УДК 621.396

ФУНКЦИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И 2π-ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ВО ВРЕМЕНИ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО СИГНАЛА

В.И. Пройдаков

Филиал ЦНИИ «Комета» – КБ «Квазар», Нижний Новгород

vip713@sandy.ru

Поступила в редакцию 22.06.2011

Приводится доказательство стационарности функции автокорреляции функционального (нелинейного, безынерционного) преобразования суммы стационарного случайного процесса и 2π-периодического продолжения во времени детерминированного сигнала. Получена формула автокорреляционной функции для детерминированного сигнала в виде N-частичной суммы ряда Фурье.

Ключевые слова: функция корреляции, функциональное преобразование, частичная сумма ряда Фурье, детерминированный сигнал.

Введение

Корреляционная функция (КФ) B_F функционального преобразования (ФП) $F(y)$ суммы

$$y(t) = \xi(t) + x(t),\ t \in (t_0,\ t_0 + T), \qquad (1)$$

где $\xi(t)$ – стационарный, хотя бы в широком смысле, случайный процесс (ССП), $x(t)$ – детерминированный сигнал, t_0 – начало отсчета произвольного открытого интервала наблюдений T, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $T \in (0, T)$, в общем случае может быть определена, если известна (по крайней мере) двумерная плотность вероятности значений $\varpi\varpi_y(y_1, y_2)$, следующей формулой [1–5]:

$$B_F = m_y\{F[y(t)] \times F[y(t+\tau)]\} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y_1)F(y_2)\varpi\varpi_y(y_1, y_2)dy_1dy_2, \qquad (2)$$

где $m_y\{\ldots\}$ – математическое ожидание величины, заключенной в скобки, и $y(t) = y_1$, $y(t+\tau) = y_2$. Если для ФП существует двустороннее преобразование Лапласа (контурный интеграл), то, полагая $j = +\sqrt{-1}$, получим [1, 3]:

$$g(jv) = L[F(y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y)e^{-jvy}dy,$$

$$F(y) = L^{-1}[g(jv)] = \frac{1}{2\pi}\oint_C g(jv)e^{jvy}dv,$$

L и L^{-1} – соответственно прямой и обратный оператор Лапласа, и замкнутый на бесконечности контур интегрирования обходит снизу возможные особые точки в направлении от $-\infty$ к $+\infty$. Тогда для формулы (2) можно получить следующее представление КФ:

$$B_F = \frac{1}{(2\pi)^2}\oint_{C_1} g(jv_1)\oint_{C_2} g(jv_2)\cdot TT_y(v_1, v_2)dv_1dv_2, \qquad (3)$$

$$TT_y(v_1, v_2) = m_y\{\exp[j(v_1y_1 + v_2y_2)]\} \qquad (4)$$

– двумерная характеристическая функция суммы (1).

Результаты исследований свойств КФ ФП суммы (1) – формулы (2) и (3) для различных законов распределения и моделей сигналов широко апробированы в научно-технической литературе. В целом ряде работ детерминированный сигнал заменяют, как правило, различными специальными моделями ССП.

Понятие аналитического сигнала (АС) $z(t)$ [1–5] $z(t) = y(t) + j \cdot \hat{y}(t)$, где $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ связаны преобразованиями Гильберта и $y(t)$ принимает действительные значения, позволяет ввести однозначное, не зависящее от выбора средней частоты, определение огибающей как модуля АС для случайного стационарного процесса, представленного рядом $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t - \alpha_n)$, где α_n – случайные фазы, равновероятно распределенные на интервале (0, 2π), $\frac{c_n^2}{2}$ – мощность сигнала, соответствующая частоте ω_n.

В работе [2] детерминированная составляющая представлена модулированной по амплитуде синусоидой, содержащей случайную фазу, равновероятную на интервале значений от 0 до 2π, а при построении оценки КФ предлагается подставлять в соответствующие формулы среднее значение модулирующего сигнала.

