УДК 517.977.1

О КЛАССИФИКАЦИИ СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТ МНОЖЕСТВА НЕУПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В.П. Савельев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vpsavelyev@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.09.2011

Методами качественной теории дифференциальных уравнений проводится полная классификация связных компонент множества неуправляемости нелинейного локально управляемого осциллятора, содержащих в составе своей границы одну порождающую седловую точку.

Ключевые слова: качественная теория дифференциальных уравнений, связная компонента множества неуправляемости.

В работе изучается структура границы Г области управляемости U локально управляемого [1] нелинейного осциллятора, движение которого задано дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = u(t)\,, \tag{1}$$

где кусочно-непрерывная функция $u(t)$, со значениями в заданном отрезке $[q,\ p]$, задает управляемое воздействие, а непрерывно-дифференцируемая в R^2 функция $f(x, \dot{x})$ задает неуправляемое воздействие (воздействие среды) на движение объекта. Вследствие локальной управляемости системы (1) множество управляемости U будет открытой связной областью. Множество неуправляемости N замкнуто и представляет собой, как правило, совокупность связных множеств, которые называются *связными компонентами* множества неуправляемости. В работе [1] проведена классификация связных компонент множества неуправляемости N при условии диссипативности объекта (1). В работах [2, 3] структура границы Г изучалась при более общих предположениях. Показано [2], что кроме нескольких простых типов связных компонент множества неуправляемости (они указаны) любая связная компонента содержит в составе своей границы хотя бы одну седловую точку вместе с ее ω-сепаратрисами одной из автономных систем

$$\dot{x} = y, \dot{y} = p - f(x, y)\,, \tag{2}$$

$$\dot{x} = y, \dot{y} = q - f(x, y), \tag{3}$$

которые будем называть соответственно p-системой и q-системой. В работе [3] в предположении, что область управляемости расположена в ограниченной части фазовой плоскости, изложен алгоритм построения границы Г, из которого следует, что ее структура может быть чрезвычайно сложной при большом числе седловых точек систем (2) и (3). В настоящей работе предлагается *метод классификации* связных компонент множества неуправляемости объекта (1), содержащих в составе своей границы лишь одну седловую точку одной из систем (2), (3) вместе с ее ω-сепаратрисами (будем называть ее порождающей седловой точкой связной компоненты).

Свойство 1. Любая траектория p-системы (q-системы) либо целиком принадлежит множеству управляемости U, либо целиком принадлежит множеству неуправляемости N, либо существует разделяющая точка R, такая, что положительная полутраектория p-системы (q-системы) $\gamma_p^+(R)$ $(\gamma_q^+(R))$ принадлежит множеству N, а отрицательная полутраектория p-системы (q-системы) $\gamma_p^-(R)$ $(\gamma_q^-(R))$ принадлежит множеству U.

Свойство 2. Вместе с точкой M, лежащей в полуплоскости $G^+ = \{(x, y): y > 0\}$ ($G^- = \{(x, y): y < 0\}$) и принадлежащей границе Г, в состав границы входит целиком или частично [1]: непродолжаемая в G^+ (G^-) траектория $\gamma_p(M)$ p-системы, если точка M не является разделяющей для этой траектории; непродолжаемая в G^+ (G^-) траектория $\gamma_q(M)$ q-системы, если точка M не является разделяющей для этой траектории; обе непродолжаемые в G^+ (G^-) положительные полутраектории $\gamma_p^+(M)$, $\gamma_q^+(M)$, если точка M является разделяющей точкой для обеих траекторий.

Свойство 3. Точки границы Г, лежащие на оси OX, подразделяются на 4 типа: левосторонние, правосторонние, двусторонние и несущественные [1] в зависимости от того, с какой стороны от граничной точки расположена область управляемости.

Определение 1. Пусть непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(M)$ имеет предельную точку на оси OX, являющуюся седлом p-системы. Будем называть в соответствии с [4] α-продолжением полутраектории $\gamma_p^+(M)$ и траектории $\gamma_p(M)$ в G^+ α-сепаратрису этого седла, непродолжаемую в G^+. Траекторию $\gamma_p(M)$, продолженную таким образом через седловые точки p-системы, будем называть α-непродолжаемой в G^+. Если α-непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_p(M)$ имеет предельную точку C на оси OX, не являющуюся седлом p-системы, будем называть ее α-ограниченной, а точку C – ее конечной точкой, в противном случае траекторию $\gamma_p(M)$ будем называть α-неограниченной.

