} \equiv \left(\int_\Omega [|\xi(x)|^2 + |\nabla\xi(x)|^2] dx \right)^{1/2}.$$

Через $W^1_{2,0}(Q_T)$ обозначено замыкание в норме $H^1(Q_T)$ множества бесконечно дифференцируемых в Q_T финитных вблизи S_T функций. Норма в $W^1_{2,0}(Q_T)$ задаётся равенством

$$\|\xi\|^{(1)}_{2,Q_T} \equiv \left(\int_{Q_T} [|\xi|^2 + |\nabla\xi|^2 + |\xi_t|^2] dxdt \right)^{1/2}.$$

Через $H^{-1}_0(\Omega)$ обозначено пространство, сопряжённое к $H^1_0(\Omega)$.

Через $L_p([0,T],X)$, где X — сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а $1 \le$ $\le p \le \infty$, обозначено банахово пространство слабо измеримых на $[0,T]$ функций $\xi:[0,T] \to X$, для которых функция $t\in[0,T] \mapsto \|\xi(t)\|_X$ является элементом банахова пространства $L_p[0,T]$. Норма в $L_p([0,T],X)$ задаётся следующим образом:

$$\|\xi\|_{p,[0,T],X} \equiv \left(\int_0^T \|\xi(t)\|^p_X dt \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|\xi\|_{\infty,[0,T],X} \equiv \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} \|\xi(t)\|, \quad p = \infty.$$

Следуя [7], через $C_s([0,T],X)$, где X — банахово пространство, обозначим пространство функций $\xi:[0,T] \to X$, слабо непрерывных на $[0,T]$, т.е. таких, что при всех $x^* \in X^*$ и всех $\tau \in [0,T]$

$$\lim_{t\to\tau} \langle \xi(t), x^* \rangle = \langle \xi(\tau), x^* \rangle,$$

где X^* обозначает сопряжённое к X пространство, а $\langle x, x^* \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $x^* \in X^*$ в точке $x \in X$.

Через $C([0,T],X)$, где X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, обозначено банахово пространство функций $\xi:[0,T] \to X$, сильно непрерывных на $[0,T]$, т.е. таких, что при любом $\tau \in [0,T]$ имеет место равенство

$$\lim_{t\to\tau} \|\xi(t) - \xi(\tau)\|_X = 0.$$

Норма в $C([0,T],X)$ задаётся формулой

$$|\xi|^{(0)}_{[0,T],X} \equiv \max_{t\in[0,T]} \|\xi(t)\|_X.$$

Наконец, обозначим через $V^{1,1}_{2,0}(Q_T)$ «энергетический класс», состоящий из измеримых по Лебегу на Q_T функций ξ, удовлетворяющих следующим условиям: при всех $t\in[0,T]$ справедливы включения $\xi(\cdot,t) \in H^1_0(\Omega)$, $\xi_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$; функция $t\in[0,T] \mapsto \xi(\cdot,t) \in H^1_0(\Omega)$ — элемент класса $C_s([0,T],H^1_0(\Omega))$; функция $t\in[0,T] \mapsto$ $\mapsto \xi_t(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$ — элемент пространства $L_\infty([0,T],L_2(\Omega))$. Норма в пространстве $V^{1,1}_2(Q_T)$ задаётся равенством

$$|\xi|_{Q_T} \equiv \sup_{t\in[0,T]} \|\xi(\cdot,t)\|^{(1)}_{2,\Omega} + \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} \|\xi_t(\cdot,t)\|_{2,\Omega}.$$

Наделённое этой нормой $V^{1,1}_{2,0}(Q_T)$ представляет собой банахово пространство.

Дадим следующее

Определение 1. Функцию z назовём решением задачи (1) из энергетического класса, если z является элементом данного класса и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} [-z_t\eta_t + a_{ij} z_{x_j} \eta_{x_i} + a_i z \eta_{x_i} + b_i z_{x_i} \eta +$$

$$+ c z_t \eta + a(x,t,z(x,t))\eta] dxdt = \int_\Omega \psi(x)\eta(x,0) dx \quad (2)$$

$$\forall \eta \in \hat{V}^{1,1}_{2,0}(Q_T); \quad z(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

Здесь

$$\hat{V}^{1,1}_{2,0}(Q_T) \equiv \{\eta \in V^{1,1}_{2,0}(Q_T) : \eta(\cdot,T) = 0\}.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. Задача (1) имеет единственное решение из энергетического класса, причём найдётся константа $B > 0$, определяемая лишь числами T, ν_1, ν_2, ν_3 >0, функцией $k \in L_1[0,T]$, размерностью n и областью Ω, такая, что

$$\left|z\right|_{Q_T} \le B[\|\varphi\|^{(1)}_{2,\Omega} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}]. \quad (3)$$

Для доказательства данной теоремы нам потребуется ряд вспомогательных результатов, и прежде всего, следующая лемма, вытекающая из теоремы 2 работы [8].

