М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.987.5

О C^0-Ω-ВЗРЫВАХ В ГЛАДКИХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОТОБРАЖЕНИЙ ИНТЕРВАЛА С ЗАМКНУТЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЕРИОДИЧЕКИХ ТОЧЕК

© 2012 г. *Л.С. Ефремова*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

lefunn@gmail.com

Поступила в редакцию 30.12.2011

Приведено детальное доказательство критерия C^0-Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала (т.е. в косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек). Указаны примеры C^1-гладких отображений рассматриваемого класса, допускающих C^0-Ω-взрыв.

Ключевые слова: косое произведение, Ω-взрыв, периодическая точка, цепно-рекуррентная точка.

1. Введение

Изучению различных аспектов явления Ω-взрыва в динамических системах (не относящихся к классу косых произведений) посвящены, например, работы [1–6].

Результаты данной статьи следует рассматривать в контексте исследований по общей проблеме изучения возмущений динамических систем класса косых произведений, сформулированной Д.В. Аносовым в [7]. Здесь приведено детальное доказательство критерия C^0-Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала (т.е. в косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек), анонсированного в [8]; указаны примеры отображений рассматриваемого класса, допускающих C^0-Ω - взрыв.

Пусть $I = I_1 \times I_2$ – замкнутый прямоугольник в плоскости (I_1, I_2 – отрезки). Будем рассматривать косое произведение отображений интервала, т.е. динамическую систему (д. с.) $F{:}I \to I$ вида $F(x,y) = (f(x), g_x(y))$, , где

$$g_x(y) = g(x, y),\ (x; y) \in I. \qquad (1)$$

При этом f называется *фактороотображением* (*фактором*) д. с. (1), а отображение g_x: $I_1 \to I_2$ при любом $x \in I_1$ называется *отображением, действующим в слое над x*.

В силу (1) справедливо равенство $F^n(x,y) = (f^n(x), g_{x,n}(y))$, *где*

$$g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \ldots \circ g_x. \qquad (2)$$

Будем использовать обозначение $\tilde{g}_x$ для отображения $g_{x,n}$, если x – периодическая точка $f(x \in Per(f))$, а n – ее (наименьший) период.

Обозначим через $T^0(I)$ пространство всех непрерывных косых произведений отображений интервала с C^0-нормой $\|\cdot\|_0$, определяемой для произвольного отображения $F \in T^0(I)$ в силу формулы $\|F\|_0 = \max\left\{\sup\limits_{x\in I_1}|f(x)|, \sup\limits_{(x,y)\in I}|g_x(y)|\right\}$.

База топологии в пространстве $T^0(I)$ задается множеством ε-шаров с центром $F \in T^0(I)$ для всех ε > 0 и всех $F \in T^0(I)$, где $B^0_\varepsilon(F) = \{\Phi \in T^0(I) : \|F - \Phi\|_0 < \varepsilon\}$.

Нам потребуется также C^0-норма дифференциала $DF{:}I \to I$ произвольного C^1-гладкого отображения F, где

$$\|DF\|_0 = \max\left\{\sup_{x\in I_1}|f'(x)|, \sup_{(x,y)\in I}\left(\left|\frac{\partial g_x(y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_x(y)}{\partial y}\right|\right)\right\}.$$

Основными понятиями, используемыми в данной работе, являются понятие неблуждающего множества динамической системы (см. [9, часть I, гл. 3, § 3.3]) вида (1) и понятие C^0-Ω-взрыва (см. [5, гл. 1, § 4]).

Определение 1.1. Точка $z^0(x^0; y^0) \in I$ называется *неблуждающей точкой* отображения $F \in T^0(I)$, если для любой ее окрестности $U(z^0)$ в I найдется натуральное число $n = n(z^0)$, такое, что $U(z^0) \cap F^n(U(z^0)) \neq \phi$.

Множество всех неблуждающих точек д. с. (1) будем называть *неблуждающим* и обозначать символом $\Omega(F)$. Точки фазового пространства, не являющиеся неблуждающими, называются *блуждающими.*

Обозначим через $T_1^0(I)$ подпространство (с C^0-нормой) пространства $T^0(I)$, состоящее из C^1-гладких косых произведений отображений интервала. База топологии в пространстве $T_1^0(I)$ задается системой ε-шаров $B_\varepsilon^{01}(F)=B_\varepsilon^0(F)\cap$ $\cap\, T_1^0(I)$ при всех $F\in T_1^0(I)$.

