УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР

С.Н. Алексеенко [1,2], **С.Н. Нагорных** [2], **Е.А. Елькина** [1]

[1] Нижегородский технический университет им. Р.Е. Алексеева
[2] Нижегородский государственный педагогический университет

sn-alekseenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2011

На основе диффузионной дислокационной модели из уравнения второго порядка плотности дислокаций выведено нелинейное уравнение в частных производных первого порядка, названное уравнением стационарных диссипативных структур. Определены условия, обеспечивающие существование гладкого нелокального решения этого уравнения в круговом кольце, ширина которого определяется внутренними характеристиками задачи.

Ключевые слова: плотность дислокаций, стационарные диссипативные структуры, нелинейное уравнение в частных производных первого порядка, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки.

Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для описания скалярной плотности дислокаций выведено в рамках общей теории динамики дислокаций при изучении диссипативных структур [1, 2]. Также уравнение скалярной плотности дислокаций может быть получено из уравнения второго порядка плотности дислокаций на основе диффузионной дислокационной модели [3, 4] с учётом крутильной жесткости упругих тонких стержней. Реализуем здесь этот подход. Пусть имеется стержень длины l радиуса R.

Диффузионная модель кинетики плотности скалярных скользящих ν_δ и переползающих ν дислокаций имеет вид [3]:

$$\nu_\delta = G - a_\delta \nu_\delta - b\nu_\delta \nu, \qquad (1)$$

$$\dot{\nu} = b\nu_\delta \nu - a_M(\nu)\nu + S\operatorname{div}[(\nu_k - \nu)\nabla\nu], \qquad (2)$$

где ν_k, G, a_δ, b, S – постоянные величины, $a_M(\nu)$ – сток переползающих дислокаций, ∇ – трёхмерный градиент. Через ν_δ, ν определяются деформация, напряжение материала, а также в точке переключения $\nu_\delta = a_M b^{-1}$ около однородного решения определяется зарождение продольных и поперечных трещин, как неустойчивый рост ν до критического значения ν_k при равенстве нулю потоков на внешней поверхности стержня.

Как один из возможных вариантов решения системы (1), (2) рассмотрим расщепление решения в стационарном случае вида

$$\nu(x,y,z) = \tilde{\nu}(x,y) + \bar{\nu}(z), \qquad (3)$$

где $\bar{\nu}(z)$ – плотность дислокаций вдоль оси образца, $\tilde{\nu}(x,y)$ – плотность дислокаций в поперечном сечении.

Исключив в (2) ν_δ и подставив (3), получим

$$S(\nu_k - (\tilde{\nu}+\bar{\nu}))\Delta(\tilde{\nu}+\bar{\nu}) - S(\nabla(\tilde{\nu}+\bar{\nu}))^2 + f_1(\tilde{\nu}+\bar{\nu})(\tilde{\nu}+\bar{\nu}) = 0. \qquad (4)$$

Вид функции f_1 содержится в работах [4, 2]. Здесь мы его не приводим, т.к. ниже выписаны все используемые функции в окончательном виде.

Неупругое кручение стержня происходит при ν, близких к ν_k. Квазилинейная стимулированная диффузия, выражаемая в (4) лапласианом, зануляется по двум причинам: равенство нулю коэффициента диффузии и лапласиана. Чтобы раздельно оценить роль того и другого явления, допустим, что $\nu \approx \nu_k$. Когда плотность дислокаций имеет критическое значение, материал стержня течет подобно жидкости или разрушается при зарождении продольных или поперечных по отношению к оси стержня трещин [3]. Этим объясняется особый интерес к изучению решения уравнения (4) при ν, достаточно близких к ν_k.

Подставив $\tilde{\nu}(x,y) + \bar{\nu}(z) \approx \nu_k$ в (4), придём к нелинейному дифференциальному уравнению плотности дислокаций первого порядка

$$S(\nabla(\tilde{\nu}+\bar{\nu}))^2 = f_1(\tilde{\nu}+\bar{\nu})(\tilde{\nu}+\bar{\nu}). \qquad (5)$$

Предполагая, кроме того, что $\tilde{\nu} >> \bar{\nu}$, раскладывая правую часть (5) в ряд Тейлора по $\bar{\nu}$ вблизи $\tilde{\nu}$ и ограничиваясь членами первого порядка малости по $\bar{\nu}$, получим

$$(\nabla\tilde{\nu})^2 = f(\tilde{\nu})\tilde{\nu}, \qquad (6)$$

$$\left(\frac{d\bar{\nu}}{dz}\right)^2 = \Phi\bar{\nu}, \qquad (7)$$

где

$$f(\tilde{\nu})=\frac{1}{S}\left[\frac{bG}{a_{\delta}+b\tilde{\nu}}-a_{M}(\tilde{\nu})\right],\ \ \Phi=f'(\nu_k)\nu_k+f(\nu_k),$$
$$f'(\theta_k)=\frac{1}{S}\left[\frac{b^2G}{(a_{\delta}+b\tilde{\nu})^2}-a'_{M}(\tilde{\nu})\right].$$