Лемма 1. У любой функции $f \in W^{0,1}_{\infty,1}(Q_T)$ при каждом $t \in [0,T]$ имеется след $f(\cdot,t) \in \in L_\infty(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$, причём найдётся константа $A_1 = A_1(T) > 0$, зависящая лишь от $T > 0$, такая, что

$$\max_{t\in[0,T]} \|f(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \le A_1 \|f\|^{(0,1)}_{\infty,1,Q_T}.$$

Отметим, что из очевидной непрерывности вложения $V^{1,1}_{2,0}(Q_T) \subset W^1_{2,0}(Q_T)$, теорем 6.3 и 7.2 из главы 1 монографии [9] и теорем вложения для функций одной переменной вытекает

Лемма 2. Пусть $z \in V^{1,1}_{2,0}(Q_T)$. Тогда при каждом $t \in [0,T]$ существует след $z(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$, непрерывно зависящий от $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega)$, причём

$$\max_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega} \le \left|z\right|_{Q_T}.$$

Кроме того, вложение $V^{1,1}_{2,0}(Q_T) \subset C([0,T], L_2(\Omega))$ компактно.

Покажем, что справедлива

Лемма 3. При всех $t \in [0,T]$ существуют следы $a_{ij}(\cdot,t)$, $a_i(\cdot,t)$, $b_i(\cdot,t)$ $c(\cdot,t) \in L_\infty(\Omega)$, непрерывно зависящие от $t \in [0,T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$. При этом найдётся постоянная $A_2 > 0$, зависящая лишь от чисел ν_3, $T > 0$, такая, что

$$\max_{t\in[0,T]}[\|a_{ij}(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|a_i(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|b_i(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|c(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega}] + \|a_{ijt}\|_{\infty,Q_T} + \|a_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|b_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|c_t\|_{\infty,Q_T} \le A_2,\ i,j = 1,\dots,n. \quad (4)$$

Доказательство леммы 3. Утверждения о существовании следов функций a_{ij}, a_i, b_i, c являются следствиями вытекающих из условий на эти функции включений a_{ij}, a_i, b_i, $c \in \in W^{0,1}_{\infty,1}(Q_T)$ и леммы 1. Поэтому докажем лишь оценку (4).

В самом деле, на основании леммы 1

$$\max_{t\in[0,T]}[\|a_{ij}(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|a_i(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|b_i(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|c(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega}] + \|a_{ijt}\|_{\infty,Q_T} + \|a_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|b_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|c_t\|_{\infty,Q_T} \le A_1 \int_0^T [\|a_{ij}(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|a_i(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|b_i(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|c(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|a_{ijt}(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|a_{it}(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|b_{it}(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} + \|c_t(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega}]dt + \|a_{ijt}\|_{\infty,Q_T} + \|a_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|b_{it}\|_{\infty,Q_T} + \|c_t\|_{\infty,Q_T} \le$$

$$\le A_1[\nu_3 + \nu_3 T] + \nu_3 = \nu_3[1 + A_1(T+1)].$$

Полагая $A_2 = \nu_3[1 + A_1(T+1)]$, получим оценку (4). Лемма 3 полностью доказана.

Кроме того, нам потребуется следующая лемма, вытекающая из леммы 8.1 на с. 307 монографии [7].

Лемма 4. Справедливо равенство

$$L_\infty([0,T], H^1_0(\Omega)) \cap C_s([0,T], L_2(\Omega)) = C_s([0,T], H^1_0(\Omega)).$$

Доказательство теоремы 1. Доказательство разобьём на три части. При этом в целом будем следовать схеме доказательства, предложенной в [9, гл. 4, § 3] для линейных гиперболических уравнений. Однако завершение доказательства существования решения и доказательство априорной оценки (3) проведём, используя как метод [9, гл. 4, § 3], так и метод [10, гл. I].

1) Докажем, что начально-краевая задача (1) может иметь не более одного решения. В самом деле, пусть z_1, $z_2 \in V^{1,1}_{2,0}(Q_T)$ — решения задачи (1), и пусть $w \equiv z_1 - z_2$. Тогда $w \in V^{1,1}_{2,0}(Q_T)$ и удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_T} [-w_t\eta_t + a_{ij} w_{x_j} \eta_{x_i} + a_i w \eta_{x_i} + b_i w_{x_i} \eta + c w_t \eta + [a(x,t,z_2+w) - a(x,t,z_2)]\eta] dxdt = 0 \quad (5)$$

$$\forall \eta \in \hat{V}^{1,1}_{2,0}(Q_T); \quad w(x,0) = 0,\ x \in \Omega.$$

Введём функции $\eta^\alpha : Q_T \to R$, $\beta_i : Q_T \to R$, $i = \overline{1,n}$ ($\alpha \in [0,T]$ — параметр), соотношениями

$$\eta^\alpha(x,t) = -\chi_{[0,\alpha]}(t) \int_t^\alpha w(x,\xi)d\xi,$$

$$\beta_i(x,t) = -\int_0^t w_{x_i}(x,\xi)d\xi,\ i = \overline{1,n},\ (x,t) \in Q_T,$$

где χ_E — характеристическая функция измеримого по Лебегу множества E.