В работе [3] рассмотрено общее решение задачи для представления (1) при формальной замене в (2) и (3) $\varpi\varpi_y(y_1, y_2)$ на $\varpi\varpi_\xi(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$, где $\varpi\varpi_\xi(\xi_1, \xi_2)$ – двумерная плотность вероятности значений ССП $\xi(t)$. При этом отмечено, что в случае $x(t) \neq 0$ (тождественно) КФ зависит от времени, и сделан вывод о нестационарности ФП в общем случае сигнала вида (1). В качестве оценки КФ рекомендовано рассматривать среднее во времени значение на интервале наблюдений.

Сложные ФП, например детектирование, возведение в конечную степень, сводятся к исследованию статистических характеристик огибающей АС. В работе [4] для общего случая $y(t)$ (1), когда $x(t)$ есть узкополосный ССП, приведены выражения двумерной функции распределения вероятностей значений и КФ огибающей, зависящие лишь от разности времени τ.

Очевидно, что результаты исследований КФ ФП, и в первую очередь стационарность, существенным образом зависят от модели представления детерминированной части суммы сигналов (1).

Постановка задачи

Вычислим КФ B_F ФП $F(y)$ для модели исходного сигнала (1) с минимальными ограничениями на свойства составляющих, входящих в выражения (1) – (4). Полагаем, что случайный процесс $\xi(t)$ стационарен (по крайней мере) в широком смысле. Пусть существует двустороннее преобразование Лапласа для ФП во всей области значений $y(t)$, а для произвольно определенной детерминированной функции $x(t)$ выполняются условие интегрируемости Дини [6, 7] на открытом интервале времени $t \in (t_0, t_0 + T)$, где t_0 – начало отсчета *произвольного* интервала наблюдений T, $t_0 \in (-\infty, +\infty)$, $T \in (0, T)$.

Взаимно-однозначным преобразованием $t' = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{1}{2})$ открытого интервала времени $t \in (t_0, t_0 + T)$ на $t' \in (t'_0 - \pi, t'_0 + \pi)$ и $t'_0 = 2\pi(\frac{t_0}{T})$ построим 2π-периодическое продолжение по оси времени t' детерминированного сигнала $x(t') = x(t' \pm 2\pi k)$, $k = 1, 2, \ldots$ При этом отсчеты t'_0 интервалов являются равновероятными случайными величинами (СВ) ввиду *произвольности* значений интервала наблюдений T.

Из интегрируемости $x(t)$ следует справедливость теоремы Фейера [6,7] и возможность представления $x(t')$ рядом Фурье:

$$\frac{1}{2}\{x(t'+0) + x(t'-0)\} = \\ = S_0 + \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\{S_1(t') + S_2(t') + \ldots + S_{m-1}(t')\}, \quad (5)$$

где S_m – частичная сумма ряда Фурье

$$S_m(t') = \sum_{n=1}^{m} A_n(t') \quad (6)$$

и

$$S_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{t'_0-\pi}^{t'_0+\pi} x(t')dt' = \text{const},$$

$$A_n(t') = a_n \cos(nt') + b_n \sin(nt'); \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{t'_0-\pi}^{t'_0+\pi} \tilde{x}(t')\cos(nt')dt', \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{t'_0-\pi}^{t'_0+\pi} \tilde{x}(t')\sin(nt')dt'; \quad (8)$$

для $x(t')$ в виде

$$\{x(t') = S_0 + \tilde{x}(t')\} \,\&\, \left\{\int_{t'_0-\pi}^{t'_0+\pi} \tilde{x}(t')dt' = 0\right\}.$$

Коэффициенты a_n и b_n принимают случайные значения, так как пределы интегрирования в (8) содержат СВ t'_0. Заменим переменную интегрирования в (8), полагая $\sigma = t' - t'_0$, $\sigma \in (-\pi, \pi)$, и выполним интегрирование по новой переменной. После несложных тригонометрических преобразований получим выражения:

$$A_n(t') = a'_n \cos(nt' - nt'_0) + b'_n \sin(nt' - nt'_0), \quad (9)$$

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{x}(\sigma + t'_0)\cos(n\sigma)d\sigma,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{x}(\sigma + t'_0)\sin(n\sigma)d\sigma. \quad (10)$$