Нелинейное уравнение в частных производных (6) и обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (7) описывают распределение дислокаций с диссипативной динамикой или стационарные диссипативные структуры. Обыкновенное дифференциальное уравнение (7) с начальным условием $\bar{\nu}\,|_{z=0}=\bar{\nu}_0^2=$ $=\mathrm{const}>0$ имеет решение $\bar{\nu}=\left(\frac{\sqrt{\Phi}}{2}z\pm\bar{\nu}_0\right)^2$.

Основную роль в изучении распределения дислокаций играет уравнение (6). Величину $(\nabla\tilde{\nu})^2$ определяли как диссипацию Я.Б. Зельдович [8], В.И. Таланов [4] и другие авторы. Так что мы можем с полным основанием называть уравнение (6) уравнением стационарных диссипативных структур.

Для уравнений с частными производными первого порядка разработано много разных методов исследования условий разрешимости и построения приближенных решений. Все они имеют свои достоинства и недостатки, и каждый из известных методов применим к своему классу задач. Так, в частности, метод характеристик в принципе позволяет доказать локальную разрешимость задачи Коши для уравнения с частными производными первого порядка. Однако определение границ интервала разрешимости и нахождение вида решения в исходных координатах для нелинейных уравнений является в методе характеристик трудноразрешимой задачей. При этом, как правило, используется теорема об обратной функции, которая в большинстве случаев не дает возможности явно определить интервал разрешимости. Задача определения условий разрешимости дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка без привлечения теоремы об обратной функции, как и задача построения численного решения в исходных координатах, эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента (МДА) [5–7].

Целью дальнейших исследований в данной работе является поиск условий нелокальной разрешимости уравнения (6) в некоторой полосе вблизи внешней границы круга, ширина которой определяется внутренними характеристиками задачи, а не границами локальной разрешимости дифференциальных уравнений.

Так как уравнение (6) рассматривается в круге $x^2+y^2\le R^2$ с дополнительными условиями на окружности, то вначале перейдём к полярным координатам. Обозначив $u(r,\varphi)=\tilde{\nu}(x,y)$, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=f(u)u \qquad (8)$$

с начальным условием

$$u\,|_{r=R}=g_1(\varphi), \qquad (9)$$

причём функцию $g_1(\varphi)$ не будем предполагать периодической по φ, тем самым учитывая в плоской задаче изменение условий вдоль стержня.

Преобразуем уравнение (8) к системе квазилинейных уравнений. Чтобы не менять структуры МДА, сделаем в задаче (8), (9) замену независимой переменной $\rho=R-r$. В результате придем к задаче Коши:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+\frac{1}{(R-\rho)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=f(u)u, \qquad (10)$$

$$u\,|_{\rho=0}=g_1(\varphi). \qquad (11)$$

Умножив (10) на $(R-\rho)^2$, получим

$$\left((R-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=f(u)u(R-\rho)^2. \qquad (12)$$

Введём функции

$$p(\rho,\varphi)=-(R-\rho)\frac{\partial u}{\partial\rho},\ \ q(\rho,\varphi)=\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \qquad (13)$$

С этими обозначениями уравнение (12) примет вид

$$p^2+q^2=f(u)u(R-\rho)^2. \qquad (14)$$

Зададим для функций $p(\rho,\varphi)$, $q(\rho,\varphi)$ начальные условия

$$q\,|_{\rho=0}=q'_1(\varphi), \qquad (15)$$

$$p\,|_{\rho=0}=g_2(\varphi)=\sqrt{f\big(g_1(\varphi)\big)g_1(\varphi)R^2-\big(g_1(\varphi)\big)^2}. \qquad (16)$$

Констатируем первое условие разрешимости

$$f\big(g_1(\varphi)\big)g_1(\varphi)R^2-\big(g_1(\varphi)\big)^2>0. \qquad (17)$$

