УДК 519.17+519.716.5

КОНСТРУКТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ГРАФОВ

© 2012 г.

М.А. Иорданский

Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина

iordanski@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2012

Изучаются процессы построения гамильтоновых графов с помощью операций объединения с пересечением – операций склейки, в ходе которых сохраняется свойство гамильтоновости. Выделяются порождающие базисы (элементный и операционный) таких процессов.

Ключевые слова: гамильтонов граф, операция склейки, замкнутый класс, элементный и операционный базисы, конструктивное описание.

Введение

Рассматриваются непомеченные, конечные, неориентированные графы, допускающие петли и кратные ребра. *Изоморфизм* графов понимается как биекция между множествами вершин, сохраняющая смежности, кратности ребер, петли [1]. Используется *конструктор* графов, включающий вместе с каждым графом его изоморфные копии. К конструктору применяется бинарная *операция склейки*, при выполнении которой производится отождествление изоморфных подграфов $G_1' \subset G_1$ и $G_2' \subset G_2$ графов-операндов G_1 и G_2. В общем случае операция склейки не является однозначной. Для результирующих графов G используется обозначение $(G_1 \circ G_2)\widetilde{G}$, где $\widetilde{G}$ – граф, изоморфный отождествляемым подграфам G_1' и G_2', называемый *подграфом склейки*. При фиксированных графах-операндах G_1 и G_2 граф G может зависеть от вида подграфа склейки $\widetilde{G}$, выбора отождествляемых подграфов G_1' и G_2' в графах-операндах G_1 и G_2 и способа их отождествления.

Результирующий граф любой операции склейки сохраняет такие свойства графов-операндов, как отсутствие изолированных вершин, петель и ребер. Для сохранения других свойств необходимо введение соответствующих ограничений.

Операции склейки вносят избыточность в задание информации о графах, позволяющую единообразно формулировать условия наследования различных характеристических свойств графов. Пусть H – система ограничений на операции склейки, обеспечивающая сохранение некоторого характеристического свойства графов. В общем случае H включает в себя ограничения на вид отождествляемых подграфов, их выбор в подграфах-операндах и способ отождествления. Операции, удовлетворяющие системе ограничений H, называются операциями H-склейки.

Пусть $\Im$ – некоторое множество графов. Граф G реализуем *H-суперпозицией* графов из $\Im$, если $G \in \Im$ или G можно получить из графов множества $\Im$ путем последовательного применения операций H-склейки. Процессу построения графа G соответствует *операция H- суперпозиции* графов из $\Im$. Множество всех графов, получаемых из $\Im$ с помощью операций H-суперпозиции, обозначается через $[\Im]_H$. Класс графов $\Im$ называется *H-замкнутым*, если $[\Im]_H = \Im$.

Подмножество графов $\Im' \subset \Im$, достаточное для получения всех графов H-замкнутого класса $\Im$ с помощью операций H-суперпозиции, образует *полную систему графов*. Минимальная по включению полная система графов H-замкнутого класса $\Im$ называется *элементным базисом* B_e. Операция H-суперпозиции называется *канонической*, если хотя бы один из графов-операндов каждой операции H-склейки изоморфен некоторому графу из B_e. Операции склейки с изоморфными подграфами $\tilde{G}$ относятся к одному *типу*. Множество операций H-склейки различных типов, достаточное для построения исходя из графов элементного базиса B_e всех графов H-замкнутого класса $\Im$, образует *полную систему типов операций*. Минимальная по включению полная система типов операций называется *операционным базисом* B_o. Операционный базис задается множеством соответствующих подграфов склейки. *Конструктивное описание* H-замкнутого класса $\Im$ задается тройкой $\langle H, B_e, B_o \rangle$.

К настоящему времени получены конструктивные описания для классов всех графов, мультиграфов, обыкновенных графов, триангулированных, планарных, двудольных, расщепляемых, эйлеровых, а также для графов с различными комбинациями указанных свойств [2,3,6,8–11]. Знание конструктивных описаний позволяет эффективно решать различные прикладные задачи на графах [4,5]. Установлено, что каждый H-замкнутый класс графов имеет единственный элементный базис [2] и, по крайней мере, один операционный базис [7].