Можно показать, что $\eta^\alpha \in \hat{V}^{1,1}_{2,0}(Q_T)$, $\eta^\alpha_{x_i t}$, $\eta^\alpha_{t x_i} \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$, $\eta^\alpha_{tt} \in L_\infty([0,\alpha], L_2(\Omega))$, причём

$$\eta^\alpha_t(x,t) \equiv \chi_{[0,\alpha]}(t) w(x,t),$$

$$\eta^\alpha_{x_i}(x,t) \equiv -\chi_{[0,\alpha]}(t) \int_t^\alpha w_{x_i}(x,\xi)d\xi,$$

$$\eta^\alpha_{tx_i}(x,t)=\eta^\alpha_{x_it}(x,t)=\chi_{[0,\alpha]}(t)w_{x_i}(x,t),$$
$$i=\overline{1,n},\ (x,t)\in Q_T;$$
$$\eta^\alpha_{tt}(x,t)\equiv w_t(x,t),\ (x,t)\in Q_\alpha,\ Q_\alpha\equiv\Omega\times(0,\alpha).$$

Полагая в (5) $\eta=\eta^\alpha$, получим

$$\int_0^\alpha dt\int_\Omega[-\eta^\alpha_{tt}\eta^\alpha_t+a_{ij}\eta^\alpha_{x_jt}\eta^\alpha_{x_i}+a_i\eta^\alpha_t\eta^\alpha_{x_i}+b_i\eta^\alpha_{x_it}\eta^\alpha+$$
$$+c\eta^\alpha_{tt}\eta^\alpha+[a(x,t,z_2+\eta^\alpha_t)-a(x,t,\eta^\alpha_t)]\eta^\alpha]dx=$$
$$=0\ \forall\alpha\in[0,T].$$

Интегрируя это соотношение по частям, выводим, что

$$\frac{1}{2}\int_\Omega[|\eta^\alpha_t(x,\alpha)|^2+a_{ij}(x,0)\eta^\alpha_{x_j}(x,0)\eta^\alpha_{x_i}(x,0)]dx+$$
$$+\int_\Omega b_i(x,0)\eta^\alpha(x,0)\eta^\alpha_{x_i}(x,0)dx+\int_0^\alpha dt\int_\Omega[\frac{1}{2}a_{ijt}\eta^\alpha_{x_j}\eta^\alpha_{x_i}+$$
$$+(b_i-a_i)\eta^\alpha_t\eta^\alpha_{x_i}+b_{it}\eta^\alpha\eta^\alpha_{x_i}+c_t\eta^\alpha\eta^\alpha_t+$$
$$+c\,|\eta^\alpha_t|^2-[a(x,t,z_2+\eta^\alpha_t)-a(x,t,\eta^\alpha_t)]\eta^\alpha]dx=0.$$

Используя липшицевость функции $a(x,t,z)$, $(x,t,z)\in Q_T\times R$, по переменной z, лемму 3, неравенство Коши–Буняковского и неравенство $ab\le\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, заключаем, что

$$\frac{1}{2}\int_\Omega[\left|\eta^\alpha_t(x,\alpha)\right|^2+\nu_1\left|\nabla\eta^\alpha(x,0)\right|^2]dx\le$$
$$\le\int_0^\alpha dt\int_\Omega[\frac{A_2\sqrt{n}(\sqrt{n}+3)}{2}\left|\nabla\eta^\alpha\right|^2+$$
$$+\frac{A_2(2\sqrt{n}+3)+k(t)}{2}[\left|\eta^\alpha\right|^2+\left|\eta^\alpha_t\right|^2]]dx+$$
$$+A_2\sqrt{n}\int_\Omega\left|\eta^\alpha(x,0)\right|\left|\nabla\eta^\alpha(x,0)\right|dx.$$

Применяя неравенство Коши с ε (см. [9, с. 33]) к интегралу $\int_\Omega\left|\eta^\alpha(x,0)\right|\left|\nabla\eta^\alpha(x,0)\right|dx$, будем иметь

$$\int_\Omega[\left|\eta^\alpha_t(x,\alpha)\right|^2+(\nu_1-\gamma_1\varepsilon)\left|\nabla\eta^\alpha(x,0)\right|^2]dx\le$$
$$\le\int_0^\alpha dt\int_\Omega[\gamma_2\left|\nabla\eta^\alpha\right|^2+\gamma_3(t,\varepsilon)[\left|\eta^\alpha\right|^2+\left|\eta^\alpha_t\right|^2]]dx,$$

где $\gamma_3(t,\varepsilon)\equiv k(t)+A_2(2\sqrt{n}+3+T\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon})$, $\gamma_1\equiv A_2\sqrt{n}$, $\gamma_2\equiv A_2\sqrt{n}(\sqrt{n}+3)$.

