Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2012, № 1 (1), с. 156–159

УДК 519.6

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Л. Калашников

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

allk123@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.09.2011

Рассматривается задача оптимального управления в КВ-линеале. К исходной задаче имеется последовательность k-задач минимизации. Приводятся условия сходимости последовательности, полученной на основе k-задач, к множеству ω-нормальных решений.

Ключевые слова: оптимальное управление, линеал, порядковая ограниченность, сходимость, ω-нормальное решение.

Введение

В работе рассматривается задача минимизации функционала при операторном ограничении в виде равенства и функциональных неравенств на состояние x и управление u. Пространство управлений U здесь КВ-линеал с единицей e. Функционал $\omega(u)$ минимизируется на множестве оптимальных управлений, что приводит к ω-нормальному решению оптимизации. К исходной задаче имеется последовательность k-задач минимизации. Подобная постановка возникает, например, в приближённых задачах оптимального управления, математического программирования при введении дополнительного критерия качества и в методах регуляризации. Приводятся условия e-ограниченности ω-нормальных решений и оптимальных управлений u_k^0 в k-задачах и сходимости u_k^0 к множеству ω-нормальных решений в метрике КВ-линеала e-ограниченных элементов. Это приводит к усиленной сходимости последовательности $\{u_k^0\}$ и наличию у нее порядковых свойств. Отметим, что такой результат получен здесь без применения стабилизатора, определение которого дано в [1].

Последовательная минимизация

Пусть X – банахово пространство состояний, U – пространство управлений, являющееся КВ-линеалом с единицей e, а U_e – КВ-линеал e-ограниченных элементов в U с нормой $\|u\|_e$. Рассмотрим 0-задачу: $g_0(x, u) \to \inf$

$$F_0(x,u)=0\,,\ G_0(x,u)\le\overline{0}\,,\ x\in X\,,\ u\in U$$

и к ней последовательную минимизацию:

$$\omega(u)\to\inf\,,\ u\in U^0.$$

Здесь функционал $\omega(u)$ определен на пространстве U, а U^0 – множество оптимальных управлений в 0-задаче. Предположим, что имеется последовательность k-задач: $g_k(x, u) \to \inf$

$$F_k(x,u)=0\,,\ G_k(x,u)\le\overline{0}\,,\ x\in X\,,\ u\in U\,.$$

Здесь для $k \ge 0$ функционалы $g_k(x, u)$, вектор-функции

$$G_k(x,u)=(g_{1,k}(x,u),g_{2,k}(x,u),....,g_{n,k}(x,u))^T$$

и операции F_k класса C^1. При этом F_k отображают $X \times U \to Z$, где Z – банахово пространство. Такую последовательность k-задач получаем, например, при возмущении 0-задачи.

Пусть множество точек минимума $\left(x_k^0,u_k^0\right)$ в любой k-задаче при $k \ge 0$ непусто и для всех $u\in U$ уравнение $F_k(x, u) = 0$ имеет единственное решение $x_k = x_k(u)$ класса C^1. Очевидно, $x_k^0=x_k(u_k^0)$. Обозначим через U_e^0 множество e-ограниченных оптимальных управлений в 0-задаче, а $\rho_e(u,Q)=\inf\limits_{v\in Q}\|u-v\|_e$ – расстояние между $u\in U_e$ и множеством $Q\subset U_e$.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{s_k\}\subset U_e$ и компактна в U_e, а любая её предельная точка принадлежит множеству $Q\subset U_e$. Тогда $\lim\limits_k \rho_e(s_k,Q)=0$.

Доказательство. Введём числа $b_k=\rho_e(s_k,Q)$. Очевидно, $b_k \ge 0$ и поэтому $0\le\underline{\lim}_k b_k$. Пусть $\overline{\lim_k}\rho_e(s_k,Q)=\lim\limits_{kn}\rho_e(s_{kn},Q)$ для некоторой подпоследовательности $\{s_{kn}\}$. В силу компактности $\{s_k\}$ считаем для удобства обозначения $\{s_{kn}\}$ сходящейся к некоторому элементу $s_0=\lim\limits_{kn}s_{kn}$ в пространстве U_e. По условию теоремы 1 все предельные точки последовательности $\{s_k\}$ принадлежат Q. Тогда $s_0 \in Q$. Нетрудно установить неравенство:

$$b_{kn} = \rho_e(s_{kn}, Q) = \inf_{v \in Q} \| s_{kn} - v \|_e \le \| s_{kn} - s_0 \|_e .$$

