

УДК 539.374:517.912

**УДАР ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ
ПО ЖЕСТКОЙ ПРЕГРАДЕ**

© 2012 г.

Н.А. Окулов

Наро-Фоминский филиал Российского государственного социального университета

okulovna@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.04.2012

Рассматривается процесс деформирования жестко-пластического стержня переменного сечения при ударе по жесткой преграде. Задача решается в одномерном приближении. Установлены условия применимости модели Тейлора. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: жестко-пластический стержень, метод Тейлора, решение Тейлора, модель Тейлора, численное моделирование.

Введение

Значения характеристик материалов при высокоскоростном деформировании получают различными методами (обширная библиография по этому вопросу содержится в [1]). Среди них простотой постановки эксперимента и интерпретацией результатов выделяется метод Тейлора [2–4].

Более шестидесяти лет назад в статье [2] Тейлор изложил оригинальную одномерную модель процесса деформирования цилиндрического жестко-пластического стержня при прямом ударе по жесткой преграде. Изящное решение Тейлора вошло в монографии [5] и классические учебники по теории пластичности [6]. Оно подтверждено экспериментально [7]. Решение Тейлора позволяет по геометрическим характеристикам деформированного стержня расчетным способом определять значение предела текучести материала.

В настоящей работе предложен новый метод решения задачи об ударе жестко-пластического стержня по жесткой преграде в одномерном приближении. Метод позволяет в рамках модели Тейлора находить решение для стержней переменного сечения. При этом решение Тейлора получается как частный случай. Установлены условия применимости модели Тейлора.

1. Постановка задачи

Стержень, сделанный из несжимаемого жестко-пластического материала с плотностью ρ , пределом текучести σ_s и имеющий в недеформированном состоянии длину L_0 , движется поступательно вдоль своей оси со скоростью $-V_0$. В момент времени $t = 0$ стержень ударяется в жесткую плоскую преграду.

Ось Ox неподвижной системы координат направлена вдоль оси стержня. За ее положительное направление принято направление, противоположное скорости движения стержня перед ударом. Начало координат помещено в общую точку оси стержня и преграды в момент $t = 0$. Координаты $0 \leq x \leq L_0$ поперечных сечений при $t = 0$ в последующие моменты времени рассматриваются в качестве лагранжевых координат сечений.

Пусть $S_0(x)$ и $S(x,t)$ – значения площади сечения с лагранжевой координатой x в начальный момент и момент времени t . Очевидно, что $S_0(x) = S(x,0)$. Будем рассматривать $S_0(0)$ как характерную величину площадей поперечных сечений. В качестве характерных значений напряжения, расстояния, скорости, времени, массы, количества движения и силы примем соответственно σ_s , L_0 , V_0 , L_0/V_0 , $\rho L_0 S_0(0)$, $\rho L_0 V_0 S_0(0)$ и $\sigma_s S_0(0)$. Дальнейшее изложение будем вести в безразмерных переменных.

Пусть $v(x,t)$ – скорость сечения с лагранжевой координатой x , а $\sigma(x,t)$ – напряжение в этом сечении. Согласно Тейлору во время удара стержень является объединением трех частей: зоны A , фронта и зоны B . В примыкающей к преграде зоне A ($0 < x < \xi(t)$) в жестком неподвижном состоянии ($-1 < \sigma(x,t) \leq 0$, $v(x,t) = 0$) находится материал стержня, претерпевший пластическую деформацию ($S(x,t) \neq S_0(x)$). На фронте $x = \xi(t)$ происходит пластическая деформация ($\sigma(x,t) = -1$). Материал стержня в зоне B ($\xi(t) < x \leq 1$) находится в недеформированном состоянии ($S(x,t) = S_0(x)$) и движется как твердое тело в продольном направлении ($-1 < \sigma(x,t) \leq 0$, $v(x,t) = V(t)$). Модель Тейлора предполагает также непрерывность поля напряжений на фронте.

Масса и количество движения индивидуального материального объема, заключенного между сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$ ($x_2 > x_1$), находятся по формулам

$$M = \int_{x_1}^{x_2} S_0(x) dx, \quad K = \int_{x_1}^{x_2} v(x, t) S_0(x) dx.$$

Имеют место закон сохранения массы индивидуального материального объема и теорема об изменении его количества движения:

$$\frac{dM}{dt} = 0,$$

$$\text{Re} \frac{dK}{dt} = \sigma(x_2, t) S(x_2, t) - \sigma(x_1, t) S(x_1, t),$$

где $\text{Re} = \rho V_0^2 / \sigma_s$ – безразмерный параметр моделирования, получивший название (пластического) числа Рейнольдса [8].