Выражение $\tilde{x}(\sigma + t'_0)$ представлено 2π-периодической детерминированной функцией, и, в силу построения 2π-периодического продолжения оси времени t', значения интегралов (10), *в указанных пределах*, не зависят от произвольного сдвига t'_0. Следовательно, значения a'_n и b'_n неслучайны, а при вычислении по формулам (10) можно положить $t'_0 = 0$. Учтем периодичность функций sin и cos в (9) и получим для $A_n(t')$, полагая

$$\varphi_n = nt'_0 - 2\pi E(\frac{nt'_0}{2\pi} + \frac{1}{2}), \quad \varphi_n \in (-\pi, \pi), \quad (11)$$

где $E(\ldots)$ – целая часть численного значения выражения в скобках,

$$A_n(t') = a'_n \cos(nt' - \varphi_n) + b'_n \sin(nt' - \varphi_n), \quad (12)$$

где φ_n – фаза отдельного члена частичной суммы ряда Фурье $S_m(t')$ (6), которая является СВ, равновероятной на открытом интервале $\varphi_n \in (-\pi, \pi)$.

Учтём, что значение фазы φ_n полностью определяется номером n – целочисленным аргументом преобразования (11), и, следовательно, множество $\{\varphi_m\}$ фаз составляющих частичной суммы ряда Фурье $S_m(t')$ (6) образует совокупность *независимых* СВ, равновероятных на интервале $(-\pi, \pi)$.

Общее решение задачи

На практике, как правило, исследуют модель сигнала, адекватно представляющую его свойства, например в виде разложения в ряд по ортогональным функциям. Без ограничения общности постановки задачи представим $x(t')$ в виде суммы:

$$x(t') = S_0 + S_N(t'),\ \tilde{x}(t') = S_N(t'),\ N = 1, 2, 3,\ldots, \quad (13)$$

где $S_N(t')$ – N-частичная сумма ряда Фурье детерминированного сигнала.

В соответствии с полученными выше выводами, $S_N(t')$ есть сумма (6) ССП (12) с N-мерной плотностью вероятности значений фаз $\{\varphi_N\}$:

$$ww_N(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^N},\ \{\varphi_k \in (-\pi, +\pi)\} \,\&\, \{\forall k \in [1, 2, \ldots, N]\}, \\ 0,\ \{\exists k \in [1, 2, \ldots, N]\} \,\&\, \{\varphi_k \notin (-\pi, +\pi)\}. \end{cases} \quad (14)$$

Учитывая независимость $\xi(t)$ и $x(t)$, $(N + 2)$-мерную функцию распределения значений $\varpi\varpi_y(y_1, y_2)$ можно представить произведением:

$$\varpi\varpi_y(y_1, y_2) = ww_N(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N) \times \times \varpi\varpi_\xi(y_1 - x_1, y_2 - x_2), \quad (15)$$

где $\varpi\varpi_\xi(\xi_1, \xi_2)$ – двумерная плотность вероятности значений ССП $\xi(t)$.

Подставим (15) в (2), (3) для определения КФ, учтем условие существования двустороннего преобразования Лапласа ФП во всей области определения $y(t)$ и представим (4), используя (1) и (13), в виде:

$$TT_y(v_1, v_2) = m_y\{\exp[j(v_1 y_1 + v_2 y_2)]\} = = U_0 P(v_1, v_2) TT_\xi(v_1, v_2), \quad (16)$$

где $U_0 = \exp[jS_0(v_1 + v_2)]$ и $TT_\xi(v_1, v_2) = = m_\xi\{\exp[j(v_1\xi_1 + v_2\xi_2)]\}$ – двумерная характеристическая функция ССП $\xi(t)$. Полагаем $\hat{p}_i = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_i$ – интегральный оператор и $\tau' = 2\pi(\dfrac{\tau}{T} - \dfrac{1}{2})$, $\tau \in (0, T)$, $\tau' \in (-\pi, \pi)$; тогда

$$P(v_1, v_2) = (\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i) \exp\{j[v_1 S_N(t') + v_2 S_N(t' + \tau')]\}, \quad (17)$$

в итоге получим для КФ ФП суммы (13) выражение:

$$B_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \times \oint_{C_1} g(jv_1) \oint_{C_2} g(jv_2) U_0 P(v_1, v_2) TT_\xi(v_1, v_2)\, dv_1 dv_2, \quad (18)$$

где все входящие в формулу величины определены ранее.