Но $\lim_{kn} \| s_{kn} - s_0 \|_e = 0$. Следовательно, $\lim_{kn} b_{kn} = 0$ и поэтому $\overline{\lim_k} b_k = \lim_{kn} b_{kn} = 0$. Поскольку $0 \le \underline{\lim_k} b_k \le \le \overline{\lim_k} b_k = 0$, то $\underline{\lim_k} b_k = \overline{\lim_k} b_k = 0$. Отсюда по теории пределов будет существовать $\lim_k b_k = 0$. Таким образом, $\lim_k \rho_e(s_k, Q) = 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть 1) последовательность k-задач минимизирует 0-задачу по функционалу: $\lim_k g_k(x_k^0, u_k^0) = d_0$, где d_0 есть inf в 0-задаче;

2) для $k \ge 1$ последовательность $\{u_k^0\} \subset U_e$ и компактна в U_e, а любая ее предельная точка – допустимое управление в 0-задаче;

3) $x_k(u) \Rightarrow x_0(u)$ равномерно сходится по $\| u \|_e \le \text{const}$;

4) $g_k(x,u) \Rightarrow g_0(x,u)$ равномерно сходится по $\| x \| + \| u \|_e \le \text{const}$.

Тогда I) любая предельная точка последовательности $\{u_k^0\}$ является e-ограниченным оптимальным управлением в 0-задаче; II) множество $U_e^0 \ne \varnothing$ и $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_e^0) = 0$.

Доказательство. Пусть v_0 – любая e-предельная точка для $\{u_k^0\}$. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность $\{u_{kn}^0\}$, для которой $\lim_{kn} u_{kn}^0 = v_0$ в U_e. Отсюда $v_0 \in U_e$. Поскольку из сходимости в U_e следует по [2] сходимость в U, то $\lim_{kn} u_{kn}^0 = v_0$ в U. По непрерывности операции $x_0(u)$ получаем $\lim_{kn} x_0(u_{kn}^0) = x_0(v_0)$ или $\lim_{kn} \| x_0(u_{kn}^0) - x_0(v_0) \| = 0$. Для сходящейся в U_e подпоследовательности $\{u_{kn}^0\}$ будет $\| u_{kn}^0 \|_e \le \text{const}$. В этом случае по условию 3) будет существовать $\lim_{kn} \| x_{kn}(u_{kn}^0) - x_0(u_{kn}^0) \| = 0$. Имеем очевидное неравенство:

$$\begin{aligned} &\| x_{kn}(u_{kn}^0) - x_0(v_0) \| \le \\ &\le \| x_{kn}(u_{kn}^0) - x_0(u_{kn}^0) \| + \| x_0(u_{kn}^0) - x_0(v_0) \| . \end{aligned} \tag{1}$$

Поэтому, с учетом полученных пределов, из (1) предел $\lim_{kn} \| x_{kn}(u_{kn}^0) - x_0(v_0) \| = 0$. Тем самым $\lim_{kn} x_{kn}(u_{kn}^0) = x_0(v_0)$. Так как $x_{kn}^0 = x_{kn}(u_{kn}^0)$ и подпоследовательность $\{x_{kn}(u_{kn}^0)\}$ сходится, то $\left\| x_{kn}^0 \right\| \le \text{const}$ и, совместно с $\left\| u_{kn}^0 \right\|_e \le \text{const}$, имеем $\left\| x_{kn}^0 \right\| + \left\| u_{kn}^0 \right\|_e \le \text{const}$. По непрерывности функционала $g_0(x,u)$ получаем $\lim_{kn} | g_0(x_{kn}^0, u_{kn}^0) - -g_0(x_0(v_0), v_0) | = 0$. На основе условия 4) $\lim_{kn} | g_{kn}(x_{kn}^0, u_{kn}^0) - g_0(x_{kn}^0, u_{kn}^0) | = 0$. Очевидно неравенство:

$$\begin{aligned} &| g_{kn}(x_{kn}^0, u_{kn}^0) - g_0(x_0(v_0), v_0) | \le | g_{kn}(x_{kn}^0, u_{kn}^0) - \\ &- g_0(x_{kn}^0, u_{kn}^0) | + | g_0(x_{kn}^0, u_{kn}^0) - g_0(x_0(v_0), v_0) | . \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда, с учетом найденных пределов для функционалов g_{kn} и g_0, из неравенства (2) следует $\lim_{kn} | g_{kn}(x_{kn}^0, u_{kn}^0) - g_0(x_0(v_0), v_0) | = 0$. Таким образом, $g_0(x_0(v_0), v_0) = \lim_{kn} g_{kn}(x_{kn}^0, u_{kn}^0)$.