Определение 1.2. Будем говорить, что отображение $F\in T_1^0(I)$ *допускает C^0-Ω-взрыв*, если существует $\delta > 0$, такое, что в любой ε-окрестности $B_\varepsilon^{01}(F)$ отображения F в пространстве $T_1^0(I)$ найдется отображение Φ, для которого выполнено $\Omega(\Phi)\not\subset U_\delta(\Omega(F))$, где $U_\delta(\Omega(F))$ – δ-окрестность неблуждающего множества $\Omega(F)$ отображения F в прямоугольнике I.

2. Используемые понятия и утверждения

Для того чтобы сформулировать и доказать основной результат статьи (теорему А), нам потребуются некоторые понятия и утверждения, содержащиеся, например, в работах [3–13].

Так, важность понятия цепно-рекуррентной точки при изучении явления C^0-Ω-взрыва отмечена в работах [3–5].

Возьмем произвольно и зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Начнем с определения ε-цепи (относительно отображения $F\in T^0(I)$), ведущей из произвольной точки $z_1(x_1;y_1)\in I$ в произвольную точку $z_2(x_2;y_2)\in I$ (см., например, [3–5, 11]).

Определение 2.1. *ε-цепью относительно отображения $F\in T^0(I)$, соединяющей точки z_1 и z_2,* будем называть конечное множество точек $\{u_k\}_{k=0}^n$, таких, что

$$u_0=z_1,\, u_n=z_2,\ \text{а}\ d(F(u_{k-1}),u_k)<\varepsilon$$
$$\text{при}\ k=1,\dots,n,$$

где d – метрика в I, согласованная с топологией произведения, т.е. для произвольных точек $z(x,y)$ и $z'(x',y')$ выполнено $d(z,z')=\max\{|x-x'|, |y-y'|\}$.

Определение 2.2. Точка $z\in I$ называется *цепно-рекуррентной для отображения $F\in T^0(I)$*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь относительно отображения $F\in T^0(I)$, ведущая из z в z.

Приведенное определение показывает, что цепно-рекуррентные точки порождают частный случай ε-траекторий Д.В. Аносова [12]: ε-периодические траектории. Обозначим через $CR(F)$ множество цепно-рекуррентных точек косого произведения $F\in T^0(I)$.

Для доказательства критерия C^0-Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [4].

Предложение 2.1. Непрерывное отображение Φ метрического компакта X в себя допускает Ω-взрыв в пространстве такого рода отображений в том и только том случае, если для множеств цепно-рекуррентных точек $CR(F)$ и неблуждающих точек $\Omega(\Phi)$ отображения Φ выполнено $CR(F)\neq\Omega(\Phi)$.

Одним из основных результатов, используемых в данной работе, является следующее утверждение, вытекающее из [13].

Теорема 2.1. Для C^1-гладкого косого произведения отображений интервала следующие утверждения эквивалентны:

(2.1) $\Omega(\Phi) = Per(F)$;

(2.2) множество периодических точек $Per(F)$ замкнуто.

Важную роль при рассмотрении C^0-Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала играют понятие достижимости одного множества из другого и понятие «t-пары», введенные в статье [11].

Определение 2.3. Пусть $F\in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество, а $K_1,K_2\subset Per(F)$. Будем говорить, что *множество K_2 достижимо из множества* $K_1(K_1\xrightarrow{a}K_2)$, если найдутся точки $z_1(x_1,y_1)\in K_1$ и $z_2(x_2,y_2)\in K_2$, такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь относительно сужения $F_{|E}$, где $E=Orb_f(x)\times I_2$, $Orb_f(x)$ – f-периодическая орбита точки x, соединяющая z_1 с z_2.