Полагая в данном неравенстве $\varepsilon\equiv\frac{\nu_1}{2\gamma_1}$, $\gamma_4(t)\equiv\gamma_3(t,\frac{\nu_1}{2\gamma_1})$, получаем, что

$$\int_\Omega[\left|w(x,\alpha)\right|^2+\frac{\nu_1}{2}\left|\nabla\eta^\alpha(x,0)\right|^2]dx\le$$
$$\le\int_0^\alpha dt\int_\Omega[\gamma_2\left|\nabla\eta^\alpha\right|^2+\gamma_4(t)[\left|\eta^\alpha\right|^2+\left|\eta^\alpha_t\right|^2]]dx$$
$$\forall\alpha\in[0,T].$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\int_\Omega[\left|w(x,\alpha)\right|^2+\frac{\nu_1}{2}\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,\alpha)\right|^2]dx\le$$
$$\le\int_0^\alpha dt\int_\Omega[\gamma_2\sum_{i=1}^n[\beta_i(x,\alpha)-\beta_i(x,0)]^2+$$
$$+\gamma_4(t)\left[\left|w(x,t)\right|^2+\left|\int_0^\alpha w(x,\xi)d\xi\right|^2\right]]dx\le$$
$$\le2\alpha\gamma_2\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,\alpha)\right|^2dx+\int_0^\alpha dt\int_\Omega\gamma_4(t)[\left|w(x,t)\right|^2+$$
$$+(\alpha-t)\int_t^\alpha|w(x,\xi)|^2\,d\xi]dx+$$
$$+2\gamma_2\int_0^\alpha dt\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,t)\right|^2dx\le$$
$$\le2\alpha\gamma_2\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,\alpha)\right|^2dx+\int_0^\alpha d\xi\int_\Omega[\gamma_4(\xi)+$$
$$+T\int_0^\alpha\gamma_4(t)dt]w^2(x,\xi)dx+$$
$$+2\gamma_2\int_0^\alpha dt\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,t)\right|^2dx\le$$
$$\le2\alpha\gamma_2\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,\alpha)\right|^2dx+$$
$$+\int_0^\alpha d\xi\int_\Omega[\gamma_4(\xi)+2\gamma_2+T\int_0^T\gamma_4(t)dt][w^2(x,t)+$$
$$+\sum_{i=1}^n\beta_i^2(x,\xi)]dx.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega[\left|w(x,\alpha)\right|^2+(\frac{\nu_1}{2}-2\alpha\gamma_2)\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,\alpha)\right|^2]dx\le$$
$$\le\int_0^\alpha dt\int_\Omega\gamma_5(t)[\left|w(x,t)\right|^2+\sum_{i=1}^n\left|\beta_i(x,t)\right|^2]dx, \tag{6}$$

где $\gamma_5(t)\equiv T\int_0^T\gamma_4(\xi)d\xi+\gamma_4(t)+2\gamma_2$.

Пусть $\omega_m=m\theta$, $m=\overline{0,\lambda}$, где $\theta=\frac{\nu_1}{8\gamma_2}$, $\lambda=\left\lceil\frac{T}{\theta}\right\rceil$.

Положим $J_m\equiv[\omega_m,\omega_{m+1}]\cap[0,T]$, $m=\overline{0,p-1}$.

Пусть в неравенстве (6) $\alpha \in J_0$. Тогда $\frac{\nu_1}{2} - 2\alpha\gamma_2 \ge \frac{\nu_1}{4}$, вследствие чего

$$\int_\Omega [|w(x,\alpha)|^2 + \sum_{i=1}^n |\beta_i(x,\alpha)|^2]dx \le$$

$$\le \int_0^\alpha dt \int_\Omega \gamma_6(t)[|w(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^n |\beta_i(x,t)|^2]dx,$$

где $\gamma_6(t) \equiv \gamma_5(t)/\min\{1, \frac{\nu_1}{4}\}$. Применяя теперь известную лемму Гроуолла (см., напр., [11]), получаем, что

$$w(x,t) \equiv 0, \quad \beta_i(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J_0.$$

Рассуждая подобным образом, за конечное число шагов получим, что

$$w(x,t) \equiv 0, \beta_i(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \Omega \times J_m$$

для всех $m = \overline{0, \lambda - 1}$.

Таким образом, разность любых двух решений начально-краевой задачи (1) равна нулю почти всюду в Q_T, в силу чего задача (1) может иметь не более одного решения.