Согласно условию 1) k-задачи минимизируют 0-задачу по функционалу. Поэтому

$$g_0(x_0(v_0), v_0) = \lim_{kn} g_{kn}(x_{kn}^0, u_{kn}^0) = d_0. \tag{3}$$

По условию 2) предельная точка v_0 будет допустимым управлением в 0-задаче. Тогда, с учетом того, что $v_0 \in U_e$, получаем e-ограниченность и по равенству (3) оптимальность управления v_0 в 0-задаче. Тем самым заключение I) доказано.

Установим справедливость заключения II). Действительно, из доказанного в I) следует, что множество $U_e^0 \ne \varnothing$ и любая предельная точка v_0 компактной в U_e последовательности $\{u_k^0\}$ принадлежит U_e^0. Тогда, применяя теорему 1 при $s_k = u_k^0$ и $Q = U_e^0$, получаем $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_e^0) = 0$. Теорема 2 доказана.

Отметим, что случаи выполнения условий для теоремы 2 представлены в [3].

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и существует e-приближение $v_k \in U$, такое, что $(u_k^0 - v_k) \in U_e$ и $\left\| u_k^0 - v_k \right\|_e \le \varepsilon_k$, где числа $\varepsilon_k \to +0$.

Тогда $v_k \in U_e$, последовательность $\{v_k\}$ компактна в U_e, а любая её предельная точка принадлежит U_e^0 и пределы $\lim_k \rho(v_k, U_e^0) = 0$, $\lim_k g_k(x_k(v_k), v_k) = d_0$.

Доказательство. I. По условию 2) теоремы 2 последовательность $\{u_k^0\} \subset U_e$. Следовательно, из $(u_k^0 - v_k) \in U_e$ получаем $v_k \in U_e$. Так как $\lim_k \| u_k^0 - v_k \|_e = 0$ и последовательность $\{u_k^0\}$

компактна в U_e, то $\{v_k\}$, как нетрудно установить, тоже компактна в U_e, а ее предельные точки v^* совпадают с предельными точками для $\{u_k^0\}$. Тогда, на основе заключения I) теоремы 2, $v^* \in U_e^0$. Используя теорему 1 для $s_k = v_k$ и $Q = U_e^0$, получаем $\lim_k \rho_e(v_k, U_e^0) = 0$.

II. Пусть теперь v^* – любая предельная в U_e точка для $\{v_k\}$. Тогда существует $\{v_{kn}\}$, для которой $\lim_{kn} v_{kn} = v^*$ в U_e, а на основе [2] существует и $\lim_{kn} v_{kn} = v^*$ в U. По доказанному в пункте I теоремы 3 $v^* \in U_e^0$. Следовательно, $g_0(x_0(v^*), v^*) = d_0$. Для сходящейся подпоследовательности $\{v_{kn}\}$ в U_e будет $\| v_{kn} \|_e \le \text{const}$ и по непрерывности операции $x_0(u)$ в U получаем, что $\lim_{kn} x_0(v_{kn}) = x_0(v^*)$ или $\lim_{kn} \left\| x_0(v_{kn}) - x_0(v^*) \right\| = 0$. Очевидно неравенство:

$$\left\| x_{kn}(v_{kn}) - x_0(v^*) \right\| \le \\ \le \left\| x_{kn}(v_{kn}) - x_0(v_{kn}) \right\| + \left\| x_0(v_{kn}) - x_0(v^*) \right\|. \tag{4}$$

