УДК 517.53

ОБ ОДНОМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ АНАЛОГЕ ЗАДАЧИ ЛИДСТОНА, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ПАРАМЕТРА

В.Л. Андрианов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vandriannn@mail.ru

Поступила в редакцию 08.07.2011

Устанавливается класс единственности одного конечно-разностного аналога симметричной задачи Лидстона для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: интерполяционная задача, класс единственности, преобразование Бореля.

В теории интерполяции аналитических функций хорошо известна задача Лидстона о восстановлении (если это возможно) целой функции экспоненциального типа по условиям

$$\begin{cases} F^{(2n)}(0) = a_n, \\ F^{(2n)}(1) = b_n,\ n = 0,1,2,\ldots (\text{в дальнейшем } n \in N_0). \end{cases} \quad (1)$$

Её исследованию посвящено большое число публикаций (см., например, [1–8]). Рассматривались также её различные модификации и обобщения (например, [7, 8]). В работе [9] следующая модификация этой задачи, зависящей от вещественного параметра h,

$$\begin{cases} F^{(2n)}(0) = a_n, \\ F^{(2n)}(1 \pm 2hn) = b_{\pm n}, \qquad n \in N_0, \end{cases} \quad (2)$$

оказалась всюду неустойчивой в $\mathbb{R} \ni h$ относительно параметра h, что показывает принципиальное отличие решений задач интерполяции, например, от свойств решения дифференциального уравнения, зависящего аналитически от параметра. А именно, справедлив следующий результат.

Пусть $E \overset{def}{=} \bigcup\limits_{k \in Z} I_k$, где $I_k = (-\frac{\pi}{2}i + \pi k i; \frac{\pi}{2}i + + \pi k i)$; задачу (2) решаем в классе целых функций экспоненциального типа $\left[1; \frac{E}{h}\right)$, $h > 0$ (заметим, что при $h = 0$ равенства (2) переходят в (1)).

Утверждение.

1. Множество функций $\left[1; \frac{E}{h}\right)$ является классом единственности задачи (2) при любом иррациональном $h > 0$.

2. Множество функций $\left[1; \frac{E}{h}\right)$ ни для одного рационального $h > 0$ не является классом единственности задачи (2).

Из 1–2 следует, что задача (2) неустойчива на шкале классов $\left[1; \frac{E}{h}\right)$ при любом иррациональном $h > 0$.

Доказано также, что при рациональном $h = \frac{p}{q}$ общее решение однородной задачи (2) в классе $\left[1; \frac{E}{h}\right)$ есть тригонометрический полином вида

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} C_k \sin \pi q k z, \quad (3)$$

где C_k – произвольные постоянные, а при h иррациональном функция вида (3) не удовлетворяет, естественно, однородным условиям (2). Интересно, что для задачи

$$\begin{cases} F^{(2n+1)}(0) = a_n, \\ F^{(2n)}(1 \pm 2hn) = b_{\pm n}, \qquad n \in N_0, \end{cases}$$

весьма родственной задаче (2), множество $\left[1; \frac{E}{h}\right)$ является классом единственности при любом $h > 0$, и, таким образом, задача (2) устойчива на шкале $\left[1; \frac{E}{h}\right)$ $\forall\ h > 0$.

Доказательство приведенных выше предложений базируется на конструктивном решении задачи (2).

Приведем некоторые необходимые сведения из теории целых функций. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и она разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на две области $D^{\pm}$, $D^{+} \cup \Gamma \cup D^{-} = \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in D^{-}$. Через $A(D^{+})$ обозначают пространство функций, аналитических в D^{+} с топологией, определяемой равномерной сходимостью внутри D^{+}. Символ $A^{*}(D^{+})$ обозначает пространство функций, таких что каждая функция $\gamma \in A^*(D^+)$ голоморфна в некоторой окрестности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus D^+$ и обращается в ноль на бесконечности. Известно, что $A(D^+)$ и $A^*(D^+)$ – взаимно сопряженные пространства, и линейный непрерывный функционал в каждом из них задается билинейной формой

$$\langle f;\gamma\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)\gamma(z)\,dz\,,$$

где $f \in A(D^+)$, $\gamma \in A^*(D^+)$ и контур Γ – некоторая замкнутая жорданова кривая в D^+.

Система элементов $\{f_n\}$, $n \in N_0$, $f_n \in A(D)$, полна в $A(D)$, если замыкание ее линейной оболочки по топологии $A(D)$ совпадает с $A(D)$. Необходимым и достаточным условием полноты последовательности $\{f_n\}$ в $A(D)$ является единственность решения в $A^*(D)$ следующей бесконечной системы уравнений:

$$\langle f_n;\gamma\rangle = 0,\ \ n \in N_0\,.$$

Любая целая функция экспоненциального типа $F(z)$ порядка $\rho \le 1$ и конечного экспоненциального типа представима в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\sigma+\varepsilon} e^{zt}\gamma(t)\,dt \quad \forall\varepsilon > 0\,,$$

где функция $\gamma(t) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{t^{k+1}}$ (ассоциированная по Борелю) голоморфна в области $|t| > \sigma$, $\gamma(\infty) = 0$. Символом $[1;M)$, где $M \subset \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ связно, обозначают класс всевозможных целых функций экспоненциального типа, у которых ассоциированная по Борелю функция $\gamma(t)$ является регулярной на множестве $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$. В частности, класс $M = \{z \in \mathbb{C} : |t| < \sigma\}$ совпадает с $[1;\sigma)$ (класс целых функций экспоненциального типа, меньшего σ).