Определение 2. Пусть непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(M)$ имеет предельную точку на оси OX, являющуюся седлом p-системы. Будем называть ω-продолжением в G^+ полутраектории $\gamma_p^-(M)$ и траектории $\gamma_p(M)$ ω-сепаратрису этого седла, непродолжаемую в G^+. Траекторию $\gamma_p^-(M)$, продолженную таким образом через седловые точки p-системы, будем называть ω-непродолжаемой в G^+. Если ω-непродолжаемая в G^+ траектория $\gamma_p(M)$ имеет предельную точку A на оси OX, не являющуюся седлом p-системы, будем называть ее ω-ограниченной, а точку A – её начальной точкой, в противном случае траекторию $\gamma_p(M)$ будем называть ω-неограниченной.

Аналогично вводятся понятия α-непродолжаемой, α-ограниченной, α-неограниченной, ω-непродолжаемой, ω-ограниченной, ω-неограниченной в G^+ траектории q-системы, а также α-непродолжаемых, α-ограниченных, α-неограниченных, ω-непродолжаемых, ω-ограниченных, ω-неограниченных в G^- траекторий p-системы и q-системы.

Определение 3. Траекторию p-системы или q-системы, α-непродолжаемую и ω-непродолжаемую в G^+ (в G^-), будем называть αω-непродолжаемой в G^+ (в G^-) траекторией.

Определение 4. Пусть в состав границы Γ области управляемости U входит лишь конечная дуга AC αω-непродолжаемой в G^+ или в G^- траектории $\gamma_q(M)$ ($\gamma_p(M)$) и при этом точка A не является разделяющей для $\gamma_q(M)$ ($\gamma_p(M)$). Тогда точки A и C будем называть соответственно начальной граничной точкой и конечной граничной точкой траектории $\gamma_q(M)$ ($\gamma_p(M)$). Отметим, что в случае αω-непродолжаемой в G^+ траектории $\gamma_q(M)$ ($\gamma_p(M)$) начальная граничная точка A будет правосторонней (левосторонней) граничной точкой оси OX, а конечная граничная точка C будет левосторонней (правосторонней) граничной точкой оси OX. В случае же αω-непродолжаемой в G^- траектории $\gamma_q(M)$ ($\gamma_p(M)$), наоборот, точка A будет левосторонней (правосторонней) граничной точкой оси OX, а точка C будет правосторонней (левосторонней) граничной точкой оси OX.

В данной работе кроме локальной управляемости объекта (1) мы будем предполагать, что:

a) системы (2) и (3) имеют лишь простые состояния равновесия;

b) положительные полутраектории p-системы и q-системы не имеют вертикальных асимптот;

c) любая α-непродолжаемая в G^+ (в G^-) полутраектория $\gamma_q^+(M)$ ($\gamma_p^+(M)$) является α-ограниченной, то есть имеет конечную точку («условие эффективности торможения»).

При построении границы Γ связной компоненты множества неуправляемости мы часто будем использовать понятия положительного луча $L^+(A) = \{(x, y)\colon x = x_0, y \geq y_0\}$ и отрицательного луча $L^-(A) = \{(x, y)\colon x = x_0, y \leq y_0\}$, выходящих из некоторой точки $A(x_0,y_0)$. А именно, мы будем использовать их следующие очевидные свойства: если луч $L^+(A)$ расположен в верхней полуплоскости G^+, то все допустимые траектории объекта (1) пересекают его слева направо, если же луч $L^-(A)$ расположен в нижней полуплоскости G^-, то все допустимые траектории объекта (1) пересекают его справа налево.

Лемма 1. Если в состав границы Γ входит α-непродолжаемая в G^+ (G^-) полутраектория $\gamma_p^+(M)$ ($\gamma_q^+(M)$), то она обязательно имеет конечную граничную точку.

Действительно, в противном случае область, расположенная справа (слева) от луча $L^+(M)$ ($L^-(M)$) и слева от полутраектории $\gamma_p^+(M)$ ($\gamma_q^+(M)$), будет принадлежать множеству неуправляемости N, поскольку допустимые траектории объекта (1) могут входить в эту область лишь пересекая луч $L^+(M)$ ($L^-(M)$), а выходить из нее – лишь пересекая полутраекторию $\gamma_p^+(M)$ ($\gamma_q^+(M)$). А это означает, что с обеих сторон от полутраектории $\gamma_p^+(M)$ ($\gamma_q^+(M)$) будет располагаться множество неуправляемости N, то есть она не может входить в состав границы Γ.