В работе рассматриваются конструктивные описания класса гамильтоновых графов, обладающие различной величиной избыточности. Используются обозначения: $E(G)$ – множество ребер графа G; $G(E')$ – подграф графа G, порожденный подмножеством ребер $E' \subseteq E(G)$; K_n – полный n-вершинный граф, L_n – цепь, содержащая n вершин; O_n – пустой граф, содержащий n вершин (O_0 – нуль-граф).

Построение конструктивных описаний

Пусть G_1 и G_2 – произвольные гамильтоновы графы. Граф G, допускающий представление в виде $(G_1 \circ G_2)\widetilde{G}$, также будет гамильтоновым, если отождествляемый подграф хотя бы одного из графов G_1 или G_2 содержит все его вершины либо отождествляемые подграфы графов-операндов содержат по 2 вершины, являющиеся смежными в их гамильтоновых циклах. Действительно, в первом случае гамильтонов цикл графа-операнда, обладающего не меньшим числом вершин, будет гамильтоновым циклом результирующего графа. Во втором случае гамильтоновый цикл результирующего графа состоит из пореберно непересекающихся гамильтоновых цепей графов-операндов. Операции, удовлетворяющие указанным ограничениям, называются операциями H_g- склейки. Операции H_g-склейки сохраняют отсутствие кратных ребер, если каждой паре несмежных в $\widetilde{G}$ вершин соответствуют несмежные вершины хотя бы в одном из графов-операндов G_1 или G_2.Такие операции обозначаются как операции $\prec H_g \succ$-склейки.

Степень избыточности конструктивных описаний, построенных на основе операций $\prec H_g \succ$-суперпозиции, зависит естественным образом от количества ребер, включаемых в отождествляемые подграфы. Без избыточности можно задать лишь гамильтоновы эйлеровы графы, множество ребер которых разбивается на пореберно непересекающиеся простые циклы. К таким графам относятся, например, полные графы K_{2n+1}, $n = 2,3,\ldots$.

Для произвольных гамильтоновых графов справедлива

Теорема. Конструктивные описания $\prec H_g \succ$-замкнутого класса гамильтоновых графов имеют элементный базис $B_e = \{C_1, C_2, \ldots\}$ и один из трех операционных базисов $B_o^1 = \{O_1, L_2, C_4, C_5, \ldots\}$, $B_o^2 = \{O_1, L_2, L_3, \ldots\}$ или $B_o^3 = \{O_1, L_2, (L_{n'} \circ L_{n''})O_0\}$, $n', n'' \geq 2$.

Доказательство. Поскольку все графы элементного базиса B_e являются гамильтоновыми и операции $\prec H_g \succ$-склейки сохраняют это свойство, то все графы, реализуемые операциями $\prec H_g \succ$-суперпозиции, принадлежат классу гамильтоновых графов.

Покажем, что при этом можно получить любой гамильтонов граф G.

Если граф G содержит петли и (или) кратные ребра, то его можно представить соответственно в виде $(G' \circ C_1)O_1$ или $(G' \circ C_2)L_2$, где граф $G' \cong G(E \setminus C_1)$ или $G' \cong G(E \setminus e)$ содержит на одну петлю или на одно кратное ребро меньше, чем граф G. Применяя к графу G' те же рассуждения, приходим к обыкновенным гамильтоновым графам.

Далее, не теряя общности рассуждений, ограничимся рассмотрением обыкновенных гамильтоновых графов $G \notin B_e$, содержащих $n \geq 4$ вершин. Пусть C_n – гамильтонов цикл (один из гамильтоновых циклов) графа G. Ребра графа G, не принадлежащие выделенному гамильтонову циклу C_n, называются *хордальными*. Хордальное ребро является *разделяющим*, если его концевые вершины образуют разделяющее множество вершин графа G.

Покажем, что использования операций $\prec H_g \succ$-склейки по графам из множеств B_o^1, B_o^2 или B_o^3 достаточно для построения графа G исходя из циклов C_n, $n \geq 3$.