Следствием закона и теоремы, указанных выше, являются следующие утверждения.

Утверждение 1. Поле скоростей сечений $v(x, t)$ стержня и поле его поперечных сечений $S(x, t)$ на фронте $x = \xi(t)$ терпят сильные разрывы; имеют место два соотношения

$$V(t) S^-(t) = \dot{\xi}(t) (S^+(t) - S^-(t)), \quad (1)$$

$$\text{Re} \dot{\xi}(t) V(t) S^+(t) = S^+(t) - S^-(t). \quad (2)$$

Здесь и далее точка над переменной означает производную по времени,

$$S^-(t) = \lim_{x \rightarrow \xi(t)^-} S(x, t) = S(\xi(t), t),$$

$$S^+(t) = \lim_{x \rightarrow \xi(t)^+} S_0(x) = S_0(\xi(t)).$$

Утверждение 2. Все сечения зоны B движутся с одинаковым ускорением $\dot{V}(t)$, величина которого находится по формуле

$$\dot{V}(t) = \frac{S^+(t)}{\text{Re}} \left(\int_{\xi(t)}^1 S_0(q) dq \right)^{-1}. \quad (3)$$

Утверждение 3. Поле напряжений в зоне A связано с полем площадей сечений деформированного стержня:

$$\sigma(x, t) = - \frac{S^-(t)}{S(x, t)}; \quad (4)$$

а в зоне B – с полем площадей сечений недеформированного стержня:

$$\sigma(x, t) = - \frac{f(\xi(t))}{f(x)},$$

где

$$f(u) = S_0(u) \left(\int_u^1 S_0(q) dq \right)^{-1}; \quad (5)$$

на фронте $x = \xi(t)$ напряжение равно -1 .

Подробный вывод формул (1)–(5) приведен в работе [9].

2. Задача Коши для функции $\xi(t)$

Исключив из условий (1) и (2) площадь $S^+(t)$, получим соотношение

$$\text{Re} \dot{\xi} (\dot{\xi} + v) - 1 = 0. \quad (6)$$

Выразим из него скорость V и дифференцированием найдем ускорение. Заменяя затем \dot{V} правой частью соотношения (3), придем к дифференциальному уравнению

$$\dot{\xi} (1 + \text{Re} \dot{\xi}^2) + \dot{\xi}^2 f(\xi) = 0. \quad (7)$$

Фронт начинает движение от ударяющего торца. Поэтому первое начальное условие для функции $\xi(t)$ имеет вид $\xi(0) = 0$. Второе начальное условие найдем из соотношения (6). Рассматривая его как квадратное уравнение относительно $\dot{\xi}(t)$, устанавливаем

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{2} \left(-V(t) + \sqrt{V^2(t) + 4/\text{Re}} \right). \quad (8)$$

В начальный момент времени скорость зоны B равна -1 , поэтому, полагая в (8) $V = -1$, получаем второе начальное условие

$$\dot{\xi}(0) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4/\text{Re}} \right). \quad (9)$$

Введем в рассмотрение следующие две переменные:

$$z = \text{Re} \dot{\xi}^2(t), \quad y = \left(\int_u^1 S_0(q) dq \right)^2 \left(\int_0^1 S_0(q) dq \right)^{-2},$$

где $u = \xi(t)$.

В этих переменных уравнение (7) принимает вид

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z}{(1+z)y}.$$

Его общее решение выражается через W -функцию Ламберта [10]:

$$z = W(Cy).$$

Следовательно,

$$\text{Re} \dot{\xi}^2(t) = W(Cy(\xi(t))). \quad (10)$$

Определим значение константы интегрирования C . Поскольку $y(0) = 1$, то $\text{Re} \dot{\xi}^2(0) = W(C)$. Функция Ламберта является решением функционального уравнения $q = W(q) \exp\{W(q)\}$. Следовательно, $C = \text{Re} \dot{\xi}^2(0) \exp\{\text{Re} \dot{\xi}^2(0)\}$. Значение $\dot{\xi}(0)$ задается вторым начальным условием (9). Значит,

$$C = ke^k, \quad k = 1 + \frac{\text{Re}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4/\text{Re}} \right).$$

Пусть t^* – продолжительность удара, а ξ^* и $\dot{\xi}^*$ – значения функций $\xi(t)$ и $\dot{\xi}(t)$ при $t = t^*$. Учитывая, что $V(t^*) = 0$, из соотношения (6) на-

ходим $\xi^* = 1/\sqrt{\text{Re}}$. Из формулы (10) получаем $W(Cy(\xi^*)) = 1$. Функция Ламберта принимает значение, равное единице, при значении аргумента, равном числу e . Следовательно, ξ^* является корнем уравнения

$$y(\xi^*) = \frac{e}{C}. \quad (11)$$

Функция $y(u)$ убывает на отрезке $0 \leq u \leq 1$. Поскольку $0 < e/C < 1$, а $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, то уравнение (11) имеет единственное решение. Оно всегда может быть найдено численными методами. В некоторых частных случаях, например, в случае конического стержня (см. п. 5) уравнение (11) имеет аналитическое решение.