Определение 2.4. Пусть $F\in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество. Будем говорить, что точки $z_1(x_1,y_1)$, $z_2(x_2,y_2)\in Per(F)$ *образуют t-пару*, если

(1) $\{z_2\}\xrightarrow{a}\{z_1\}$, причем для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ любая ε-цепь относительно сужения $F_{|E}$, соединяющая z_1 с z_2, содержит хотя бы одну непериодическую точку;

и для любого $\delta > 0$

(2) существует конечный набор компонент связности K_i множества $Per(F)$ ($i = 1,2,\dots,m$, где $m = m(\delta)$, $m\geq 1$), таких, что $z_1\in K_1$, $z_2\in K_m$ и для всех $i = 1,2,\dots,m-1$ при $m > 1$ выполнено либо $K_i\xrightarrow{a}K_{i+1}$, либо $d(K_i, K_{i+1}) < \delta$.

Нам потребуются доказанные в [11] критерий несовпадения множеств $CR(F)$ и $Per(F)$ для простейших косых произведений, а также некоторое достаточное условие, при выполнении которого две точки образуют *t-пару*.

Предложение 2.2. *Пусть* $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ *– замкнутое множество. Тогда* $CR(F) \neq Per(F)$ *в том и только том случае, если существует t-пара.*

Для сравнения отметим, что для произвольного непрерывного отображения отрезка в себя замкнутость множества его периодических точек эквивалентна совпадению множеств цепно-рекуррентных и периодических точек [10]. Последнее вместе с предложением 2.1 означает невозможность C^0-Ω-взрыва в произвольных непрерывных (или гладких) отображениях отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Лемма 2.1. Пусть $F \in T^0(I)$, $Per(F)$ – замкнутое множество, а точка $z(x,y) \notin Per(F)$ такова, что x – f-неподвижная точка. Если точки $z_1 \in \omega_F(z)$, $z_2 \in \alpha_F(z)$ (здесь $\alpha_F(z)$ означает множество всех предельных точек некоторой отрицательной полутраектории точки z) принадлежат одной компоненте связности множества $Per(F)$, то z_1 и z_2 образуют t-пару. В противном случае для z_1 и z_2 удовлетворяется только лишь условие (1) определения 2.4.

3. Критерий C^0-Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях

В этой части статьи доказан критерий C^0-Ω-взрыва в C^1-гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек.

Теорема А. Отображение $F \in T_1^0(I)$ с замкнутым множеством $Per(F)$ допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

(a) множество $Per(F)$ связно, и существует, по крайней мере, одна точка $x \in Per(F)$, такая, что $Per(\widetilde{g}_x)$ не связно;

(b) множество $Per(F)$ не связно, и либо одна из его компонент связности удовлетворяет предыдущему условию (*a*), либо, в противном случае, для любого $\delta > 0$ существует конечный набор компонент связности $\{K_i\}_{i=1}^{i=m}$ (где $m = m(\delta)$, $m > 1$) множества $Per(F)$, таких, что выполнено $K_m \xrightarrow{a} K_1$, а при всех $1 \le i \le m-1$ выполнено одно из следующих двух свойств: $K_i \xrightarrow{a} K_{i+1}$ или $d(K_i, K_{i+1}) < \delta$, здесь $d(K_i, K_{i+1})$ – расстояние между множествами K_i и K_{i+1}, используется метрика d в I, согласованная с топологией произведения в I.

Доказательство теоремы А разобьем на ряд шагов, проделанных в теореме 3.1 и предложении 3.1.

Теорема 3.1. Отображение $F \in T_1^0(I)$ с замкнутым множеством $Per(F)$ допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$ в том и только том случае, если выполнено неравенство $CR(F) \neq Per(F)$.

Доказательство. 1. Пусть отображение $F \in T_1^0(I)$ *с замкнутым множе*ством $Per(F)$ допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$. Тогда в силу определения 1.2 F допускает Ω-взрыв в пространстве $T^0(I)$. Используя предложение 2.1 и теорему 2.1, получаем отсюда, что $CR(F) \neq Per(F)$.

Обратно, пусть отображение $F \in T_1^0(I)$ имеет цепно-рекуррентную непериодическую точку $\bar{z}$. Убедимся в том, что тогда F допускает C^0-Ω-взрыв.

2. Действительно, положим $\delta = d(\bar{z}, Per(F)) = \inf_{z \in Per(F)} d(\bar{z}, z)$ (где $d(\bar{z}, Per(F))$ – расстояние от точки $\bar{z}$ до множества $Per(F)$). При сделанном предположении $\delta > 0$.