2) Докажем существование решения начально-краевой задачи (1). Пусть $g_m \in H_0^1(\Omega)$, $m = 1,2,\ldots$, — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система функций, такая, что для всех $\overline{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$, $\overline{\psi} \in L_2(\Omega)$ справедливы равенства

$$\lim_{N\to\infty} \|\overline{\varphi}^N - \overline{\varphi}\|_{2,\Omega}^{(1)} = 0, \ \lim_{N\to\infty} \|\overline{\psi}^N - \overline{\psi}\|_{2,\Omega} = 0, \quad (7)$$

в которых

$$\overline{\varphi}^N(x) \equiv \sum_{m=1}^N \overline{\varphi}_m g_m(x), \ \ \overline{\psi}^N(x) \equiv \sum_{m=1}^N \overline{\psi}_m g_m(x),$$

$$\overline{\varphi}_m \equiv \int_\Omega \overline{\varphi}(y) g_m(y) dy, \ \ \overline{\psi}_m \equiv \int_\Omega \overline{\psi}(y) g_m(y) dy,$$

$$m, N = 1,2,\ldots .$$

Будем искать приближённое решение z^N задачи (1) в виде $z^N(x,t) \equiv \sum_{m=1}^N h_m^N(t) g_m(x)$, где набор функций $h_m^N \in W_1^2[0,T]$, $m = \overline{1,N}$, является решением задачи Коши

$$\ddot{h}_l^N + \sum_{m=1}^N [p_{lm}(t)\dot{h}_m^N + q_{lm}(t)h_m^N] +$$

$$+ r_l^N(t, h_1^N(t), \ldots, h_N^N(t)) = 0, \quad (8)$$

$$h_l^N(0) = \varphi_l, \ \dot{h}_l^N(0) = \psi_l, \ \ l = \overline{1,N},$$

в которой

$$p_{lm}(t) \equiv \int_\Omega c(x,t) g_l(x) g_m(x) dx,$$

$$q_{lm}(t) \equiv \int_\Omega [a_{ij}(x,t) g_{mx_j}(x) g_{lx_i}(x) +$$

$$+ a_i(x,t) g_m(x) g_{lx_i}(x) +$$

$$+ b_i(x,t) g_{mx_i}(x) g_l(x)]dx,$$

$$r_l^N(t, h_1, \ldots, h_N) \equiv$$

$$\equiv \int_\Omega a(x,t, \sum_{m=1}^N h_m g_m(x)) g_l(x) dx.$$

Такой набор, очевидно, существует и определяется единственным образом.

Умножив l-е уравнение (8) на $\dot{h}_l^N(t)$ при $l = \overline{1,N}$, сложив все полученные уравнения и проинтегрировав результат по $t \in [0,\tau]$, выводим, что

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [|z_t^N(x,\tau)|^2 + a_{ij}(x,\tau) z_{x_j}^N(x,\tau) z_{x_i}^N(x,\tau)]dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_\Omega [|\psi^N(x)|^2 + a_{ij}(x,0)\varphi_{x_j}^N(x)\varphi_{x_i}^N(x)]dx +$$

$$+ \int_\Omega a_i z^N z_{x_i}^N dx \,|_{t=0}^{t=\tau} - \int_0^\tau dt \int_\Omega [\frac{1}{2} a_{ijt} z_{x_j}^N z_{x_i}^N - c|z_t^N|^2 +$$

$$+ a_i z^N z_{x_i}^N + (a_i - b_i) z_t^N z_{x_i}^N - a(x,t,0) z_t^N]dx +$$

$$+ \int_0^\tau dt \int_\Omega [a(x,t,z^N) - a(x,t,0)] z_t^N dx = 0.$$

$$\forall \ \tau \in [0,T]$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [|z_t^N(x,\tau)|^2 + \nu_1 |\nabla z^N(x,\tau)|^2]dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_\Omega [|\psi^N(x)|^2 + \nu_2 |\nabla\varphi^N(x)|^2]dx -$$

$$- \int_\Omega a_i z^N z_{x_i}^N dx \,|_{t=0}^{t=\tau} - \int_0^\tau dt \int_\Omega [\frac{1}{2} a_{ijt} z_{x_j}^N z_{x_i}^N +$$

$$+ (a_i - b_i) z_t^N z_{x_i}^N - c|z_t^N|^2 +$$

$$+ |a(x,t,0)||z_t^N| + k(t)|z^N||z_t^N|]dx.$$

Оценивая сверху правую часть последнего неравенства с помощью неравенства Коши—Буняковского, неравенства Гёльдера с показателем p=2, леммы 3 и условий на исходные данные, заключаем, что

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [|z_t^N(x,\tau)|^2 + \nu_1 |\nabla z^N(x,\tau)|^2]dx \le$$

$$\le \rho_1 \int_\Omega [|\psi^N(x)|^2 + |\varphi^N(x)|^2 + |\nabla\varphi^N(x)|^2]dx +$$

$$+ A_2\sqrt{n}\int_\Omega |z^N(x,\tau)||\nabla z^N(x,\tau)|dx +$$

$$+ \int_0^\tau dt \int_\Omega \rho_2(t)[|z^N|^2 + |\nabla z^N|^2 + |z_t^N|^2]dx +$$

$$+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}\max_{t\in[0,\tau]}\left(\int_\Omega[|z^N(x,t)|^2+|z_t^N(x,t)|^2+\right.$$

$$\left.+|\nabla z^N(x,t)|^2]dx\right)^{1/2},$$

где $\rho_2(t)=\frac{1}{2}(A_2(\sqrt{n}+3)\sqrt{n}+k(t))$, $\rho_1\equiv\frac{1}{2}\max\{1,\ \nu_2+A_2\sqrt{n}\}$.