Лемма 2. Пусть в состав границы Γ некоторой связной компоненты множества неуправляемости входят:

– дуга BC αω-непродолжаемой в G^+ траектории $\gamma_p(M)$, где точки B и C являются соответственно ее начальной и конечной граничными точками;

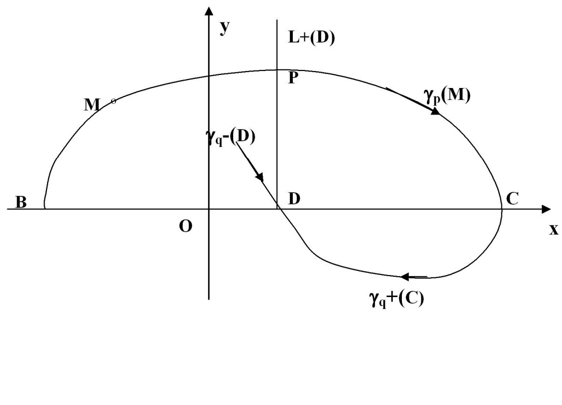

Рис. 1

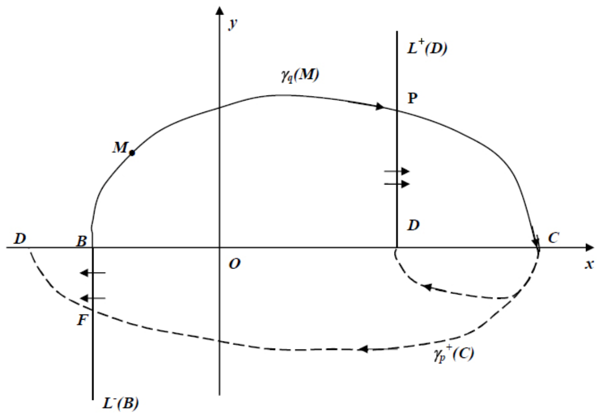

Рис. 2

– дуга CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^+(C)$, где точка D является ее конечной граничной точкой.

Если точка D лежит на интервале (BC) оси ОX и интервал (DC) оси OX не содержит начало координат, то точка D будет порождающей седловой точкой этой связной компоненты.

Действительно, вместе с левосторонней граничной точкой D в состав границы Г может входить [1] либо α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(C)$, либо ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(D)$. Построим луч $L^+(D)$, который пересечет дугу BC в некоторой точке P. Очевидно, что область, ограниченная отрезком [DP] луча $L^+(D)$ (справа от него), дугой PC траектории $\gamma_p(M)$ и дугой CD полутраектории $\gamma_q^+(C)$ (рис. 1), принадлежит множеству неуправляемости. Это значит, что α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(D)$ не может входить в состав границы Г. Следовательно, в состав границы Г входит ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(D)$ целиком или частично, которая, как и дуга CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_q^+(C)$, является ω-сепаратрисой седла D q-системы.

Замечание. Лемма остается справедливой, если вместо дуги BC αω-непродолжаемой в G^+ траектории p-системы взять ω-неограниченную в G^+ полутраекторию $\gamma_p^-(C)$.

Лемма 3. Пусть в состав границы Г некоторой связной компоненты множества неуправляемости входят:

– дуга BC αω-непродолжаемой в G^- траектории $\gamma_q(M)$, где точки B и C являются соответственно ее начальной и конечной граничными точками;

– дуга CD α-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_p^+(C)$, где точка D является её конечной граничной точкой.

Если точка D лежит на интервале (CB) оси OX и интервал (CD) оси OX не содержит начало координат, то точка D будет порождающей седловой точкой этой связной компоненты. Доказывается так же, как лемма 2.

Замечание. Лемма остается справедливой, если вместо дуги BC αω-непродолжаемой в G^- траектории q-системы взять ω-неограниченную в G^- полутраекторию $\gamma_q^-(C)$.

Лемма 4. Пусть в состав границы Г некоторой связной компоненты множества неуправляемости входит дуга BC αω-непродолжаемой в G^+ траектории q-системы, где точка B отрицательной полуоси OX и точка C положительной полуоси OX являются соответственно ее начальной и конечной граничными точками. Если α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(C)$ имеет конечную граничную точку D, то она может входить в состав границы Г только в том случае, если точка D расположена на интервале (BO) оси ОX.