Возьмем произвольно и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем сначала, что существует точка $v \in U_{\delta/2}(\bar{z})$, $v = v(\varepsilon)$ (где $U_{\delta/2}(\bar{z})$ – $\delta/2$-окрестность точки $\bar{z}$ в I), такая, что в шаровой окрестности $B_\varepsilon^{01}(F)$ отображения F в пространстве $T_1^0(I)$ найдется косое произведение Φ, для которого справедливо $v \in Per(\Phi)$. В самом деле, положим $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{12(M+1)}, \frac{\delta}{2}\right\}$, где $M = \|DF\|_0$ (см. Введение).

Пусть ε_1-цепь из $\bar{z}$ в $\bar{z}$ относительно F образована точками $\{u_k\}_{k=0}^{k=n}$ (среди которых могут быть как совпадающие точки, так и граничные точки прямоугольника I), здесь $u_0 = u_n = \bar{z}$. По ε_1-цепи $\{u_k\}_{k=0}^{k=n}$ построим новую ε-цепь $\{v_k(x_k, y_k)\}_{k=0}^{k=n}$ из v_0 *в* $v_n = v_0$ (возможно, $v_0 \neq \bar{z}$), состоящую из точек с попарно различными абсциссами, попарно различными ординатами и такую, что множество $\{v_k\}_{k=0}^{k=n}$ не содержит граничных точек прямоугольника I. Для этого определим новые точки $\{u'_k\}_{k=0}^{k=n}$. Положим сначала $u'_0 = u'_n = \bar{z}$, а в качестве точек $\{u'_k\}_{k=1}^{n-1}$ выберем произвольные точки множеств

$$U_{\varepsilon_1}(u_k)\setminus((pr_1(\{u'_0,...,u'_{k-1}\})\times I_2)\cup$$
$$\cup(I_1\times pr_2(\{u'_0,...,u'_{k-1}\}))\cup\partial I),$$

где $U_{\varepsilon_1}(\cdot)-\varepsilon_1$-окрестность точки в I, $pr_s : I\to I_s -$ естественная проекция I на I_s (s = = 1,2), ∂I – граница прямоугольника I.

При всех $1 \le k \le n - 1$ положим $\nu_k = u_k$. При $u_0 \notin \partial I$ положим $v_0 = \nu_n = u_0$. Если же $u_0 \in \partial I$, то в качестве $\nu_n = v_0$ выберем любую точку, содержащуюся во множестве

$$U_{\varepsilon_1}(u_0)\setminus((pr_1(\{u'_1,...,u'_{n-1}\})\times I_2)\cup$$
$$\cup(I_1\times pr_2(\{u'_0,...,u'_{n-1}\}))\cup\partial I).$$

Таким образом, все точки каждого из множеств $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ (а следовательно, и $\{v_k(x_k,y_k)\}_{k=0}^{k=n}$) попарно различны, причем среди $\{v_k\}_{k=0}^{k=n}$ нет точек из ∂I.

Покажем, что множество $\{v_k(x_k,y_k)\}_{k=0}^{k=n}$ является ε-цепью из v_0 *в* $v_n = v_0$ относительно отображения F. Действительно, используя классическую теорему Лагранжа [14, гл. 1, § 3], при любом $1 \le k \le n$ имеем:

$$d(v_k,F(v_{k-1}))=\max\{|f(x_{k-1})-x_k|,$$
$$|g_{x_{k-1}}(y_{k-1})-y_k|\}\le d(v_k,u'_k)+d(u'_k,u_k)+$$
$$+d(u_k,F(u_{k-1}))+d(F(u_{k-1}),F(u'_{k-1}))+$$
$$+d(F(u'_{k-1}),F(v_{k-1}))<3\varepsilon_1+2M\varepsilon_1<\varepsilon.$$

Перейдем к построению отображения Φ, обладающего требуемыми свойствами.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ так, чтобы при любых $1\le i\le n$ выполнялось

$$U_{\varepsilon_2}(v_i)\cap\partial I=\phi,$$

где $U_{\varepsilon_2}(v_i)=U_{1,\varepsilon_2}(x_i)\times U_{2,\varepsilon_2}(y_i)$, а также при всех $1 \le j \le n$, $j\ne i - \overline{U}_{1,\varepsilon_2}(x_i)\cap\overline{U}_{1,\varepsilon_2}(x_j)=\phi$ и $\overline{U}_{2,\varepsilon_2}(y_i)\cap\overline{U}_{2,\varepsilon_2}(y_j)=\phi$.