После несложных тригонометрических преобразований выражений (6) и (12) представим показатель экспоненты в (17) в виде:

$$v_1 S_N(t') + v_2 S_N(t' + \tau') = \sum_{i=1}^{N} u_i r_i \sin(\Phi_i + \Psi_i), \quad (19)$$

где

$$u_i^2 = (a_i')^2 + (b_i')^2,\ r_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\omega_i \tau', \quad (20)$$

$\omega_i = \dfrac{2\pi i}{T}$ – i-я основная частота (всего N частот),

$$\Phi_i = it' - \varphi_i, \quad (21)$$

а начальная фаза

$$\Psi_i = \operatorname{arctg}\left[\frac{v_1 a_i' + v_2(a_i' \cos\omega_i\tau' + b_i' \sin\omega_i\tau')}{v_1 b_i' + v_2(-a_i' \sin\omega_i\tau' + b_i' \cos\omega_i\tau')}\right]$$

не зависит от времени t' и случайной фазы φ_i.

Подставим (19) в (17) и получим:

$$P(v_1, v_2) = (\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i) \prod_{k=1}^{N} \exp[ju_k r_k \sin(\Phi_k + \Psi_k)]. \quad (22)$$

Докажем справедливость формулы

$$P(v_1, v_2) = \prod_{i=1}^{N} J_0(u_i r_i), \quad (23)$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя действительного аргумента нулевого порядка.

Доказательство. Представим экспоненту в (22), используя формулу Эйлера и соответствующие формулы из [8], и получим формулу для дальнейших вычислений.

Полагаем

$$\hat{p}_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_i;$$

$$P(v_1, v_2) = (\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i) \prod_{k=1}^{N} \exp[ju_k r_k \sin(\Phi_k + \Psi_k)] =$$

$$= (\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i) \prod_{k=1}^{N} \{J_0(u_k r_k) + 2\sum_{m=1}^{\infty} [J_{2m}(u_k r_k) \times$$

$$\times \cos(2m(\Phi_k + \Psi_k)) + jJ_{2m-1}(u_k r_k) \sin((2m-1)(\Phi_k + \Psi_k))\}],$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя действительного аргумента целого n-го порядка. Выполним умножение и представим формулу в виде:

$$P(v_1, v_2) = (\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i)[\prod_{k=1}^{N} J_0(u_k r_k) + \sum_{m=1}^{\infty} SM_{\{N\}}], \quad (24)$$

где

$$SM_{\{N\}} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{s=1}^{\binom{N}{k}} \left\{ \prod_{q=1}^{k} B_{i_q}(m\Phi_{i_q}) \right\}_s^{N,k}, \qquad (25)$$

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k} = \frac{N!}{(N-k)!k!} \text{ и } s \in [1,2,...,\binom{N}{k}],$$

$\left\{ \ldots \right\}_s^{N,k}$ – s-е сочетание из N по k неповторяющихся индексов i_q, $q \in [1,2,...,k]\,\&\,[k \le N]$ из множества индексов i, $i \in [1, 2,..., N]$,

$$\left\{ B_{i_q}(m\Phi_{i_q}) \right\}_s^{N,k} = \left\{ c_{i_q} \cos(m\Phi_{i_q}) + d_{i_q} \sin(m\Phi_{i_q}) \right\}_s^{N,k} \qquad (26)$$

и c_{i_q}, d_{i_q} – произвольные функции, не зависящие от случайных фаз $\{\varphi_N\}$ и Φ_{i_q}, $i_q = i$ в (21).