Дифференцируя (14) по ρ и φ, учитывая равенство $\frac{\partial q}{\partial\rho}=-\frac{1}{R-\rho}\frac{\partial p}{\partial\rho}$ и деля на $2p$, получим уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial\rho}-\frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=$$
$$=-\frac{f'(u)u+f(u)}{2}(R-\rho)-\frac{f(u)u}{p}(R-\rho), \qquad (18)$$

$$\frac{\partial q}{\partial\rho}-\frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial q}{\partial\varphi}=-\frac{f'(u)u+f(u)}{2}\frac{q}{p}(R-\rho). \qquad (19)$$

Сформируем уравнение для u. С учетом (13) запишем

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{p}{R-\rho}-\frac{1}{R-\rho}\frac{q^2}{p}.$$

Из (14) следует равенство $q^2 = f(u)u \times \times (R-\rho)^2 - p^2$, с учётом которого предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{f(u)u}{p}(R-\rho). \tag{20}$$

Таким образом, пришли к задаче Коши, состоящей из замкнутой системы уравнений (18)–(20) и начальных условий (11), (15), (16). Применив к этой задаче МДА, как это изложено в цитированных выше работах, можно доказать существование локального дифференцируемого ограниченного решения, состоящего из трёх функций p, q, u. С помощью преобразований, в некотором смысле обратных к тем, которые были использованы при выводе уравнений (18)–(20), доказывается, что функции p и q удовлетворяют соотношению (14), и, кроме того, имеют место равенства (13). Таким образом, найденная из задачи Коши (18)–(20), (11), (15), (16) функция $u(\rho,\varphi)$ после соответствующей замены переменной $\rho = R - r$ даст гладкое локальное решение задачи (8), (9).

Но чтобы иметь возможность продлевать локальное решение, нам потребуется глобальная оценка второй производной от функции $u(\rho,\varphi)$ по φ. Так что добавим к системе из трёх уравнений ещё уравнение относительно $\omega = \partial_\varphi q$. С этой целью продифференцируем (19) по φ. Заменив $\omega = \partial_\varphi q$, будем иметь:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = \frac{1}{R-\rho}\frac{\omega^2}{p} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p^2}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\omega -$$
$$-\frac{f'(u)u + f(u)}{2}\frac{\omega}{p}(R-\rho) + \frac{f'(u)u + f(u)}{2}\frac{q}{p^2}\times \tag{21}$$
$$\times\frac{\partial p}{\partial \varphi}(R-\rho) - \frac{f''(u)u + 2f'(u)}{2}\frac{q^2}{p}(R-\rho).$$

Продифференцировав (14) по φ и заменив $\omega = \partial_\varphi q$, получим выражение

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{f'(u)u + f(u)}{2}\frac{q}{p}(R-\rho)^2 - \frac{q}{p}\omega. \tag{22}$$

Заменив в правой части (21) $\partial_\varphi p$ его выражением из (22), придём к уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} =$$
$$= \frac{f(u)u}{p^2}\omega^2(R-\rho) - \left(f'(u)u + f(u)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{q^2}{p^2} + \frac{1}{2p}\right)\omega(R-\rho) + \left[\left(f'(u)u + f(u)\right)^2\frac{q^2}{4p^3}\times\right. \tag{23}$$
$$\left.\times(R-\rho)^2 - \left(\frac{1}{2}f''(u)u + f'(u)\right)\frac{q^2}{p}\right]\times(R-\rho).$$

В качестве начального условия для ω возьмём

$$\omega|_{\rho=0} = g_1''(\varphi). \tag{24}$$

Введём обозначения

$$H(u) = \frac{f'(u)u + f(u)}{2},\quad A(u,p) = \frac{f(u)u}{p^3},$$
$$B(u,p,q) = \left(f'(u) + f(u)\right)\left(\frac{q^2}{p^2} + \frac{1}{2p}\right),$$
$$D(\rho,u,p,q) = \left(f'(u)u + f(u)\right)^2\frac{q^2}{4p^3}(R-\rho)^2 -$$
$$-\left(\frac{1}{2}f''(u)u + f'(u)\right)\frac{q^2}{p}.$$

Перепишем систему уравнений (18), (19), (23) в более компактном виде

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -H(u)(R-\rho) - \frac{f(u)u}{p}(R-\rho), \tag{25}$$
$$\frac{\partial q}{\partial \rho} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -H(u)\frac{q}{p}(R-\rho), \tag{26}$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{1}{R-\rho}\frac{q}{p}\frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = A(u,p)\omega^2(R-\rho) - \tag{27}$$
$$-B(u,p,q)\omega(R-\rho) + D(\rho,u,p,q)(R-\rho).$$