Такой выбор числа $\varepsilon_2 > 0$ возможен, так как все точки каждого из двух конечных множеств $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ попарно различны, причем среди $\{v_k(x_k,y_k)\}_{k=0}^{n-1}$ нет точек из ∂I.

Используя равномерную непрерывность F, по числу $\varepsilon_2 > 0$ укажем положительное число $\eta \le \le \varepsilon_2$ так, чтобы для любых точек $z',z''\in I$, таких, что $d(z',z'')<\eta$, выполнялось неравенство

$$d(F(z'),F(z''))<\varepsilon_2. \tag{3}$$

Нам потребуются C^1-гладкие «шапочки» Урысона, при определении которых будут использованы η-окрестности $U_{1,\eta}(x_k)$ точек x_k в I_1 и η-окрестности $U_{2,\eta}(y_k)$ точек y_k ($1 \le k \le n$) в I_2. Положим

$$h_k^1(x)=\begin{cases}0,\text{ если } x\in I_1\setminus U_{1,\eta}(x_{k-1});\\ 1,\text{ если } x=x_{k-1},\end{cases}$$
$$h_k^2(y)=\begin{cases}0,\text{ если } y\in I_2\setminus U_{2,\eta}(y_{k-1});\\ 1,\text{ если } y=y_{k-1}.\end{cases}$$

Тогда корректно определено отображение $\Phi\in T_1^0(I),\Phi\in(\phi(x),\psi_x(y))$, где

$$\phi(x)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}h_k^1(x)(x_k-f(x_{k-1})),$$
$$\psi_x(y)=g_x(y)+\sum_{k=1}^{n}h_k^2(y)(y_k-g_{x_{k-1}}(y_{k-1})). \tag{4}$$

Из (3), (4) следует также, что $\Phi\in B_\varepsilon^{01}(F)$. Заметим, что для отображения Φ точка v_0 является периодической с периодом n, поскольку при каждом $1 \le k \le n$ выполнено

$$\Phi(x_{k-1},y_{k-1})=(x_k;y_k)\text{, а } (x_n;y_n)=(x_0;y_0),$$
$$\text{т.е. } \Phi^n(x_0,y_0)=(x_0,y_0).$$

3. Из п. 2 следует, что косое произведение $\Phi\in B_\varepsilon^{01}(F)$ содержит точку $v_0\in\Omega(\Phi)$, такую, что $v_0\notin U_{\delta/2}(\Omega(F))$. Последнее означает, что отображение F допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$ (см. определение 1.2). Теорема 3.1 доказана.

Нам потребуется вспомогательное утверждение, доказанное в [8][1].

Лемма 3.1. Если множество $Per(F)$ C^1-гладкого отображения F замкнуто, то множество $\tau(F)$ (наименьших) периодов периодических точек F ограничено.

Предложение 3.1. Пусть $F\in T_1^0(I)$, а $Per(F)$ – замкнутое множество. Тогда t-пара существует в том и только том случае, если выполнено одно из условии (a) или (b) теоремы A.

Доказательство. 1. Воспользуемся тем, что при любом $n\ge 1$ справедливы равенства $Per(F^n)$ = = $Per(F)$, $CR(F^n)$ = $CR(F)$. Из определения 2.4 следует также, что множества t-пар для отображений F и F^n совпадают. А так как $F\in T_1^0(I)$, то, используя лемму 3.1 и переходя в случае необходимости к отображению F^M, где M – наибольший элемент множества $\tau(F)$ = {1,2, $2^2,\dots,2^\nu$} при некотором $0 \le \nu < +\infty$ [17], будем считать, не уменьшая общности, что $\tau(F)$ = {1}.

Из сделанного предположения, в частности, следует, что $Per(f) = Fix(f)$, где $Fix(f)$ – множество f-неподвижных точек. Поэтому при любом $x\in Per(F)$ справедливо равенство $\tilde{g}_x=g_x$.