Предположим, что дуга CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(C)$ входит в состав границы Г и точка D лежит правее точки O. Построим луч $L^+(D)$, который пересечет дугу BC в некоторой точке P. Нетрудно видеть, что область, ограниченная дугой CD α-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^+(C)$, отрезком [DP] луча $L^+(D)$ и дугой PC αω-непродолжаемой в G^+ траектории q-системы (рис. 2), принадлежит множеству неуправляемости. Это противоречит тому, что α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(C)$ входит в состав границы Г, поскольку с обеих сторон от нее будет располагаться множество неуправляемости.

Предположим, что точка D лежит левее точки B. Построим луч $L^-(B)$, который пересечет дугу CD в некоторой точке F. Нетрудно видеть, что область, расположенная вне замкнутой кривой, образованной отрезком [BF] луча $L^-(B)$ (слева от него), дугой BC и дугой CF α-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^+(C)$ (рис. 2), принадлежит множеству неуправляемости. Это противоречит тому, что вся дуга CD α-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^+(C)$ входит в состав границы Г.

Аналогично доказывается

Лемма 5. Пусть в состав границы Г некоторой связной компоненты множества неуправляемости входит дуга BC αω-непродолжаемой в G^{-} траектории p-системы, где точка B положительной полуоси OX и точка C отрицательной полуоси OX являются соответственно ее начальной и конечной граничными точками. Если α-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_q^+(C)$ имеет конечную граничную точку D, то она может входить в состав границы Г только в том случае, если точка D расположена на интервале (OB) оси OX.

В силу леммы 1 и предположения с) («условие эффективности торможения») любая связная компонента множества неуправляемости N будет иметь в пересечении с осью OX хотя бы один отрезок (конечный или бесконечный). Предположим, что хотя бы один такой отрезок расположен на положительной полуоси OX и точка B является левым концом ближайшего к началу координат такого отрезка. Это означает, что точка B является ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой, входящей в состав границы Г некоторой связной компоненты множества неуправляемости.

В окрестности левосторонней граничной точки B возможны четыре варианта [1] строения границы Г. В [1] проводится классификация возможных типов связной компоненты множества неуправляемости для одного случая, когда в состав границы Г вместе с седловой точкой B q-системы входят обе ее ω-сепарат-рисы: ω-непродолжаемая в G^{+} сепаратриса S_1 частично или полностью и ω-непродолжаемая в G^{-} сепаратриса S_2 частично или полностью. В остальных трех случаях набор различных типов связных компонент не будет полным.

Определение 5. Если в состав границы Г входит вся ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^{+} сепаратриса S_1, то будем говорить, что в состав границы Г входит сепаратриса $S_1(1F)$; если в состав границы Г входит лишь дуга RB ω-непродолжаемой в G^{+} сепаратрисы S_1, где точка R является ее разделяющей точкой, то будем говорить, что в состав границы Г входит сепаратриса $S_1(1R)$, если в состав границы Г входит лишь дуга A_1B ω-непродолжаемой в G^{+} сепаратрисы S_1, где точка A_1 является ее начальной граничной точкой, расположенной на отрицательной полуоси OX, то будем говорить, что в состав границы Г входит как минимум сепаратриса $S_1(1E)$.

В случаях $S_1(1F)$ и $S_1(1R)$ процесс построения границы Г на основе сепаратрисы S_1 будет закончен. В случае $S_1(1E)$ процесс построения границы Г на основе сепаратрисы S_1 будет также закончен, если в состав границы Г вместе с начальной граничной точкой A_1 войдет α-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_q^+(A_1)$. Если же в состав границы Г вместе с начальной граничной точкой A_1 войдет ω-непродолжаемая в G^{-} полутраектория $\gamma_p^-(A_1)$ частично или полностью, то мы будем ее рассматривать как двукратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 и процесс построения границы Г на основе сепаратрисы S_1 будет продолжен. Если в состав границы Г входит вся ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^{-} полутраектория $\gamma_p^-(A_1)$, то будем говорить, что в состав границы Г входит сепаратриса $S_1(2F)$. Если двукратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является дуга A_2A_1 ω-непродолжаемой в G^{-} полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$, где точка A_2 является ее начальной граничной точкой, то возможны следующие два варианта, в зависимости от того, каким является интервал (A_1A_2) оси OX. Если интервал (A_1A_2) оси OX содержит в себе начало координат, то двукратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 будем называть внешним. В этом случае будем говорить, что в состав границы Г входит: как минимум $S_1(2E)$, если двукратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является вся дуга A_2A_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$; $S_1(2R)$, если двукратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является лишь дуга RA_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$, где точка R является разделяющей точкой. Если интервал (A_1A_2) оси OX не содержит в себе начало координат, то двукратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 будем называть внутренним. В этом случае будем говорить, что в состав границы Г входит: $S_1(1E+1R)$, если двукратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является лишь дуга RA_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$; как минимум $S_1(1E+1I)$, если двукратным ω-продолжением сепаратрисы S_1 является вся дуга A_2A_1 полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$.