Поскольку $\| v_{kn} \|_e \le \text{const}$, то на основе условия 3) теоремы 2 $\lim_{kn} \left\| x_{kn}(v_{kn}) - x_0(v_{kn}) \right\| = 0$. На основе полученных пределов из (4) $\lim_{kn} \left\| x_{kn}(v_{kn}) - x_0(v^*) \right\| = 0$ или $\lim_{kn} x_{kn}(v_{kn}) = x_0(v^*)$. Тем самым подпоследовательность $x_{kn}(v_{kn})$ сходится и, следовательно, $\|x_{kn}(v_{kn})\| \le$ const. Но $\|(v_{kn})\|_e \le$ const. Следовательно, $\|x_{kn}(v_{kn})\| + \|(v_{kn})\|_e \le$ const. Используя условие 4) теоремы 2, получаем существование $\lim_{kn} | g_{kn}(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) - g_0(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) | = 0$. Из непрерывности $g_0(x,u)$ и сходимостей $\{x_{kn}(v_{kn})\}$, $\{v_{kn}\}$ имеем $\lim_{kn} | g_0(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) - g_0(x_0(v^*), v^*) | = 0$.

Нетрудно проверить неравенство:

$$| g_{kn}(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) - g_0(x_0(v^*), v^*) | \le \\ \le | g_{kn}(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) - g_0(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) | + \\ + | g_0(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) - g_0(x_0(v^*), v^*) |. \tag{5}$$

Тогда на основе полученных пределов из (5) $\lim_{kn} | g_{kn}(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) - g_0(x_0(v^*), v^*) | = 0$. Но $g_0(x_0(v^*), v^*) = d_0$. Отсюда $\lim_{kn} g_{kn}(x_{kn}(v_{kn}), v_{kn}) = d_0$. Поскольку v^* – любая предельная точка, то у последовательности $\{g_k(x_k(v_k), v_k)\}$ все частичные пределы совпадают и равны d_0. Таким образом, существует $\lim_k g_k(x_k(v_k), v_k) = d_0$. Теорема 3 доказана.

Нормальное решение задачи минимизации

Рассмотрим минимизацию функционала $\omega(u)$ при наличии k-задач. Введём число $\omega^* = \inf \omega(u)$ для всех $u \in U^0$. Например, если $\omega(u) \ge 0$, то всегда существует $\omega^* \ge 0$. Определим ω-нормальное решение $u_0^* \in U^0$ как $\omega(u_0^*) = \omega^*$. Если же $u_0^* \in U_e^0 = U^0 \cap U_e^0$, то назовем его ω_e-нормальным решением, а $U_e^{0,*}$ – множеством этих решений.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, функционал $\omega(u)$ непрерывен на U и $\overline{\lim_k} \omega(u_k^0) \le \omega^*$. Тогда множество $U_e^{0,*} \ne \varnothing$ и любая предельная в U_e точка последовательностей $\{u_k^0\}, \{v_k^0\}$ принадлежит $U_e^{0,*}$, а $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_e^{0,*}) = \lim_k \rho_e(v_k, U_e^{0,*}) = 0$.

Доказательство. Согласно теоремам 2, 3, $\{u_k^0\}$, $\{v_k\}$ компактны в U_e, а любая их предельная точка принадлежит U_e^0. Пусть u_0 – любая предельная точка для $\{u_k^0\}$. Тогда существует $\{u_{kn}^0\}$, такая, что $\lim_{kn} u_{kn}^0 = u_0$ в U_e. Поскольку по [2] из сходимости в U_e следует сходимость в U, то существует $\lim_{kn} u_{kn}^0 = u_0$ в U. По непрерывности функционала $\omega(u)$ в U получаем $\lim_{kn} \omega(u_{kn}^0) = \omega(u_0)$. Поскольку $\lim_{kn} \omega(u_{kn}^0) \le \overline{\lim_k} \omega(u_k^0)$ и по условию $\overline{\lim_k} \omega(u_k^0) \le \omega^*$, то $\omega(u_0) \le \omega^*$. На основе теоремы 3 элемент $u_0 \in U_e^0 \subset U^0$. Тогда $\omega(u_0) = \omega^*$ и, следовательно, u_0 есть e-ограниченное ω-нормальное решение. Поэтому множество $U_e^{0,*} \ne \varnothing$. Таким образом, для всякой предельной в U_e точки u_0 компактной последовательности $\{u_k^0\}$ будет $u_0 \in U_e^{0,*}$. Применяя теорему 1 для $s_k = u_k^0$ и $Q = U_e^{0,*}$, получаем существование предела $\lim_k \rho_e(u_k^0, U_e^{0,*}) = 0$. По условию теоремы 3 норма $\left\| u_k^0 - v_k \right\|_e \le \varepsilon_k$, где числа $\varepsilon_k \to +0$. Тогда $\lim_k \| u_k^0 - v_k \|_e = 0$, а по её заключению последовательность $\{v_k\} \subset U_e$ и компактна в U_e. Отсюда нетрудно показать, что $\{v_k\}$ имеет такие же предельные точки, как и $\{u_k^0\}$. Следовательно, все предельные точки для $\{v_k\}$ принадлежат множеству $U_e^{0,*}$. Полагая в теореме 1 $s_k = v_k$ и $Q = U_e^{0,*}$, получаем $\lim_k \rho_e(v_k, U_e^{0,*}) = 0$. Теорема 4 доказана.