2. Пусть существует t-пара, образованная точками $z_1(x;y_1)$, $z_2(x;y_2)\in Per(F)$. Тогда для точек z_1 и z_2 удовлетворяется определение 2.4. Возьмем произвольно и зафиксируем $\delta > 0$. Ис-

пользуя условие (2) определения 2.4, укажем конечный набор из $m = m(\delta)$, $m \geq 1$, компонент связности $\{K_1,\ldots,K_m\}$ множества $Per(F)$, таких, что $z_1 \in K_1$, $z_2 \in K_m$ и для всех $i = 1,2,\ldots,m-1$ при $m > 1$ выполнено либо $K_i \xrightarrow{a} K_{i+1}$, либо $d(K_i, K_{i+1}) < \delta$.

Рассмотрим случай, когда $K_1 \neq K_m$ (т.е. $Per(F)$ не является связным множеством). Тогда в силу условия (1) определения 2.4. удовлетворяется определение 2.3 достижимости компоненты связности K_1 из компоненты связности $K_m (K_m \xrightarrow{a} K_1)$. Последнее вместе с условием (2) определения 2.4 влечет за собой выполнение условия (b) теоремы А.

Пусть теперь $K_1 = K_m$. Убедимся в том, что множество $Per(g_x) = Fix(g_x)$ не является связным. Действительно, предположим противное. Тогда в силу замкнутости множества $Per(g_x)$ $Fix(g_x)$ – отрезок. Если допустить, что отрезок $Fix(g_x)$ вырождается в точку, то имеем $Fix(g_x) = \{y_1\} = \{y_2\}$.

В этом случае для произвольного положительного числа ε существует ε-цепь относительно отображения $F_{|\{x\}\times I_2}$, соединяющая z_2 с $z_1 = z_2$ и состоящая лишь из единственной неподвижной точки $z_1 = z_2$. Полученное противоречие с условием (1) определения 2.4 означает, что $y_1 \neq y_2$ и $Fix(g_x)$ – невырожденный отрезок.

Возьмем произвольно и зафиксируем положительное число $\varepsilon < |y_2 - y_1|$. Определим натуральное число M, полагая $M = \left[\frac{|y_2 - y_1|}{\varepsilon}\right]$, здесь $[\cdot]$ – целая часть числа.

Разделим отрезок, соединяющий точку z_1 с точкой z_2 (и лежащий в вертикальном слое $\{x\}\times I_2$), на $2(M + 1)$ равных частей. Тогда длина каждого из полученных подотрезков меньше $\varepsilon/2$. Выбирая в каждом таком подотрезке произвольную внутреннюю точку, получаем ε-цепь относительно отображения $F_{|\{x\}\times I_2}$, соединяющую z_2 с z_1 и состоящую из неподвижных точек F. Полученное противоречие с условием (1) определения 2.4 означает, что сделанное предположение не верно и $Fix(g_x)$ – несвязное множество. Следовательно, удовлетворяется либо условие (a) теоремы А, если множество $Per(F)$ связно, либо условие (b) теоремы А, если множество $Per(F)$ не связно.

3. Обратно, пусть выполнено одно из условий (a) или (b) теоремы А. Тогда при некотором $x \in Per(f)$ множество $Fix(g_x)$ не связно. Последнее влечет за собой существование смежного интервала J к замкнутому множеству $Fix(g_x)$, среди граничных точек которого нет граничных точек отрезка I_2. Отсюда следует, что верно включение

$$J \subset g_x(J). \tag{5}$$

Возьмем произвольно и зафиксируем точку $y_0 \in J$. В силу включения (5) для y_0 корректно определена отрицательная полутраектория $\{y_{-n}\}_{n\geq 0} \subset J$, α-предельное множество которой совпадает с одной из граничных точек промежутка J (обозначим ее через α). Так как множество $Per(g_x) = Fix(g_x)$ замкнуто, то ω-предельное множество траектории точки y_0 состоит из одной единственной неподвижной точки ω отображения g_x. Воспользуемся леммой 2.1, в силу которой точки $z_1(x,\alpha)$ и $z_2(x,\omega)$ образуют t-пару, если они принадлежат одной компоненте связности множества $Per(F)$; и для этих точек удовлетворяется условие (1) определения 2.4, если они содержатся в различных компонентах связности множества $Per(F)$.

Рассмотрим случай, когда точки $z_1(x,\alpha)$ и $z_2(x,\omega)$ содержатся в различных компонентах связности множества $Per(F)$. Тогда выполнено условие (b) теоремы А, а следовательно, и условие (2) определения 2.4. Таким образом, и во втором случае точки $z_1(x,\alpha)$ и $z_2(x,\omega)$ также образуют t-пару. Предложение 3.1 доказано.