Запишем для задачи Коши (20), (25), (26), (27), (11), (15), (16), (24) расширенную характеристическую систему

$$\frac{d\eta(s,\rho,\varphi)}{ds} = -\frac{1}{R-s}\frac{w_2}{w_1}, \tag{28}$$
$$\eta(\rho,\rho,\varphi) = \varphi, \tag{29}$$
$$\frac{dw_1(s,\rho,\varphi)}{ds} = -\frac{f(w_1)w_1}{w_2}(R-s), \tag{30}$$
$$w_1(0,\rho,\varphi) = g_1(\eta(0,\rho,\varphi)), \tag{31}$$
$$\frac{dw_2(s,\rho,\varphi)}{ds} = -\frac{f(w_1)w_1}{w_2}(R-s) - H(w_1)(R-s), \tag{32}$$
$$w_2(0,\rho,\varphi) = g_2(\eta(0,\rho,\varphi)), \tag{33}$$
$$\frac{dw_3(s,\rho,\varphi)}{ds} = -H(w_1)\frac{w_3}{w_2}(R-s), \tag{34}$$
$$w_3(0,\rho,\varphi) = g_1'(\eta(0,\rho,\varphi)), \tag{35}$$
$$\frac{dw_4(s,\rho,\varphi)}{ds} = A(w_1,w_2)w_4^2(R-s) - \tag{36}$$
$$-B(w_1,w_2,w_3)w_4(R-s) + D(s,w_1,w_2,w_3)(R-s),$$
$$w_4(0,\rho,\varphi) = g_1''(\eta(0,\rho,\varphi)). \tag{37}$$

Сформулируем в виде лемм те утверждения о взаимосвязи между решениями задач (10), (11); (20), (25)–(27), (11), (15), (16), (24); (28)–(37), а также о разрешимости задачи (28)–(37), которые составляют основу метода дополнительного аргумента и доказаны или вытекают из цитированных выше работ. Обозначим:

$$Q_1 = \{(s,\rho,\varphi) : 0 \le s \le \rho \le R_1, -\infty < \varphi < \infty\},$$
$$C_1 = \sup\nolimits_{-\infty<\varphi<\infty} g_1(\varphi),$$
$$\Omega_1 = \{(\rho,\varphi) : 0 \le \rho \le R_1,\quad -\infty < \varphi < \infty\}.$$

Лемма 1. Пусть $g_1 \in \overline{C}^3(-\infty,\infty)$, $g_1 > 0$, $f(u) \in \overline{C}^3([0,C_1])$, выполнено условие (17). Тогда существует такое число R_1, $0 < R_1 < R$, что при $0 < \rho \le R_1$ задача Коши (28)–(37) имеет единственное решение $\eta \in C^{1,1,1}(Q_1), w_i \in \overline{C}^{1,1,1}(Q_1)$, $i = 1,2,3,4$.

Замечание. Константа R_1 определяется алгебраически через супремумы известных функций, входящих в задачу Коши. Как отмечено выше, возможность конкретного определения границ области разрешимости рассматриваемой задачи в исходных координатах является одним из преимуществ метода дополнительного аргумента.

Лемма 2. При выполнении условий леммы 1 справедливо $w_1 \in \overline{C}^{1,1,3}(Q_1)$.

Лемма 3. Функции $u(\rho,\varphi) = w_1(\rho,\rho,\varphi)$, $p(\rho,\varphi)= =w_2(\rho,\rho,\varphi)$, $q(\rho,\varphi) =w_3(\rho,\rho,\varphi)$, $\omega(\rho,\varphi) = w_4(\rho,\rho,\varphi)$ будут являться решением задачи (20), (25)–(27), (11), (15), (16), (24).

Лемма 4. Функция $u(\rho,\varphi) \in \overline{C}^{1,3}(\Omega_1)$ удовлетворяет уравнению (10) и начальному условию (11).

Из этих лемм следует теорема о локальной разрешимости задачи Коши (10), (11).

Теорема 1. Пусть $g_1 \in \overline{C}^3(-\infty,\infty)$, $g_1 > 0$, $f(u) \in \overline{C}^3([0,C_1])$, выполнено условие (17). Тогда существует такое число R_1, $0 < R_1 < R$, что при $0 < \rho \le R_1$ задача Коши (10), (11) имеет решение $u(\rho,\varphi) \in \overline{C}^{1,3}(\Omega_1)$.

Целью настоящей работы является определение условий, при выполнении которых задача (28)–(37), а следовательно, и задача (10), (11) будет иметь решение на заданном промежутке. В качестве такого промежутка возьмём $[0, kR]$, где $0 < k < 1$.

Первым и самым важным этапом является вывод для (η, w_1, w_2, w_3, w_4) достаточного набора глобальных оценок. Отметим, что под глобальной оценкой мы понимаем оценку, справедливую на любом множестве, на котором определено решение рассматриваемой задачи, и не зависящую от размеров этого множества.