В случаях $S_1(2F)$, $S_1(2R)$ и $S_1(1E+1R)$ процесс построения границы Г на основе сепаратрисы S_1 будет закончен. В случаях $S_1(2E)$ и $S_1(1E+1I)$ процесс построения границы Г на основе сепаратрисы S_1 будет также закончен, если в состав границы Г вместе с начальной граничной точкой A_2 войдет α-непродолжаемая в G^{+} полутраектория $\gamma_p^+(A_2)$. Если же в состав границы Г

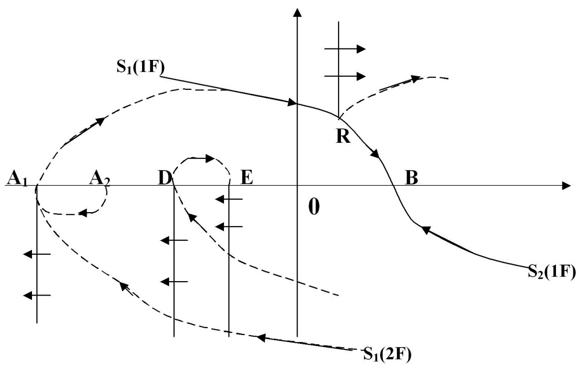

Рис. 3

вместе с начальной граничной точкой A_2 войдет ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ частично или полностью, то мы будем ее рассматривать как трехкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 и процесс построения границы Γ будет продолжен и т.д. Отметим, что если на каком-то шаге ω-продолжение сепаратрисы S_1 оказалось внутренним, то все дальнейшие ω-продолжения сепаратрисы S_1 могут быть только внутренними. Аналогичный смысл имеют обозначения $S_2(1F)$, $S_2(1R)$, $S_2(1E)$, а также $S_2(2F)$, $S_2(2R)$, $S_2(2E)$, $S_2(1E+1I)$, $S_2(1E+1R)$ и т.д.

В зависимости от того, какие ω-продолжения сепаратрис S_1 и S_2 порождающей седловой точки B q-системы входят в состав границы Γ, образуется тот или иной тип связной компоненты множества неуправляемости: будем обозначать символом $K_q(1F,1F)$ связную компоненту, границу которой образуют сепаратрисы $S_1(1F)$ и $S_2(1F)$; символом $K_q(1R, 2R)$ – связную компоненту, границу которой образуют сепаратрисы $S_1(1R)$ и $S_2(2R)$; символом $K_q(2E+1I,1E)$ – связную компоненту, границу которой образуют сепаратрисы $S_1(2E+1I)$ и $S_2(1E)$, и т.д.

Теорема 1. Пусть точка B положительной полуоси OX является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Γ входит $S_2(1F)$, то связная компонента имеет либо тип $K_q(1F,1F)$, либо тип $K_q(2F,1F)$.

Действительно, ω-продолжение сепаратрисы S_1 в G^+ не может иметь вид $S_1(1R)$ или $S_1(1E)$. В первом случае в состав границы Γ вместе с разделяющей точкой R должна войти и непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(R)$, чего быть не может, поскольку она лежит в области, ограниченной лучом $L^+(R)$ (справа от него), сепаратрисами $S_1(1R)$, $S_2(1F)$ (рис. 3) и принадлежащей множеству неуправляемости. Во втором случае вместе с начальной граничной точкой A_1, лежащей на отрицательной полуоси OX (на положительной полуоси точка A_1 не может располагаться в силу выбора точки B), в состав границы Γ должна войти непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^+(A_1)$. Однако она лежит внутри области, ограниченной лучом $L^-(A_1)$ (слева от него), сепаратрисами $S_1(1E)$, $S_2(1F)$ и принадлежащей множеству неуправляемости. Таким образом, либо в состав границы Γ должна войти $S_1(1F)$, и тогда связная компонента имеет тип $K_q(1F,1F)$, либо сепаратриса S_1 имеет двукратное ω-продолжение через точку A_1, то есть в состав границы Γ входит ω-непродолжа-емая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(A_1)$ целиком или частично (рис. 3).