Применяя неравенство Коши с ε, выводим, что

$$\frac{1}{2}\int_\Omega[|z_t^N(x,\tau)|^2+(\nu_1-\rho_3\varepsilon)|\nabla z^N(x,\tau)|^2]dx\le$$

$$\le\rho_4(\varepsilon)\left[\int_\Omega[|\psi^N|^2+|\varphi^N|^2+|\nabla\varphi^N|^2]dx+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}\times\right.$$

$$\left.\times\max_{t\in[0,\tau]}\left[\int_\Omega[|z^N(x,t)|^2+|\nabla z^N(x,t)|^2+|z_t^N(x,t)|^2]dx\right]^{1/2}\right]+$$

$$+\int_0^\tau dt\int_\Omega\rho_5(t,\varepsilon)[|z^N|^2+|\nabla z^N|^2+|z_t^N|^2]dx,$$

где $\rho_3\equiv A_2\sqrt{n}$, $\rho_4(\varepsilon)=\max\{1,\ \rho_1+\frac{A_2}{2}\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}\}$, $\rho_5(t,\varepsilon)\equiv\rho_2(t)+\frac{A_2}{2}T\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}$.

Добавляя к обеим частям полученного неравенства слагаемое $\int_\Omega|z^N(x,\tau)|^2dx$ и полагая $\varepsilon\equiv\frac{\nu_1}{2\rho_3}$, будем иметь

$$\int_\Omega[|z^N(x,\tau)|^2+|\nabla z^N(x,\tau)|^2+|z_t^N(x,\tau)|^2]dx\le$$

$$\le\rho_6[\int_\Omega[|\varphi^N|^2+|\nabla\varphi^N|^2+|\psi^N|^2]dx+$$

$$+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}\max_{t\in[0,\tau]}(\int_\Omega[|z^N(x,t)|^2+|\nabla z^N(x,t)|^2+$$

$$+|z_t^N(x,t)|^2]dx)^{1/2}]+\int_0^\tau dt\int_\Omega\rho_7(t)[|z^N|^2+$$

$$+|\nabla z^N|^2+|z_t^N|^2]dx,$$

где $\rho_6=4\rho_4(\frac{\nu_1}{2\rho_3})/\min\{2,\nu_1\}$, $\rho_7(t)=4\rho_5(t,\frac{\nu_1}{2\rho_3})/\min\{2,\nu_1\}$.

Введя обозначение

$$y^N(t)=\int_\Omega[|z^N(x,t)|^2+$$

$$+|\nabla z^N(x,t)|^2+|z_t^N(x,t)|^2]dx,$$

можем записать

$$y^N(\tau)\le\rho_6[y^N(0)+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{y^N(t)}]+$$

$$+\int_0^\tau\rho_7(t)y^N(t)dt\quad\forall\tau\in[0,T].\tag{9}$$

Покажем, что из (9) следует

$$\max_{t\in[0,T]}\sqrt{y^N(t)}\le\rho_8[\sqrt{y^N(0)}+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}],\tag{10}$$

где $\rho_8\equiv\rho_6e^{\int_0^T\rho_7(t)dt}$.

Пусть $Y^N(\tau)=\max_{t\in[0,\tau]}\sqrt{y^N(t)}$, $\tau\in[0,T]$. Нетрудно видеть, что функция Y^N неотрицательна и монотонно не убывает на отрезке $[0,T]$ Используя данный факт, несложно показать, что множество Z^N нулей функции Y^N либо пусто, либо является отрезком вида $[0,\tau^*]$, где $\tau^*\in[0,T]$. Ясно, что если $\tau^*\in T$, то (10) заведомо имеет место.

Предположим, что Z^N пусто. Поделив обе части неравенства (9) на $Y^N(\tau)$ и воспользовавшись монотонностью функции Y^N, заключаем, что

$$\frac{y^N(\tau)}{Y^N(\tau)}\le\rho_6[\sqrt{y^N(0)}+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}]+$$

$$+\int_0^\tau\rho_7(t)\frac{y^N(t)}{Y^N(t)}dt\quad\forall\tau\in[0,T].$$

Применяя лемму Гронуолла, выводим, что

$$\frac{y^N(\tau)}{Y^N(\tau)}\le\rho_8[\sqrt{y^N(0)}+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}]\quad\forall\tau\in[0,T].$$

В частности, это означает, что

$$\frac{y^N(\tau)}{Y^N(\tau)}\le\rho_8[\sqrt{y^N(0)}+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}]$$

при почти всех $\tau\in[0,t]$ для всех $t\in(0,T]$.