Уравнения (30), (32), (34) не зависят от w_4, поэтому выведем вначале глобальные оценки для w_1, w_2, w_3. При этом сразу отметим, что из физических предположений и вида уравнений вытекает необходимость выполнения (а значит, и обоснования) следующих неравенств:

$$0 < w_1 \le g_1(\eta(0,\rho,\varphi)), \tag{38}$$

$$0 < \text{const} = p_0 \le w_2 \le g_2(\eta(0,\rho,\varphi)). \tag{39}$$

Из (30), (31) следует

$$w_1(s,\rho,\varphi) = g_1(\eta(0,\rho,\varphi))e^{-\int_0^s \frac{f(w_1)}{w_2}(R-\tau)d\tau}. \tag{40}$$

Констатируем условие:

$$f(u) > 0 \text{ при } 0 \le u \le C_1. \tag{41}$$

При выполнении (41), (39) из (40) следует (38). Из (34), (35) вытекает

$$w_3(s,\rho,\varphi) = g_1'(\eta(0,\rho,\varphi))e^{-\int_0^s \frac{H(w_1)}{w_2}(R-\tau)d\tau}. \tag{42}$$

Констатируем следующее условие:

$$H(u) > 0 \text{ при } 0 \le u \le C_1. \tag{43}$$

При выполнении (43), (39) из (42) следует оценка:

$$|w_3(s,\rho,\varphi)| \le |g_1'(\eta(0,\rho,\varphi))|. \tag{44}$$

Чтобы определить условия существования p_0, оценить величину p_0, а также доказать оценку (39), изучим зависимость w_3 и w_2 от w_1. Разделив (34) на (30), придём к уравнению

$$\frac{dw_3}{dw_1} = \left(\frac{f'(w_1)}{2f(w_1)} + \frac{1}{2w_1}\right)w_3. \tag{45}$$

Из (30), (35) получим начальное условие

$$w_3|_{w_1=g_1} = g_1'. \tag{46}$$

Из задачи Коши (45), (46) выводим зависимость w_3 от w_1:

$$w_3 = \sqrt{w_1}\,\frac{g_1'}{\sqrt{g_1}}e^{-\int_{w_1}^{g_1}\frac{f'(\tau)}{2f(\tau)}d\tau}. \tag{47}$$

При $s = \rho$ равенство (47) примет вид $q = \sqrt{u}\,\frac{g_1'}{\sqrt{g_1}}e^{-\int_u^{g_1}\frac{f'(\tau)}{2f(\tau)}d\tau}$. С его учетом из (14) получим $\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1 = (R-\rho)^2\frac{f(u)g_1}{(g_1')^2}e^{-\int_u^{g_1}\frac{f'(\tau)}{2f(\tau)}d\tau}$.

Отсюда видно, что при

$$1 = (R-\rho)^2\frac{f(u)g_1}{(g_1')^2}e^{-\int_u^{g_1}\frac{f'(\tau)}{2f(\tau)}d\tau} \tag{48}$$

будет $\frac{p}{q} = 0$, а значит, $\frac{q}{p} = \infty$. Вблизи $\rho = 0$ в силу условия (17) будет

$$(R-\rho)^2\frac{f(u)g_1}{(g_1')^2}e^{-\int_u^{g_1}\frac{f'(\tau)}{2f(\tau)}d\tau} > 1. \tag{49}$$

Поэтому ограниченное решение рассматриваемой задачи существует для такого k, при котором в диапазоне $0 < \rho \le kR$ выполнено неравенство (49). А так как при $\rho \to R$ найдется такое значение ρ, что равенство (48) окажется справедливым, то факт его существования можно рассматривать как признак того, что вблизи оси стержня гладкого решения задачи в рассматриваемом виде не существует.

Далее, из (30)–(33) вытекает:

$$\frac{dw_2}{dw_1}=1+\left(\frac{f'(w_1)}{2f(w_1)}+\frac{1}{2w_1}\right)w_2,\quad w_2\,|_{w_1=g_1}=g_2.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$w_2=\sqrt{w_1}K(w_1), \tag{50}$$

где

$$K(w_1)=e^{-\int_{w_1}^{g_1}\frac{f'(\tau)}{2f(\tau)}d\tau}\left[\frac{g_2}{\sqrt{g_1}}-\int_{w_1}^{g_1}\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\int_{\tau}^{g_1}\frac{f'(\sigma)}{2f(\sigma)}d\sigma}\right].$$