1. *Подграфы склейки* $\widetilde{G} \in B_o^1$. При наличии в графе G разделяющего хордального ребра L_2 воспользуемся представлением G в виде $(G_1 \circ G_2)L_2$. Применяя далее это представление к гамильтоновым графам G_1 и G_2, приходим либо к графам из B_e, либо к графам, не содержащим разделяющих хордальных ребер. В последнем случае у каждого такого графа G должно быть не менее двух хордальных ребер. Граф G допускает представление в виде $(G_1 \circ G_2)C_n$, в котором указанные два хордальных ребра распределяются между графами G_1 и G_2. При наличии в

графе G других хордальных ребер они распределяются между графами G_1 и G_2 произвольно. Применяя к графам G_1 и G_2 все предыдущие представления, приходим в итоге либо к графам из B_e, либо к графам с одним хордальным ребром, допускающим представление вида $(C_{n'} \circ C_{n''})L_2$, $n', n'' \geq 3$, $n' + n'' = n + 2$. Рассматривая этот процесс в обратном направлении, получаем суперпозицию операций $\prec H_g \succ$-склейки графов из B_e по подграфам $\widetilde{G} \in B_o^1$, реализующую граф G.

2. *Подграфы склейки* $\widetilde{G} \in B_o^2$. Выделим в графе G произвольное хордальное ребро e и цепь $L_{\widetilde{n}}$, $3 \leq \widetilde{n} \leq n-1$, принадлежащую гамильтонову циклу, соединяющую концевые вершины ребра e. При наличии других хордальных ребер разобьем их на два класса. К первому классу отнесем хордальные ребра, концевые вершины которых принадлежат цепи $L_{\widetilde{n}}$. Все остальные хордальные ребра отнесем ко второму классу. Обыкновенный гамильтонов граф $G \notin B_e$, содержащий $n \geq 4$ вершин, допускает представление в виде $(G_1 \circ G_2)L_{\widetilde{n}}$, в котором хордальные ребра первого класса распределяются произвольно между графами G_1 и G_2 и при этом граф G_1 содержит гамильтонов цикл и все его хордальные ребра второго класса, а граф G_2 содержит цепь $L_{\widetilde{n}}$ и ребро e. Таким образом, граф G_1 содержит, по крайней мере, на одно хордальное ребро меньше, чем граф G, а граф G_2 содержит, по крайней мере, на одну вершину меньше, чем граф G. Применяя далее аналогичные представления для графов G_1 и G_2, приходим либо к графам из B_e, либо к графам с одним хордальным ребром, допускающим представление в виде $(C_n \circ C_{\widetilde{n}})L_{\widetilde{n}}, 3 \leq \widetilde{n} \leq n-1$. Рассматривая данный процесс в обратном направлении, получаем суперпозицию операций $\prec H_g \succ$-склейки графов из B_e по подграфам $\widetilde{G} \in B_o^2$, реализующую граф G.

3. *Подграфы склейки* $\widetilde{G} \in B_o^3$. Вначале воспользуемся, если это возможно, представлениями вида $(G_1 \circ G_2)L_2$ и получим гамильтоновы графы, хордальные ребра которых не являются разделяющими. Ясно, что хордальных ребер не менее двух. Каждый такой гамильтонов граф G допускает представление в виде $(G_1 \circ G_2)\widetilde{G}$, в котором графы G_1 и G_2 являются гамильтоновыми с числом вершин $|V(G_1)| = n$, $|V(G_2)| = |V(\widetilde{G})| = \widetilde{n}$, $4 \leq \widetilde{n} \leq n$, $\widetilde{G} \cong (L_{n'} \circ L_{n''})O_0$, $n' + n'' = \widetilde{n}$, $n', n'' \geq 2$. Отождествляемые подграфы графов G_1 и G_2 принадлежат соответственно их гамильтоновым циклам C_n и $C_{\widetilde{n}}$. При наличии в G хордальных ребер, соединяющих вершины из $L_{n'}$ и (или) $L_{n''}$, они распределяются между графами G_1 и G_2 произвольно. Таким образом, граф G_1 содержит, по крайней мере, на два хордальных ребра меньше, чем граф G. Граф G_2 содержит, по крайней мере, на два хордальных ребра, либо на две вершины, либо на одну вершину и одно хордальное ребро меньше, чем граф G. Применяя к G_1 и G_2 все предыдущие представления, приходим в итоге к графам из B_e. Рассматривая данный процесс в обратном направлении, получаем суперпозицию операций $\prec H_g \succ$-склейки графов из B_e по подграфам $\widetilde{G} \in B_o^3$, реализующую граф G.