В силу монотонного неубывания функции Y^N на отрезке $[0,T]$ это даёт соотношение

$$\frac{y^N(\tau)}{Y^N(t)}\le\rho_8[\sqrt{y^N(0)}+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}]$$

при почти всех $\tau\in[0,t]$ для всех $t\in(0,T]$. Отсюда и следует (10).

Отметим, что рассуждения в случае непустоты множества Z^N совершенно аналогичны, ввиду чего опускаются.

Заметим, что из (10) следует

$$|z^N|_{Q_T}\le2\rho_8[\|\varphi^N\|_{2,\Omega}^{(1)}+\|\psi^N\|_{2,\Omega}+\|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}].\tag{11}$$

Из соотношений (7) вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty}\|\varphi^N-\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}=0,\ \lim_{N\to\infty}\|\psi^N-\psi\|_{2,\Omega}=0,\tag{12}$$

вследствие чего

$$\lim_{N\to\infty}\left[\|\varphi^N\|_{2,\Omega}^{(1)}+\|\psi^N\|_{2,\Omega}\right]=\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)}+\|\psi\|_{2,\Omega}.\tag{13}$$

Поэтому найдётся константа $\rho_9 > 0$, такая, что

$$\left|z^N\right|_{Q_T} \le \rho_9 \quad \forall N = 1,2,\ldots. \tag{14}$$

Из (14) следует, что

$$\left\|z^N\right\|_{2,Q_T}^{(1)} \le \rho_9\sqrt{T} \quad \forall N = 1,2,\ldots.$$

Используя слабую компактность замкнутого шара в гильбертовом пространстве и компактность вложения $W_{2,0}^1(Q_T) \subset C([0,T], L_2(\Omega))$, получаем, что найдутся подпоследовательность последовательности z^N, $N = 1,2,\ldots$, которую мы обозначим так же, как и исходную последовательность, и функция $z \in W_{2,0}^1(Q_T)$, такие, что

$$\lim_{N\to\infty}\max_{t\in[0,T]}\left\|z^N(\cdot,t) - z(\cdot,t)\right\|_{2,\Omega} = 0,$$
$$z^N \to z,\ N \to \infty,\ \text{слабо в } W_{2,0}^1(Q_T). \tag{15}$$

Рассуждая далее по аналогии с тем, как это делалось в [7, с. 214–215] для линейных уравнений, заключаем, что функция z удовлетворяет интегральному тождеству (2).

Покажем, что $z \in V_{2,0}^{1,1}(Q_T)$.

Из (14) следует, что последовательность z^N, $N = 1,2,\ldots$, равномерно ограничена в норме пространства $L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega))$, а последовательность z_t^N, $N = 1,2,\ldots$, равномерно ограничена в $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$. На основании предложения 10 на с. 60 работы [12] пространство $L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega))$ изометрично изоморфно пространству $(L_1([0,T], H_0^{-1}(\Omega)))^*$, а пространство $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$ изометрично изоморфно пространству $(L_1([0,T], L_2(\Omega)))^*$. Поэтому найдутся подпоследовательность последовательности $N = 1,2,\ldots$, которую мы обозначим так же, как и исходную последовательность, и функции $\tilde{z}_0 \in L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega))$, $\tilde{z}_1 \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$, такие, что

$$z^N \to \tilde{z}_0,\ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega)),$$
$$z_t^N \to \tilde{z}_1,\ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], L_2(\Omega)),$$
$$N \to \infty.$$

Сравнивая полученные соотношения с соотношениями (15), заключаем, что

$$z^N \to z,\ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega)),$$
$$z_t^N \to z_t,\ *\text{–слабо в } L_\infty([0,T], L_2(\Omega)), \tag{16}$$
$$N \to \infty.$$

Из (16) следует, что $z \in L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega))$, $z_t \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$. Следовательно, $z, z_t \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$. Последнее означает, что $z \in C([0,T], L_2(\Omega))$. Таким образом, $z \in C_s([0,T], L_2(\Omega)) \cap \cap L_\infty([0,T], H_0^1(\Omega))$. Поэтому, на основании леммы 7, z — элемент пространства $C_s([0,T], H_0^1(\Omega))$.

Таким образом, существование решения задачи (1), принадлежащего энергетическому классу, доказано.