Примем, что

$$f'(u)<0 \text{ при } u\in[0,C_1]. \tag{51}$$

Тогда

$$K(w_1)\ge\frac{2g_2-g_1}{2\sqrt{g_1}}. \tag{52}$$

Констатируем очередное условие:

$$2g_2-g_1>0. \tag{53}$$

Обозначим $\widetilde{p}_0=\inf_\varphi\frac{2g_2-g_1}{2\sqrt{g_1}}$. Тогда с учётом (52) будем иметь

$$K(w_1)\ge\widetilde{p}_0>0. \tag{54}$$

Из (50) вытекает $w_1=\frac{w_2^2}{K^2(w_1)}$. Подставив это выражение в (32), придём к уравнению

$$\frac{dw_2}{ds}=-\frac{f(w_1)}{K^2(w_1)}(R-s)-H(w_1)(R-s).$$

Решая последнее уравнение с начальным условием (33) и оценивая правую часть получившегося выражения, приходим к неравенству

$$g_2(\eta)e^{-\frac{C_f}{\widetilde{p}_0^2}kR^2}-C_HkR^2\le w_2\le g_2, \tag{55}$$

где $C_f=\max\limits_{0\le u\le C_1}f(u)$, $C_H=\max\limits_{0\le u\le C_1}H(u)$.

Констатируем следующее условие:

$$g_2(\eta)>kR^2C_He^{\frac{C_f}{\widetilde{p}_0^2}kR^2}. \tag{56}$$

Обозначим $p_0=\min_\varphi\{g_2(\varphi)\}e^{-\frac{C_f}{\widetilde{p}_0^2}kR^2}-C_HkR^2$. При выполнении (56) из (55) следует справедливость неравенств (39). С учётом (52) из (47), (50) выводим

$$\left|\frac{w_3}{w_2}\right|\le C_{23}=\sup_\varphi\left\{|g_1'|\frac{2}{2g_2-g_1}\right\}. \tag{57}$$

Теперь с учётом оценки (57) из (28), (29) следует

$$|\eta-\varphi|\le C_{23}\ln\frac{1}{1-k}. \tag{58}$$

Обозначив $C_1'=\sup_\varphi|g_1'(\varphi)|$, $C_2=\sup_\varphi g_2(\varphi)$, запишем полученные оценки

$$0<w_1\le C_1, \tag{59}$$

$$p_0\le w_2\le C_2, \tag{60}$$

$$|w_3|\le C_1'. \tag{61}$$

Переходим к выводу глобальной оценки и определению условий её наличия для w_4. Правая часть в (36) представляет собой квадратный трёхчлен относительно w_4. Найдём его корни: $w_{01}=\frac{B+\sqrt{B^2-4FD}}{2A}$, $w_{02}=\frac{B-\sqrt{B^2-4FD}}{2A}$. В качестве очередного условия нелокальной разрешимости примем, что

$$4F(w_1,w_2)D(s,w_1,w_2,w_3)<B^2(w_1,w_2,w_3) \tag{62}$$

при всех $0\le s\le\rho\le kR$, $0<w_1\le C_1$, $p_0\le w_2\le C_2$, $|w_3|\le C'$.

Перепишем уравнение (36) в виде

$$\frac{dw_4}{ds}=A(w_1,w_2)(R-s)(w_4-w_{01})(w_4-w_{02}). \tag{63}$$

Построим для (63) мажорантные и минорантные уравнения, решения которых и обеспечат искомую глобальную оценку. Обозначим $\widetilde{w}_{01}=\min_{s\in[0,\rho]}w_{01}$, $\widetilde{w}_{02}=\max_{s\in[0,\rho]}w_{02}$, $\overline{w}_{01}=\max_{s\in[0,\rho]}w_{01}$, $\overline{w}_{02}=\min_{s\in[0,\rho]}w_{02}$, $\varphi_0=\eta(0,\rho,\varphi)$. В качестве следующего условия нелокальной разрешимости примем, что при всех допустимых ρ, φ

$$\widetilde{w}_{02}<\widetilde{w}_{01}. \tag{64}$$

Мажорантные и минорантные уравнения будем строить по-разному в зависимости от взаимного расположения g_1'', $\overline{w}_{02}$, $\widetilde{w}_{02}$, $\widetilde{w}_{01}$, $\overline{w}_{01}$. Начнём с мажорантного уравнения вида

$$\frac{d\widetilde{w}_4}{ds}=A(w_1,w_2)(R-s)(\widetilde{w}_4-\widetilde{w}_{01})(\widetilde{w}_4-\widetilde{w}_{02}).$$

Для $\widetilde{w}_4$ зададим то же самое начальное условие, что и для w_4: $\widetilde{w}_4\,|_{s=0}=g_1''(\varphi_0)$.