Справедливость теоремы А вытекает из теоремы 3.1 и предложения 3.1. Теорема А доказана.

Утверждение теоремы А показывает, что в основе явления C^0-Ω-взрыва в простейших C^1-гладких косых произведениях отображений интервала лежит либо нарушение связности среза некоторой связной компоненты множества $Per(F)$ некоторым вертикальным слоем, либо, в противном случае, такое нарушение связности во множестве $Per(F)$, при котором для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное число компонент связности, содержащих точки, допускающие соединение конечной ε-цепью.

Приведем примеры C^1-гладких отображений с замкнутым множеством периодических точек, допускающих Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$. Начнем с примера отображения, для которого реализуется условие (a) теоремы А.

Пример 1 (Е.В. Блинова [8]). C^1-гладкое косое произведение отображений интервала $F_1:[0,1]^2 \to [0,1]^2$, заданное равенством $F_1(x,y) = (x, y + 0.1(1-x)(\cos 2\pi y - 1))$, обладает следующим свойством:

$$Per(F_1) = Fix(F_1) = L, \text{ где}$$
$$L = ([0,1]\times\{0,1\}) \cup (\{1\}\times[0,1]).$$

Тогда $Per(F_1)$ – замкнутое связное множество; при любом $x \in [0,1)$ множество $Per(g_x) = Fix(g_x) = \{0,1\}$ не связно, а $Per(g_2) = Fix(g_1) = [0,1]$. Таким образом, выполнено условие (a) теоремы А, и F_1 допускает Ω-взрыв в пространстве $T_1^0(I)$.

Завершая работу, приведем пример отображения, для которого реализуется условие (b) теоремы А.

Пример 2. Рассмотрим косое произведение $F_2:[0,1]^2 \to [0,1]^2$, факторотображение которого задано равенством:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^{2j+1}}, \frac{1}{2^{2j}}\right]; \\ x + \frac{1}{2^{2j+5}} \sin^2 \pi(2^{2j+2}x - 1), & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2^{2j+2}}, \frac{1}{2^{2j+1}}\right], j \geq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

а отображения в слоях – равенством $g_x(y) = (2x + 1)y(1 - y)$.

Тогда $F_2 \in T_1^0(I)$. Заметим, что F_2 удовлетворяет условию (b) теоремы А.

В самом деле, $Per(F_2) = Fix(F_2)$ – замкнутое несвязное множество, такое, что

$$Fix(F_2) = \{(0;0)\} \bigcup \bigcup_{j=0}^{+\infty} \{(x;y) : x \in [\frac{1}{2^{2j+1}}, \frac{1}{2^{2j}}],$$

$$y = 0 \text{ или } \frac{2x}{2x+1}\}$$

и ни одна из компонент связности множества $Fix(F_2)$ не удовлетворяет условию (а) теоремы А. При любом $j \geq 0$ положим

$$K_j^1 = \{(x;y) : x \in [\frac{1}{2^{2j+1}}, \frac{1}{2^{2j}}], y = \frac{2x}{2x+1}\};$$

$$K_j^2 = \{(x;0) : x \in [\frac{1}{2^{2j+1}}, \frac{1}{2^{2j}}]\}.$$

Обратим внимание на то, что для произвольной точки $(x;y) \in Fix(F_2)$ при $x \neq 0$ верно следующее свойство: $y = 0$ – источник, а $y = \frac{2x}{2x+1}$ – сток или притягивающая неподвижная точка с мультипликатором –1 отображения g_x в зависимости от того, выполнено ли неравенство $x < 1$ или имеет место равенство $x = 1$. Поэтому нетрудно видеть, что при каждом $j \geq 0$ выполнено $K_j^1 \xrightarrow{a} K_j^2, K_j^2 \xrightarrow{a} K_j^1$. Следовательно, удовлетворяется условие (b) теоремы А (с $m = 2$ при любом $\delta > 0$), и F_2 допускает Ω-взрыв в $T_1^0(I)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2011 гг.) Федерального агентства по образованию (проект №13/9).