Минимальность по включению множества B_e следует из того, что ни один из графов этого множества не может быть получен в результате операций склейки из других графов этого множества. Установим минимальность по включению множеств B_o^1, B_o^2 и B_o^3. Без операций склейки по O_1 не обойтись при построении гамильтоновых графов, содержащих вершины, инцидентные не менее чем двум петлям. Только с помощью операции склейки по L_2 можно построить гамильтонов граф с 2 вершинами, содержащий 3 кратных ребра. Без операций склейки либо по C_i, $i = 4,5,\ldots$ (при $\widetilde{G} \in B_o^1$), либо по L_j, $j = 3,4,\ldots$ (при $\widetilde{G} \in B_o^2$), либо по $(L_{n'} \circ L_{n''})O_0$, $n', n'' \geq 2$ (при $\widetilde{G} \in B_o^3$) не обойтись при построении гамильтоновых графов, гомеоморфных K_4.

Замечание. Если при использовании операционных базисов B_o^2 или B_o^3 соответственно в представлениях $(G_1 \circ G_2)L_{\widetilde{n}}$ или $(G_1 \circ G_2)\widetilde{G}$ при распределении хордальных ребер результирующих графов, которые можно отнести к любому из графов-операндов, относить их только к графу-операнду G_1, то графы $G_2 \in B_e$, и из доказанной теоремы получаем

Следствие 1. Класс гамильтоновых графов канонически $\prec H_g \succ$-замкнут с элементным базисом $B_e = \{C_1, C_2,\ldots\}$ и операционными базисами $B_o^2 = \{O_1, L_2, L_3, \ldots\}$ или $B_o^3 = \{O_1, L_2, (L_{n'} \circ L_{n''})O_0\}$, $n', n'' \geq 2$.

Для обыкновенных гамильтоновых графов справедливо

Следствие 2. Класс обыкновенных гамильтоновых графов $\prec H_g \succ$- замкнут с элементным базисом $B_e = \{C_3, C_4, \ldots\}$ и операционными базисами $B_o^1 = \{L_2, C_4, C_5, \ldots\}$, $B_o^2 = \{L_3, L_4, \ldots\}$ или $B_o^3 = \{L_2, (L_{n'} \circ L_{n''})O_0\}, n', n'' \geq 2$.

Список литературы

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384с.
2. Иорданский М.А. Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3. № 4. С. 35–63.
3. Иорданский М.А. Сложность конструктивных описаний планарных графов // Материалы IX Межгосударственной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 16–19 декабря 1998 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 20–24.
4. Иорданский М.А. Конструктивные описания и экономное кодирование графов // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2000. Вып.1(22). С. 88–93.
5. Иорданский М.А. Оптимальные нумерации вершин графов // Математические вопросы кибернетики. 2001. Вып.10. С. 83–102.
6. Иорданский М.А. Базисы планарных графов // Труды V Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Ратмино, 26–29 мая 2003 г.). М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003. С. 36–38.
7. Бурков Е.В. Операционные базисы замкнутых классов графов // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 18–23 июня 2007 г.). М.: Изд-во мехмата МГУ, 2007. С. 105–116.
8. Иорданский М.А. Конструктивные описания двудольных графов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань: Изд-во «Отечество», 2008. С. 44.
9. Иорданский М.А. Конструктивные описания расщепляемых графов // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). М.: Изд-во мехмата МГУ, 2010. С. 306–308.
10. Бурков Е.В. Конструктивные описания планарных и эйлеровых графов // Вестник Нижегородского государственного университета. Математика. 2010. № 5(1). С. 165–170.
11. Иорданский М.А. Функциональные построения в теории графов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.) / Под ред. Ю.И. Журавлева. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 183–187.

CONSTRUCTIVE DESCRIPTIONS OF HAMILTONIAN GRAPHS

M.A. Iordanskii

The processes of constructing Hamiltonian graphs are studied using operations of union and intersection (gluing operations), which preserve the property of being Hamiltonian. The generating bases (elemental and operational) of such processes are identified.

Keywords: Hamiltonian graph, gluing operation, closed class, elemental and operational bases, constructive description.