Лемма Max1. Если $\widetilde{w}_{02}<g_1''(\varphi_0)<\widetilde{w}_{01}$, то на всём интервале существования решения задачи (63), (37) справедлива оценка $w_4\le\widetilde{w}_4\le\widetilde{w}_{01}$.

Теперь построим для (63) минорантное уравнение при $\overline{w}_{02}\le g_1''(\varphi_0)<\overline{w}_{01}$. Чтобы включить в рассмотрение случай $\overline{w}_{02}=g_1''(\varphi_0)$, определим величину (функцию от ρ и φ): $\overline{w}_{02}^{\varepsilon}=\overline{w}_{02}-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. В качестве минорантного уравнения возьмём

$$\frac{d\overline{w}_4}{ds}=A(w_1,w_2)(R-s)(\overline{w}_4-\overline{w}_{01})(\overline{w}_4-\overline{w}_{02}^{\varepsilon})$$

с тем же самым начальным условием: $\overline{w}_4\,|_{s=0}=g_1''(\varphi_0)$.

Лемма Min1. При $\overline{w}_{02}\le g_1''(\varphi_0)<\overline{w}_{01}$ на всём интервале существования решения задачи (63), (37) справедлива оценка $\overline{w}_{02}\le\overline{w}_4\le w_4$.

Выведем оценку сверху при $g_1''(\varphi_0) \le \widetilde{w}_{02}$. Чтобы включить в рассмотрение случай, когда $g_1''(\varphi_0) = \widetilde{w}_{02}$, определим $\widetilde{w}_{02}^{\varepsilon} = \widetilde{w}_{02} + \varepsilon$, и в качестве мажорантного уравнения возьмём

$$\frac{d\breve{w}_4}{ds} = A(w_1, w_2)(R - s)(\breve{w}_4 - \overline{w}_{01})(\breve{w}_4 - \overline{w}_{02}^{\varepsilon})$$

с тем же самым начальным условием: $\breve{w}_4 |_{s=0} = g_1''(\varphi_0)$.

Лемма Max2. Если $g_1''(\varphi_0) \le \widetilde{w}_{02}$, то на всём интервале существования решения задачи (63), (37) справедлива оценка $w_4 \le \breve{w}_4 \le \widetilde{w}_{02}$.

На следующем этапе выведем оценку снизу при $g_1''(\varphi_0) < \overline{w}_{02}$. В качестве минорантного уравнения возьмём

$$\frac{d\hat{w}_4}{ds} = A(w_1, w_2)(R - s)(\hat{w}_4 - \overline{w}_{01})(\hat{w}_4 - \overline{w}_{02}^{\varepsilon})$$

с тем же самым начальным условием $\hat{w}_4 |_{s=0} = g_1''(\varphi_0)$.

Лемма Min2. При $g_1''(\varphi_0) < \overline{w}_{02}$ на всём интервале существования решения задачи (63), (37) справедлива оценка $g_1''(\varphi_0) \le \hat{w}_4 \le w_4$. Для полноты картины осталось получить оценку сверху при $g_1''(\varphi_0) = \widetilde{w}_{01}$. Оценка снизу при этом условии получена в лемме Min1. В качестве мажорантного уравнения возьмём

$$\frac{d\widetilde{w}_{4\varepsilon}}{ds} = A(w_1, w_2)(R - s)(\widetilde{w}_{4\varepsilon} - \widetilde{w}_{01})(\widetilde{w}_{4\varepsilon} - \widetilde{w}_{02}). \quad (65)$$

Но в качестве начального условия как для уравнения (63), так и для уравнения (64) возьмём $g_1''(\varphi_0) - \varepsilon$. Для так определенных задач мы будем находиться в условиях леммы Max1. Записав соответствующую оценку и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим оценку $w_4 \le \widetilde{w}_{01}$. Суммируя оценки, установленные в леммах и последнюю оценку, получим искомую оценку для w_4.