Примечания

1. Аналогичный результат содержит и работа [15]. Обратим внимание и на то, что в [15] утверждается существование C^∞-гладкого косого произведения отображений интервала типа $\prec 2^\infty$, имеющего одномерное притягивающее множество. Однако само косое произведение реализуется как отображение сдвига по траекториям (определенным при любом t) соответствующей неавтономной системы дифференциальных уравнений с C^∞-гладкими правыми частями. Последнее означает, что рассмотрения ведутся в R^3, и осцилляции траектории в окрестности предельного множества «распределяются» по неограниченной оси t. При рассмотрении косого произведения в прямоугольнике плоскости xOy возможности «распределить» осцилляции траектории, имеющей одномерное притягивающее множество, отсутствуют. Это приводит к осцилляциям частной производной $\frac{\partial}{\partial x} g_x(y)$ и ее неограниченности в окрестности притягивающего множества, хотя при этом отображение $g_x(y)$ может быть отображением класса C^∞ по переменной y (но не по совокупности переменных) [16].

Список литературы

1. Hirsch M.W., Pugh C. Stable manifolds and hyperbolic sets // Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., Providence: AMS. 1970. V. 14. P. 133–222.
2. Nitecki Z., Shub M. Filtrations, decompositions and explosions // Amer. Journ Math. 1976. V. 97. № 4. P. 1029–1047.
3. Бронштейн И.У. Неавтономные динамические системы. Кишинев: Штиинца, 1984.
4. Block L., Franke J.E. The chain recurrent set, attractors, and explosions // Ergod. Theory and Dynam. Sys. 1985.V. 5. P. 5321–327.
5. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З. и др. Динамические системы с гиперболическим поведением // Сер. Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направл. Динамические системы-9. М.: ВИНИТИ. 1991. Т. 66. С. 6–247.
6. Palis J. Ω-explosions // Proc. AMS. 1971. V. 27. № 1. P. 85–90.
7. Аносов Д.В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // В кн.: Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18 (англ. пер. Berlin: Springer-Verlag, 2006. P. 1–17).
8. Блинова Е.В., Ефремова Л.С. Об Ω-взрывах в простейших C^1-гладких косых произведениях отображений интервала // Труды Междунар. конф. по диф. уравн. и динамич. системам, Суздаль, 2006. // Соврем. мат. и приложения. (Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси). 2008. Т. 53. С. 7–81; англ пер. J. Math. Sci. 2009. V. 157. № 3. P. 456–465.
9. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999 (пер. с англ. Katok A., Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Encyclopedia Math. Appl. V. 54. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995).
10. Block L.S., Coppel W.A. Dynamics in one dimension // Lecture Note in Math. Springer, Berlin–Hedelberg–N.Y.: Spinger, 1992. V. 1513.
11. Kupka J. Triangular maps with the chain recurrent point periodic // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). 2003. V. 72. № 2. P. 245–251.

12. Аносов Д.В. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем // Труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2: Качественные методы. Ин-т математики АН Украины, Киев, 1970. С. 39–45.

13. Efremova L.S. The smooth skew product in the plane possessing ramified continuum as the global attractor // Proc. of Intern. Workshop on Nonlin. maps and their applic. (NOMA '11). 2011. P. 31–33.

14. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

15. Bruno D., Lopez V.J. Asymptotical periodicity for analytic triangular maps of type less than 2^{∞} // JMAA. 2010. V. 361. № 1. P. 1–9.

16. Ефремова Л.С. Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейшего косого произведения отображений интервала // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 6. С. 93–130 (англ. пер. Sbornik: Mathematics. 2010. V. 201. № 6. P. 873–907).

17. Kloeden P.E. On Sharkovsky's cycle coexistence ordering // Bui Austr. Math. Soc. 1979. V. 20. P. 171–177.

ON C^0-Ω-BLOW-UPS IN C^1-SMOOTH SKEW PRODUCTS OF INTERVAL MAPPINGS WITH A CLOSED SET OF PERIODIC POINTS

L.S. Efremova

A detailed proof is given of the criterion of a C^0-Ω-blow up in C^1-smooth simplest skew products of interval mappings (i.e. in skew products of interval mappings with a closed set of periodic points). Some examples of C^1-smooth mappings of the considered class admitting a C^0-Ω-blow up are given.

Keywords: skew product, Ω-blow up, periodic point, chain recurrent point.