Из выражения (24) видно, что первое слагаемое не зависит от $\{\varphi_N\}$, то есть следует определить значение произведения интегральных операторов $(\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i)$ на $SM_{\{N\}}$.

Лемма. Покажем вначале, что

$$\hat{p}_i \left\{ B_{i_q}(m\Phi_{i_q}) \right\}_s^{N,k} = \begin{cases} \left\{ B_{i_q}(m\Phi_{i_q}) \right\}_s^{N,k}, \; i \ne i_q, \\ 0, \; i = i_q. \end{cases} \qquad (27)$$

Действительно, вычисляя непосредственно, можно убедиться в справедливости

$$\hat{p}_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_i \begin{bmatrix} \cos(m\Phi_{i_q}) \\ \sin(m\Phi_{i_q}) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos(m\Phi_{i_q}) \\ \sin(m\Phi_{i_q}) \end{bmatrix}, i \ne i_q \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, i = i_q \end{cases},$$

из которого следует справедливость соотношения (27).

Докажем следующую теорему:

Теорема. Значение произведения $(\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i)$ на суммах $SM_{\{N\}}$ (25) равно нулю:

$$(\prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i)\, SM_{\{N\}} = 0. \qquad (28)$$

Доказательство. Действительно, из леммы (27) следует равенство:

$$\hat{p}_i SM_{\{N\}} = SM_{\{N\}-i}, \qquad (29)$$

где $SM_{\{N\}-i}$ есть $SM_{\{N\}}$ за исключением всех слагаемых, содержащих сомножителем $B_{i_q}(m\Phi_{i_q})$, для которых $i = i_q$. Применим последовательно для каждого оператора $\hat{p}_i$ правило исключения (29) к $SM_{\{N\}}$ и докажем равенство (28), из которого следует справедливость равенства (23).

Подставим (23) в (18) и получим, в итоге, для КФ ФП суммы (13) выражение:

$$B_F = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{C_1} g(jv_1) \oint_{C_2} g(jv_2) U_0 \times \\ \times \prod_{i=1}^{N} J_0(u_i r_i) TT_\xi(v_1, v_2)\, dv_1 dv_2, \qquad (30)$$

где u_i, $r_i, i \in [1,2,...,N]$, (20), как видно, не зависят от времени t'.

Заключение

Из доказанного выше следует *стационарность* ФП $F(y)$ суммы (1), где детерминированный сигнал представлен 2π-периодическим продолжением по оси времени, и КФ $B_F = B_F(\tau')$ (30) зависит лишь от разности времён τ'.

Формула (30) позволяет определить функцию корреляции функционального преобразования аддитивной суммы случайного процесса, стационарного – по крайней мере – в широком смысле, и произвольного детерминированного сигнала, представленного в виде N-частичной суммы ряда Фурье.

Работа посвящена памяти заслуженного профессора ННГУ им. Н.И. Лобачевского Станислава Фёдоровича Морозова (06.07.1931 – 20.01.2003).

Список литературы

1. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Сов. радио, 1965. 208 с.
2. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М.: ИЛ, 1960.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1974.
4. Тихонов В.И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1982.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М.: Наука, 1976.
7. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч.1. М.: Физматгиз, 1963.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. 5-е изд. М.: Наука, 1978.

AN AUTOCORRELATION FUNCTION OF THE FUNCTIONAL TRANSFORMATION OF THE SUM OF A STATIONARY RANDOM PROCESS AND THE 2π-PERIODIC EXTENSION OF A DETERMINISTIC SIGNAL

V.I. Proidakov

A proof is given for stationarity of the autocorrelation function of the functional (nonlinear, inertialess) transformation of the sum of a stationary random process and the 2π-periodic extension of a deterministic signal. An autocorrelation function formula for the deterministic signal has been derived in the form of Nth partial sum of the Fourier series.

Keywords: correlation function, functional transformation, Nth partial sum of the Fourier series, deterministic signal.