Предположение о том, что двукратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 имеет вид $S_1(2R)$ или $S_1(1E+1R)$, как и в случае $S_1(1R)$, приводит к противоречию с тем, что в состав границы Γ должна входить и положительная полутраектория $\gamma_q^+(R)$. Это ω-продолжение не может быть внешним, то есть иметь вид $S_1(2E)$, так как траектория p-системы $\gamma_p^-(A_1)$ не может пересекать траекторию q-системы $S_2(1F)$ в G^- справа налево. Покажем, что если это ω-продолжение является внутренним, то есть имеет вид $S_1(1E+1I)$, то связная компонента будет иметь в составе своей границы еще одну порождающую седловую точку. Действительно, в этом случае в состав границы Γ должна входить дуга A_2A_1 ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$, где точка A_2 располагается на интервале (A_1O) отрицательной полуоси OX. Поскольку точка A_2 является левосторонней граничной точкой, то связная компонента будет содержать в себе некоторый отрезок $[A_2D]$ отрицательной полуоси OX, так что точка D будет правосторонней граничной точкой. Вместе с точкой D в состав границы Γ должна войти либо непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^+(D)$, либо непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(D)$ целиком или частично. Однако первый случай приводит к противоречию, поскольку полутраектория $\gamma_q^+(D)$ будет располагаться внутри области, ограниченной лучом $L^-(D)$ (слева от него), отрезком $[A_2D]$, сепаратрисами $S_1(1E+1I)$, $S_2(1F)$ и принадлежащей множеству неуправляемости. Таким образом, в состав границы Γ должна войти непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^-(D)$ целиком или частично. Покажем, что вместе с точкой D в состав границы Γ должна войти и непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(D)$ целиком или частично, то есть точка D будет второй порождающей седловой точкой в соста-

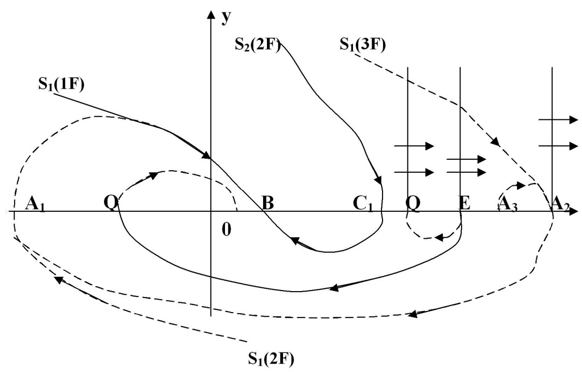

Рис. 4

ве границы связной компоненты. Действительно, в противном случае в состав границы Г должна войти непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(D)$. Однако этот случай приводит к противоречию, поскольку полутраектория $\gamma_q^+(D)$ не может пересечь дугу A_1B сепаратрисы S_1 и поэтому должна иметь конечную граничную точку E на интервале (DO) оси OX (точка E не может располагаться на интервале (OB) в силу выбора точки B). Но тогда область, ограниченная лучом $L^-(E)$ (слева от него), дугой DE, отрезком $[A_2D]$, сепаратрисами $S_1(1E+1I)$, $S_2(1F)$ (рис. 3), принадлежит множеству неуправляемости. Это противоречит тому, что дуга DE α-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^+(D)$ входит в состав границы Г, поскольку с обеих сторон от нее располагается множество неуправляемости. Итак, предположение о том, что двукратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 имеет вид $S_1(1E+1I)$, приводит к противоречию со статусом связной компоненты. Поэтому если сепаратриса S_1 имеет двукратное ω-продолжение, то оно может иметь лишь вид $S_1(2F)$, и в этом случае связная компонента будет иметь тип $K_q(2F,1F)$.

Теорема 2. Пусть точка B положительной полуоси OX является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой. Если в состав границы Г входит $S_2(2F)$, то связная компонента имеет лишь один из указанных трех типов: либо $K_q(1F, 2F)$, либо $K_q(2F, 2F)$, либо $K_q(3F, 2F)$.