3) Докажем априорную оценку (3). В самом деле, на основании (13) для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N_0(\varepsilon) \ge 1$, такой, что при всех $N \ge \ge N_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\left\|\varphi^N\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi^N\right\|_{2,\Omega} \le \left\|\varphi\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi\right\|_{2,\Omega} + \varepsilon. \tag{17}$$

Далее, из (10) следует, что

$$\sup_{\xi\in[0,T]}\left\|z^N(\cdot,\xi)\right\|_{2,\Omega}^{(1)} \le \rho_8\Big[\left\|\varphi^N\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi^N\right\|_{2,\Omega} + \left\|a(\cdot,\cdot,0)\right\|_{2,1,Q_T}\Big], \tag{18}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|z_t^N(\cdot,t)\right\|_{2,\Omega} \le \rho_8\Big[\left\|\varphi^N\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi^N\right\|_{2,\Omega} + \left\|a(\cdot,\cdot,0)\right\|_{2,1,Q_T}\Big]. \tag{19}$$

Ограничившись в (19) номерами $N \ge N_0(\varepsilon)$, ввиду (17) будем иметь

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|z_t^N(\cdot,t)\right\|_{2,\Omega} \le \rho_8\Big[\left\|\varphi\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi\right\|_{2,\Omega} + \left\|a(\cdot,\cdot,0)\right\|_{2,1,Q_T} + \varepsilon\Big].$$

Из данного неравенства, второго из соотношений (16), *–слабой компактности замкнутого шара в пространстве, сопряжённом к сепарабельному банахову пространству, и упомянутого выше изометрического изоморфизма пространств $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$ и $(L_1([0,T], L_2(\Omega)))^*$ выводим, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|z_t(\cdot,t)\right\|_{2,\Omega} \le \rho_8\Big[\left\|\varphi\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi\right\|_{2,\Omega} + \left\|a(\cdot,\cdot,0)\right\|_{2,1,Q_T} + \varepsilon\Big].$$

Устремляя затем ε к нулю, заключаем, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]}\left\|z_t(\cdot,t)\right\|_{2,\Omega} \le \rho_8\Big[\left\|\varphi\right\|_{2,\Omega}^{(1)} + \left\|\psi\right\|_{2,\Omega} + \left\|a(\cdot,\cdot,0)\right\|_{2,1,Q_T}\Big]. \tag{20}$$

Выберем произвольно $t \in [0,T]$ и зафиксируем. Из (14) следует, что последовательность $z^N(\cdot,t)$, $N = 1,2,\ldots$, равномерно ограничена в норме $H_0^1(\Omega)$. Поэтому найдутся подпоследовательность последовательности $z^N(\cdot,t)$, $N = =1,2,\ldots$, которую мы обозначим так же, как и исходную последовательность, и функция $z^{(t)}(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$, такие, что

$$z^N(\cdot,t) \to z^{(t)}(\cdot),\ \text{слабо в } H_0^1(\Omega),\ N \to \infty. \tag{21}$$

Из (15) и (21) следует, что $z^{(t)}(\cdot) = z(\cdot,t)$, т.е.

$$z^N(\cdot,t) \to z(\cdot,t),\ \text{слабо в } H_0^1(\Omega),\ N \to \infty.$$

Ограничившись в (18) номерами $N \ge N_0(\varepsilon)$, на основании (17) заключаем, что

$$\|z^N(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{(1)} \le \rho_8[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \\ + \|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T} + \varepsilon].$$

Пользуясь слабой компактностью замкнутого шара в гильбертовом пространстве, из последнего неравенства выводим, что

$$\|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{(1)} \le \rho_8[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \\ + \|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T} + \varepsilon].$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что

$$\|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{(1)} \le \rho_8[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \\ + \|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}].$$

Поскольку $t \in [0,T]$ было выбрано произвольно, то

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega}^{(1)} \le \rho_8[\|\varphi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega} + \\ + \|a(\cdot,\cdot,0)\|_{2,1,Q_T}].$$

Данное неравенство совместно с неравенством (20) даёт оценку (3) с $B = 2\rho_8$. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. White L.W. Control of hyperbolic problem with pointwise stress constraints // JOTA. 1983. V. 41. No. 2. P. 359–369.

2. White L.W. Distributed control of a hyperbolic system with control and stress constraints // J. Math. Anal. and Appl. 1985. V. 106. No. 1. P. 41–53.

3. Li X., Yong J. Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

4. Mordukhovich B.S., Raymond J.-P. Dirichlet boundary control of hyperbolic equations in the presence of state constraints // Appl. Math. Optim. 2004. V. 49. P. 145–157.

5. Mordukhovich B.S., Raymond J.-P. Neumann boundary control of hyperbolic equations with pointwise state constraints // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 43. No. 4. P. 135–137.

6. Гаврилов В.С., Сумин М.И. Принцип максимума Понтрягина в параметрической задаче субоптимального управления для дивергентного гиперболического уравнения с фазовым ограничением // В кн.: «Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. Тезисы докладов. Москва, 17–22 июня 2008 г.», М.: Издательский отдел факультета ВмиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. С. 329–330.

7. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

8. Гаврилов В.С. О теоремах вложения для некоторых классов функций // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 2. С. 134–138.

9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

11 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

12. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свёртка и представления. М.: Наука, 1970.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF A SOLUTION TO A HOMOGENEOUS DIRICHLET INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SEMILINEAR HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN DIVERGENCE FORM

V.S. Gavrilov

Existence and uniqueness of an energetic solution to a homogeneous first initial-boundary value problem is proved for a semilinear hyperbolic partial differential equation in divergence form.

Keywords: partial differential equations, initial-boundary value problems.