В данной работе рассматривается конечно-разностный аналог задачи Лидстона, зависящей от параметра h, $h > 0$,

$$\Delta_h^{2n} F(\pm 1) = a_{\pm n},\ \ n \in N_0\,, \qquad (4)$$

где $\Delta_h F(z) = F(z+h) - F(z)$, $\Delta_h^n F(z) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1}F(z))$. Отметим, что ряд интересных задач об интерполировании конечными разностями содержится в [10], занимались ими также такие математики, как Boas R.P., Whittaker J., Казьмин Ю.А. Основной результат работы содержится в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Класс функций* $[1;\ I_h)$ *есть класс единственности задачи* (4)*, где* I_h *– горизонтальная полоса,* $I_h = \left\{t \in \mathbb{C}_t : |\operatorname{Im} t| < \frac{\pi}{h}\right\}$.

Для доказательства теоремы однородные условия (4) переписываем в равносильном виде:

$$\Delta_h^{2n} F(\pm 1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\gamma(t)e^{\pm t}\left(e^{ht}-1\right)^{2n}dt = 0,\ \ n \in N_0\,, \qquad (5)$$

где контур Γ лежит в полосе I_h и содержит внутри сопряженную диаграмму k_F предполагаемого решения $F(z)$.

Выполняя в интегралах замену $w = e^{ht} - 1$, получаем равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w}\gamma\left(\frac{1}{h}\ln(w+1)\right)\frac{w^{2n}}{(w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}}\,dw = 0,\ \ n \in N_0$$

(главные ветви логарифма и функции $(w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}$), где интегрирование ведется по контуру $\Gamma_w = w(\Gamma)$, содержащему внутри образ $w(k_F)$ сопряженной диаграммы k_F. Далее, представим в виде скачка [11] функцию

$$\frac{1}{(w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}}\gamma\left(\frac{1}{h}\ln(w+1)\right) = \Phi_{\pm}^{+}(w) - \Phi_{\pm}^{-}(w),\ w \in \Gamma_w,\ \ (6)$$

где $\Phi_{\pm}^{+}(w)$ регулярны внутри Γ_w и $\Phi_{\pm}^{-}(w)$ – вне Γ_w, $\Phi_{\pm}^{-}(\infty) = 0$, что возможно единственным образом на основании формул Сохоцкого. С учетом интегральной теоремы Коши получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} w^{2n}\Phi_{\pm}^{-}(w)\,dw = 0,\ \ n \in N_0\,.$$

Из этих условий вытекает четность функции $\Phi_{\pm}^{-}(w)$ при ее разложении в $w = \infty$ и, следовательно, симметричность относительно начала множества k_w. Тогда контур Γ_w также можно считать симметричным относительно начала. Еще раз используем представление вида (6), но уже для функции $\gamma\left(\frac{1}{h}\ln(w+1)\right)$:

$$\gamma\left(\frac{1}{h}\ln(w+1)\right) = \psi^{+}(w) - \psi^{-}(w),\ \ w \in \Gamma_w\,, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w}\psi^{-}(w)\frac{w^{2n}}{(w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}}\,dw = 0,\ \ n \in N_0\,, \qquad (8)$$

в которых, с учетом симметрии контура Γ_w, делаем замену $w \sim -w$. Комбинируя вновь полученные условия с прежними (5), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w}\left(\psi^{-}(w)\frac{1}{(w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}} - \psi^{-}(-w)\frac{1}{(-w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}}\right)\times \qquad (9)$$
$$\times w^{2n}dw = 0$$

(отметим, что контур Γ_w не пересекает луч $[1;+\infty)$).

Подынтегральная функция из (9) (в скобках) нечетная, при разложении ее на составляющие $\widetilde{\Phi}_{\pm}(w)$ вида (6) эти составляющие с учетом симметрии контура Γ_w также будут нечетные. Но выполнение условий (9) означает также четность величин $\widetilde{\Phi}_{-}(w)$, что возможно лишь при условии $\widetilde{\Phi}_{-}(w) \equiv 0$. В итоге получаем уравнения на контуре Γ_w для искомой $\psi^{-}(w)$:

$$\begin{cases} \psi^{-}(w)\dfrac{1}{(w+1)^{+\frac{1}{h}+1}} - \psi^{-}(-w)\dfrac{1}{(-w+1)^{+\frac{1}{h}+1}} = \widetilde{\Phi}_1(w), \\ \psi^{-}(w)\dfrac{1}{(w+1)^{-\frac{1}{h}+1}} - \psi^{-}(-w)\dfrac{1}{(-w+1)^{-\frac{1}{h}+1}} = \widetilde{\Phi}_2(w), \end{cases} \tag{10}$$