Итак, пусть в состав границы Г связной компоненты входит $S_2(2F)$, то есть некоторая дуга C_1B ω-непродолжаемой в G^- сепаратрисы S_2 и ω-непродолжаемая ω-неограниченная в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(C_1)$ (рис. 4). Так как точка B является порождающей седловой точкой q-системы, то в состав границы Г входит также ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 целиком или частично.

Заметим вначале, что ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 не может пересечь ω-непродолжаемую ω-неограниченную в G^+ полутраекторию $\gamma_p^-(C_1)$, ибо тогда, в соответствии со свойством 2, сепаратриса S_1 не может входить в состав границы Г. Аналогично тому, как это сделано в теореме 1, показывается, что в состав границы Г не может входить ни $S_1(1R)$, ни $S_1(1E)$. Таким образом, или в состав границы Г входит $S_1(1F)$, и мы получим связную компоненту $K_q(1F, 2F)$, либо ω-непродолжаемая в G^+ сепаратриса S_1 имеет двукратное ω-продолжение через начальную граничную точку A_1 (рис. 4). Аналогично тому, как это сделано в теореме 1, показывается, что двукратное ω-продолжение сепаратрисы S_1 не может иметь вид $S_1(2R)$ или $S_1(1E+1R)$, а вариант $S_1(1E+1R)$ влечет за собой появление второй порождающей седловой точки в составе границы Г. Значит, либо в состав границы Г должна войти $S_1(2F)$, и тогда мы получим связную компоненту $K_q(2F, 2F)$, либо сепаратриса S_1 имеет двукратное ω-продолжение типа $S_1(2E)$, то есть в состав границы Г входит вся дуга A_2A_1 ω-непродолжаемой в G^- полутраектории $\gamma_p^-(A_1)$, где точка A_2 располагается на положительной полуоси OX. Эта точка будет правее точки C_1, так как траектория p-системы не может пересекать в G^- траекторию q-системы справа налево. Вместе с правосторонней граничной точкой A_2 в состав границы Г должна входить ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$, а не α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(A_2)$, так как последняя будет лежать внутри области, ограниченной лучом $L^+(A_2)$ (справа от него), сепаратрисой $S_2(2E)$, сепаратрисой $S_1(2F)$ (рис. 4) и принадлежащей множеству неуправляемости.

Итак, сепаратриса S_1 имеет трехкратное ω-продолжение через начальную граничную точку A_2. Предположение, что полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ имеет разделяющую точку R, приводит к противоречию с тем, что в состав границы Г должна входить и α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(R)$. Вариант $S_1(3E)$ невозможен, поскольку непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(A_2)$ не может пересечь справа налево ω-непродолжаемую ω-неограниченную в G^+ полутраекторию $\gamma_p^-(C_1)$.

Покажем, что трехкратное ω-продолжение типа $S_1(2E+1I)$ влечет за собой появление второй порождающей седловой точки в составе границы Г связной компоненты множества неуправляемости. Предположим, что в состав границы Γ входит дуга A_3A_2 ω-непродолжаемой в G^+ полутраектории $\gamma_q^-(A_2)$, где точка A_3 является ее начальной граничной точкой и расположена справа от точки C_1 (рис. 4). Поскольку точка A_3 является правосторонней граничной точкой оси OX и точка C_1 является правосторонней граничной точкой оси OX, то на интервале (C_1A_3) существует левосторонняя граничная точка E, такая, что отрезок $[EA_3]$ принадлежит связной компоненте множества неуправляемости. Так как область, ограниченная лучом $L^+(E)$ (справа от него), отрезком $[EA_3]$ оси OX, сепаратрисой $S_1(2E+1I)$ и сепаратрисой $S_2(2F)$, принадлежит множеству неуправляемости, то в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^-(E)$ целиком или частично, а не α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^+(E)$. Если же предположить, что в состав границы Γ входит ω-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_q^-(E)$ целиком или частично, то это будет означать, что в состав границы Γ связной компоненты входит еще одна порождающая седловая точка. Значит, в состав границы Γ входит α-непродолжаемая в G^- полутраектория $\gamma_p^+(E)$, которая будет иметь конечную граничную точку Q либо на интервале (C_1E) оси OX, либо на интервале (A_1O) оси OX. Но первый случай невозможен, поскольку область, ограниченная лучом $L^+(Q)$ (справа от него), дугой EQ полутраектории $\gamma_p^+(E)$, отрезком $[EA_3]$ оси OX, сепаратрисой $S_1(2E+1I)$ и сепаратрисой $S_2(2F)$, принадлежит множеству неуправляемости, что означает, что с обеих сторон от дуги EQ располагается множество неуправляемости. Во втором случае в силу леммы 5 вместе с точкой Q в состав границы Γ может войти α-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_q^+(Q)$ лишь при условии, что ее конечная граничная точка будет лежать на интервале (OB) оси OX, но это противоречит выбору точки B. Значит, в состав границы Γ войдет ω-непродолжаемая в G^+ полутраектория $\gamma_p^-(Q)$, а это означает, что точка Q становится второй порождающей седловой точкой. Таким образом, трехкратное ω-продолжение сепаратрисы S_1, не приводящее к наличию еще одной порождающей седловой точки в составе границы Γ связной компоненты, возможно только в виде $S_1(3F)$, и в этом случае мы имеем связную компоненту типа $K_q(3F, 2F)$.