Замечание. Неравенство $\overline{\lim_k}\,\omega(u_k^0) \le \omega^*$ в условии теоремы 3 будет, например, выполнено в методах регуляризации задачи оптимизации [1]. Поскольку метрика в пространстве U_e сильнее, чем в U, то по теоремам 2, 3, 4 получаем усиленную сходимость последовательностей $\{u_k^0\}$, $\{v_k\}$, имеющих и порядковые свойства: e-ограниченность и компактность в U_e. При этом здесь нет предположения, что $\omega(u)$ стабилизатор. В теореме 4 приведены также условия порядковой аппроксимации ω-нормальных решений в U_e и наличия у них порядковых свойств.

Вышеприведённая теория статьи применима к задаче оптимального управления с состоянием $x \in C([t_0,t_1],R^m)$ и управлением $u \in L_2^n[t_0,t_1]$. Для этого рассмотрим 0-задачу:

$$g_0(x,u) = \int_{t_0}^{t_1}(a_0(u,t)+b_0(x,t))dt \to \inf,$$

$$\dot{x} = A_0(x,t)+B_0(t)u, \quad x(t_0)=x_0,\, t\in[t_0,t_1], \quad (6)$$

$$g_{j,0}(x,u) = \int_{t_0}^{t_1}(a_{j,0}(u,t)+b_{j,0}(x,t))dt \le 0,\, j=\overline{1,n},$$

а также задачу последовательной минимизации:

$$\omega(u) = \int_{t_0}^{t_1} p(u,t)dt \to \inf, u\in U^0,$$

где U^0 – множество оптимальных управлений в 0-задаче. Пусть имеются k-задачи:

$$g_k(x,u) = \int_{t_0}^{t_1}(a_k(u,t)+b_k(x,t))dt \to \inf, \quad (7)$$

$$\dot{x} = A_k(x,t)+B_k(t)u,\; x(t_0)=x_0,\, t\in[t_0,t_1],$$

$$g_{j,k}(x,u) = \int_{t_0}^{t_1}(a_{j,k}(u,t)+b_{j,k}(x,t))dt \le 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Здесь для $k \ge 0$ вектор-функции $A_k(x, t)$ функции $a_k(x, t)$, $b_k(x, t)$, $a_{j,k}(u, t)$, $b_{j,k}(x, t)$, $p(u, t)$ класса C^1 для всех $x\in R^m$, $u \in R^n$, матрицы $B_k(t)$ непрерывны на $[t_0, t_1]$ а функционал $\omega(u)$ непрерывен на $L_2^n[t_0,t_1]$. Отметим, что здесь единица $e = e(t) = (1,1,\ldots,1)^T$, а KB-линеалом с единицей будет пространство $U_e = L_\infty^n[t_0,t_1]$. В работе [3] приводятся достаточные условия выполнения требований теорем 2, 3 для k-задач и применения их к задачам (6), (7).

Список литературы

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

2. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

3. Калашников А.Л. Достаточные условия усиленной сходимости оптимального множества для приближенных задач оптимального управления с операторными и функциональными ограничениями // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Вып.1(18). Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. С.134–139.

ORDER PROPERTIES OF NORMAL SOLUTIONS IN AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A.L. Kalashnikov

An optimal control problem in the KB-lineal is considered. There is a sequence of k-minimization problems for the initial problem. Conditions of convergence are given for the sequence obtained on the basis of *k*-problems to the set of ω-normal solutions.

Keywords: optimal control, lineal, order boundedness, convergence, ω-normal solution.