Из формулы (8) следует, что $\dot{\xi}(t) > 0$. Поэтому функция $\xi(t)$, задающая закон движения фронта, является монотонно возрастающей функцией времени и, следовательно, имеет однозначную обратную функцию. Это обстоятельство дает право рассматривать дифференциальное уравнение (10) как уравнение, связывающее искомую функцию t и независимую переменную ξ :

$$\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2 = \frac{\text{Re}}{W(Cy(\xi))}.$$

Оно имеет аналитическое решение $t = \psi(\xi)$, удовлетворяющее краевому условию $t(0) = 0$:

$$\psi(\xi) = \sqrt{\text{Re}} \int_0^\xi \frac{dq}{W(Cy(q))}.$$

Функция $\psi(\xi)$ позволяет для любого значения ξ лагранжевой координаты сечения из диапазона $0 \leq \xi \leq \xi^*$ находить момент времени, в который фронт проходит через сечение $x = \xi$. Зная функцию $\psi(\xi)$, несложно построить и обратную к ней функцию $\xi(t)$, т.е. определить закон движения фронта $x = \xi(t)$.

3. Изменение формы стержня и его длины в процессе удара

Исключив из условий (1) и (2) скорость движения зоны B , получим формулу

$$S^-(t) = \text{Re} \dot{\xi}^2 S^+(t). \quad (12)$$

Заменив в ней $\dot{\xi}^2(t)$ правой частью выражения (10), получим расчетную формулу для нахождения площадей сечений стержня

$$S(x, t) = \begin{cases} S_0(x)W(Cy(x)), & 0 \leq x \leq \xi(t); \\ S_0(x), & \xi(t) < x \leq 1. \end{cases}$$

Скорость $v(x, t)$ сечения, имеющего лагранжеву координату x , его смещение $U(x, t)$ и его положение $X(x, t)$ относительно исходной неподвижной системы координат связаны формулами

$$X(x, t) = x + U(x, t), \quad U(x, t) = \int_0^t v(x, t) dt.$$

Воспользуемся формулами (6) и (10) и сделаем замену $t = \psi(\xi)$. В результате получим

$$U(x, t) = \begin{cases} -x + \int_0^x \frac{dq}{W(Cy(q))}, & 0 \leq x \leq \xi(t); \\ -\xi(t) + \int_0^{\xi(t)} \frac{dq}{W(Cy(q))}, & \xi(t) < x \leq 1. \end{cases}$$

Длина стержня $L(t)$ на момент времени t вычисляется по формуле

$$L(t) = 1 + U(1, t).$$

Для нахождения окончательных формы и длины стержня необходимо положить в приведенных выше формулах $t = t^*$.

Отметим, что

$$S(0, t^*) = 1 + \frac{\text{Re}}{2} (1 + \sqrt{1 + 4/\text{Re}}).$$

Вывод. Отношение площадей поперечного сечения ударяющего торца стержня до и после удара зависит только от значения числа Рейнольдса; форма стержня на указанное отношение не влияет.

4. Условия применимости модели Тейлора

При выводе формул, приведенных выше, существенным образом использовалось базовое предположение модели Тейлора о том, что вне фронта материал стержня находится в жестком состоянии. Следовательно, полученное выше решение действительно будет описывать процесс деформирования жестко-пластического стержня, если на протяжении всего времени удара напряжения во всех сечениях стержня, за исключением фронтового, будут по модулю меньше единицы.

Распределения напряжений в жестких зонах даются формулами (4) и (5). Требуя выполнения неравенства $|\sigma(x, t)| < 1$, приходим к выводу, что условиями применимости модели Тейлора являются следующие два условия:

- 1) функция $f(x)$ должна быть монотонно возрастающей на отрезке $0 \leq x \leq 1$;
- 2) для $t \in (0, t^*)$ функция $S(x, t)$ должна монотонно убывать на отрезке $0 \leq x \leq \xi(t)$.