Введём множество $G_k = \{(\rho, \varphi, w_1, w_2, w_3) : 0 \le \le \rho \le kR,\ -\infty < \varphi < \infty, 0 < w_1 \le C_1,\ p_0 \le w_2 \le C_2,\ | w_3 | \le C_1'\}$. Обозначим $w_1^0 = \sup_{G_k} | \widetilde{w}_{01} |$, $w_2^0 = = \sup_{G_k} | \overline{w}_{02} |$, $C_1'' = \sup_{\varphi} | g_1''(\varphi) |$, $N_4 = \max\{w_1^0, w_2^0, C_1''\}$. Тогда можем записать оценку для w_4 в виде:

$$| w_4 | \le N_4. \quad (66)$$

Условия, при которых оценка (66) справедлива, запишем как очередные условия нелокальной разрешимости. А именно, при всех $(\rho, \varphi, w_1, w_2, w_3) \in G_k$ должны выполняться неравенство (64) и неравенство

$$g_1''(\eta(0, \rho, \varphi)) \le \widetilde{w}_{01}. \quad (67)$$

Основываясь на выведенных глобальных оценках и тождествах

$$w_1(s, \rho, \varphi) \equiv w_1(s, s, \eta(s, \rho, \varphi)) \equiv u(s, \eta(s, \rho, \varphi)),$$
$$w_2(s, \rho, \varphi) \equiv w_2(s, s, \eta(s, \rho, \varphi)) \equiv p(s, \eta(s, \rho, \varphi)),$$
$$w_3(s, \rho, \varphi) \equiv w_3(s, s, \eta(s, \rho, \varphi)) \equiv q(s, \eta(s, \rho, \varphi))$$

получим глобальные оценки: $| \partial_{\varphi} w_i | \le C_{i\varphi} = \text{const}$, $i = 1,2,3$; $| \partial_{\varphi} \eta | \le C_{\eta\varphi} = \text{const}$.

Наконец, продифференцировав (36), (37) по φ, придём к задаче Коши относительно $\partial_{\varphi} w_4$ из которой функция $\partial_{\varphi} w_4$ выражается однозначно. Для всех функций, входящих в это выражение, уже получены глобальные оценки, что позволяет определить такое постоянное число $C_{4\varphi}$, не зависящее от локального интервала разрешимости, что

$$| \partial_{\varphi} w_4 | \le C_{4\varphi} \quad (68)$$

для всех s на любом интервале разрешимости, не превосходящем kR. Соответственно, оценка (68) сохраняется для $s = \rho$, т.е. $| \partial_{\varphi} \omega(\rho, \varphi) | \le C_{4\varphi}$, что влечет, в свою очередь, оценку

$$| \partial_{\varphi}^3 u(\rho, \varphi) | \le C_{4\varphi}. \quad (69)$$

Полученные глобальные оценки (57)–(61), (66), (68) и (69) дают возможность продлить решение на весь интервал $[0, kR]$. Сформулируем общий итог исследования разрешимости задачи Коши (10), (11) в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $g_1 \in \overline{C}^3(-\infty, \infty)$, $g_1 > 0$, $f(u) \in \overline{C}^3([0, C_1])$, выполнены условия (17), (41), (43), (49), (51), (53), (56), (62), (64), (67). Тогда задача Коши (10), (11) имеет решение $u(\rho, \varphi) \in \overline{C}^{1,3}([0, kR] \times (-\infty, \infty))$, которое совпадает с функцией $w_1(\rho, \rho, \varphi)$, определяемой из задачи (28)–(30).

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 245 с.
2. Алексеенко С.Н., Нагорных С.Н. Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций // Журн. СВМО. 2010. Т. 12. № 1. С. 41–45.
3. Крупкин П.Л., Куров И.Е., Нагорных С.Н. и др. Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении // ФММ. 1988. Т. 66. Вып. 5. С. 978–984.
4. Таланов В.И. Стимулированная диффузия и кооперативные эффекты в распределённых кинетических системах // В сб.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1983. С. 47–56.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады Академии наук. 1992. Т. 323. № 3.
6. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады РАН. 2001. Т. 379. № 1.

7. Иманалиев М.И., Панков П.С., Алексеенко С.Н. Метод дополнительного аргумента // Вестник КазНУ. Серия «Математика, механика, информатика». Спец. выпуск. 2006. № 1. С. 60–64.

8. Зельдович Я.Б. Предельный закон теплопередачи во внутренней задаче при малых скоростях // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. Вып. 12. С. 1466–1468.

A STUDY OF NONLOCAL SOLVABILITY CONDITIONS FOR THE EQUATION OF STATIONARY DISSIPATIVE STRUCTURES

S.N. Alekseenko*, *S.N. Nagornykh*, *E.A. El'kina

On the basis of a diffusion-dislocation model, a first-order nonlinear partial differential equation, called an equation of stationary dissipative structures, is derived from the second-order dislocation density equation. The conditions are found which provide the existence of a smooth nonlocal solution of this equation in an annulus with a width determined by internal characteristics of the problem.

Keywords: dislocation density, stationary dissipative structures, first-order nonlinear partial differential equation, method of an additional argument, global estimates.