$w \in \Gamma_w$, которые можно рассматривать как некую модификацию краевой задачи Римана с коэффициентами $\dfrac{1}{(w+1)^{\pm\frac{1}{h}+1}}$. Из системы (10) находим $\psi^{-}(w)$:

$$\Delta(w)\psi^{-}(w) = \Delta_1(w), \quad w \in \Gamma_w. \tag{11}$$

Функция $\Delta_1(w)$ регулярна внутри Γ_w, а Δw имеет вид

$$\Delta(w) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(w+1)^{\frac{1}{h}+1}} & \dfrac{1}{(1-w)^{\frac{1}{h}+1}} \\ \dfrac{1}{(w+1)^{1-\frac{1}{h}}} & \dfrac{1}{(1-w)^{1-\frac{1}{h}}} \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta(w)$ легко вычисляется:

$$\Delta(w) = \frac{1}{(1-w)^2}\left[\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^{\frac{1}{h}} - \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{1}{h}}\right].$$

Эта функция внутри Γ_w обращается в ноль лишь при $w = 0$ (простой ноль), индекс по контуру Γ_w æ = 1. Тогда решение задачи (7) $\psi^{-}(w)$ имеет вид $\psi^{-}(w) = \dfrac{c}{w}$, где c произвольно.

Теперь можем восстановить функцию $\gamma(t)$, подставляя найденное $\psi^{-}(w)$ в (7) и возвращаясь в плоскость $\mathbb{C}_t$:

$$\gamma(t) = -\frac{c}{e^{ht}-1} + \psi^{+}(e^{ht}-1), \quad t \in \Gamma. \tag{12}$$

Единственно возможной особой точкой правой части в полосе I_h может быть $t = 0$ (полюс 1-го порядка). Применяя к формуле (12) интегральную теорему Коши

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t_1|<\varepsilon} \frac{\gamma(t_1)}{t_1 - t}dt_1,$$

где окружность проходится по часовой стрелке, t лежит вне окружности, получаем

$$\gamma(t) = -\int_{|t_1|<\varepsilon} c\frac{dt_1}{(e^{ht_1}-1)(t_1-t)} = \operatorname*{res}_{t_1=0}\frac{c}{(e^{ht_1}-1)(t_1-t)} = \frac{c_1}{t}.$$

Но тогда $F(z) \equiv \text{const}$ и, с учетом условий (4) при $n = 0$, окончательно $F(z) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Из доказательства вытекает, что если в условиях (4) заменить N_0 на N, то общее решение будет $F(z) \equiv \text{const}$, и класс $[1;I_h)$ не будет классом единственности.

Замечание. Рассматриваемая задача (аналог задачи (2)) также обладает свойством неустойчивости общего вида решения и класса единственности, как показывает следующий простейший пример: при $h = \dfrac{p}{q}\pi$ функция $\sin\dfrac{q}{p}z$, очевидно, не удовлетворяет условиям (4) при $p \geq q$.

Следствие 2. Система функций $\left\{e^{\pm t}(e^{ht}-1)^{2n}\right\}$, $n \in N_0$, полна в полосе $[1;I_h)$.

Список литературы

1. Lidstone G.J. Proc. Edinburg Math. Soc. 1922. V. 10. P. 26.
2. Lidstone G.J. Proc. Edinburg Math. Soc. 1930. V. 2. P. 16.
3. Schoenberg I.J. On certain two-point expansions of integral functions of exponential type. Bull. Amer. Math. Soc. 1936. V. 42. P. 284–288.
4. Whittaker J.H. On Lindstone's series and two-point expansions of integral functions. Proc. Lond. Math. Soc. 1933. V. 36. Part 6. P. 451–469.
5. Boas R.P. Representation of functions by Lindstone series. Duke Math. Journal. 1943. V. 10. P. 239–245.
6. Boas R.P. Entire functions. New York, 1954.
7. Казьмин Ю.А. К задаче о двух точках в теории аналитических функций // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6. № 4. С. 938–943.
8. Казьмин Ю.А. Задача Линдстона и некоторые ее обобщения // Вестник МГУ. 1966. № 6. С. 40–51.
9. Андрианов В.Л. К вопросу об устойчивости классов единственности интерполяционных задач // Analysis Mathematica. 1981. V. 7. P. 1951–1960.
10. Гельфанд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Гостехиздат, 1951.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

ON A LIDSTONE PROBLEM FINITE-DIFFERENCE ANALOGUE DEPENDING ON A PARAMETER

V.L. Andrianov

A uniqueness class is established for a Lidstone symmetric problem finite-difference analogue for entire functions of exponential type.

Keywords: interpolation problem, uniqueness class, Borel transform.