Теорема 2 с помощью метода полной математической индукции может быть обобщена.

Теорема 3. Пусть точка B положительной полуоси OX является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой положительной полуоси OX. Если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(mF)$, $m = 2, 3,\ldots$, то связная компонента имеет тип либо $K_q((m-1)F, mF)$, либо $K_q(mF, mF)$, либо $K_q((m+1)F, mF)$.

Также с помощью метода полной математической индукции и с использованием изложенной выше методики многократного ω-продолжения и α-продолжения траекторий p-системы и q-системы доказываются теоремы 4 и 5, результаты которых совместно с результатами теорем 1 и 3 означают полную классификацию связных компонент множества неуправляемости с одной порождающей седловой точкой q-системы для объекта (1).

Теорема 4. Пусть точка B положительной полуоси OX является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой положительной полуоси OX. Тогда:

– если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(1E+nI)$, n – натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q(2E+(n+1)I, 1E+nI)$;

– если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(1E+nR)$, n – натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q(2E+(n+1)R, 1E+nR)$.

Теорема 5. Пусть точка B положительной полуоси OX является единственной порождающей седловой точкой q-системы связной компоненты множества неуправляемости и ближайшей к началу координат левосторонней граничной точкой положительной полуоси OX. Тогда:

– если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(mE)$, m – натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q((m+1)E + 1I, mE)$;

– если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(mR)$, m – натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q((m+1)E + 2R, mR)$;

– если в состав границы Γ связной компоненты входит $S_2(mE+nI)$, m – натуральное число, $m \geq 2$, n – натуральное число, то связная компонента K имеет тип или $K_q((m+1)E+(n+1)I, mE+nI)$, или $K_q((m-1)E+(n-1)I, mE+nI)$;

– если в состав границы Г связной компоненты входит $S_2(mE+nR)$, m – натуральное число, $m \geq 2$, n – натуральное число, то связная компонента K имеет тип $K_q((m + 1)E + (n + 2)R, mE + nR)$ или $K_q((m – 1)E + (n – 2)R, mE + nR)$.

Отметим, что случай, когда точка B является ближайшей к началу координат правосторонней граничной точкой отрицательной полуоси OX и порождающей седловой точкой p-системы, входящей в состав границы Г некоторой связной компоненты множества неуправляемости, рассматривается аналогично с заменой траекторий и полутраекторий p-системы на траектории и полутраектории q-системы, полуплоскости G^+ на полуплоскость G^-, сепаратрисы S_1 на сепаратрису S_2 и наоборот.

Список литературы

1. Савельев В.П. Классификация связных компонент множества неуправляемости одномерного движения // Межвузовский сборник «Динамика систем». 1975. Вып. 5. С. 118–144.

2. Савельев В.П., Павлючонок З.Г. О наличии седловых точек в составе границы области управляемости нелинейного объекта второго порядка // Межвузовский сборник «Дифференциальные и интегральные уравнения». 1978. Вып. 2. С. 116–123.

3. Бутенина Н.Н., Павлючонок З.Г., Савельев В.П. Качественные методы глобального исследования областей управляемости на плоскости // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, №4. С. 555–568.

4. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др.]. М.: Наука, 1986. 568 с.

ON CLASSIFICATION OF CONNECTED COMPONENTS OF AN UNCONTROLLABILITY SET IN A NONLINEAR OSCILLATOR

V.P. Savelyev

For a nonlinear locally controlled oscillator, a complete classification is carried out of connected components of an uncontrollability set with boundaries having only one generating saddle point.

Keywords: nonlinear controlled oscillator, generating saddle point.