Поскольку $\dot{\xi}(t) > 0$, то второе условие эквивалентно условию монотонного убывания функции $S^-(t)$. Другими словами, должно выполняться неравенство

$$\frac{dS^-(t)}{dt} < 0, \quad 0 \leq t \leq t^*. \quad (13)$$

5. Конический стержень

Площади сечений конического стержня в недеформированном состоянии задаются формулой $S_0(x) = (1 + ax)^2$, $a \geq -1$. Поэтому

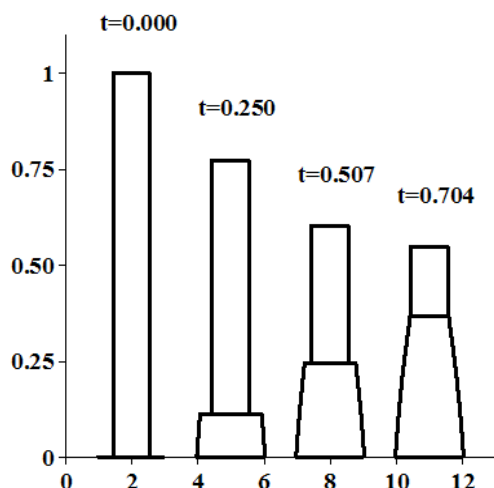


Рис. 1. Процесс деформирования цилиндрического стержня, $Re = 1.633$

$$f(x) = \frac{3a(1+ax)^2}{(1+a)^3 - (1+ax)^3},$$

и уравнение (11) имеет аналитическое решение

$$\xi^* = \frac{1}{a} \left[\sqrt[3]{(1+a)^3 (1 - \sqrt{e/C}) + \sqrt{e/C}} - 1 \right].$$

Замечание. Цилиндрический стержень является частным случаем конического стержня при $a = 0$. В этом случае $f(x) = 1/(1-x)$ и $\xi^* = 1 - \sqrt{e/C}$.

Несложно показать, что функция $f(x)$ возрастает при всех значениях параметра a .

Следовательно, для конических стержней первое условие применимости модели Тейлора выполняется всегда.

Второе условие (13), используя формулы (7) и (12), запишем в следующем виде:

$$a - \frac{(1+a\xi(t))f(\xi(t))}{1+Re\xi^2(t)} < 0, \quad 0 \leq t \leq t^*. \quad (14)$$

В случае $-1 \leq a \leq 0$ оно заведомо выполняется. В случае $a > 0$ левая часть неравенства (14) является монотонно убывающей функцией времени. Поэтому для выполнения неравенства (14) при $0 \leq t \leq t^*$ необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось при $t = 0$. В начальный момент

$$\xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4/Re}),$$

$$f(\xi(0)) = \frac{3a}{(1+a)^3 - 1}.$$

Подставив эти значения в неравенство (14), получим

$$a < \sqrt[3]{1 + \frac{6}{4 + Re(1 + \sqrt{1 + 4/Re})}} - 1.$$

Вывод. В случае конического стержня модель Тейлора применима, если параметр a

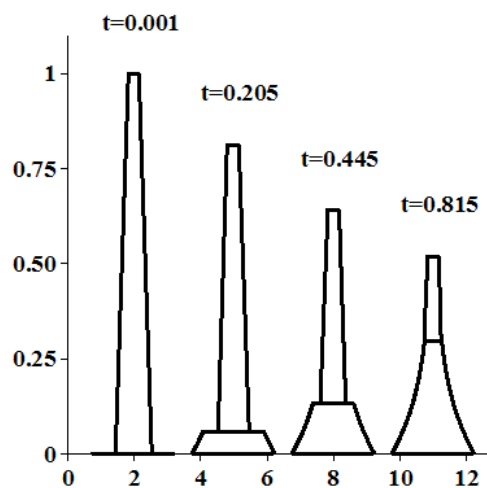


Рис. 2. Процесс деформирования конического стержня, $Re = 3, a = -0.7$

удовлетворяет неравенству

$$-1 \leq a < \sqrt[3]{1 + \frac{6}{4 + Re(1 + \sqrt{1 + 4/Re})}} - 1.$$

В частности, модель применима, если стержень имеет цилиндрическую форму ($a = 0$) или ударяющим торцом является торец с большей площадью поперечного сечения ($-1 \leq a < 0$).

6. Тест (сравнение с решением Тейлора)

Рассмотрим удар цилиндрического стержня при $Re = 1.633$. Расчеты, проведенные по изложенному выше методу, позволяют установить, что продолжительность удара равна 0.704; отношение диаметра ударяющего торца деформированного стержня к диаметру недеформированного стержня – 1.826; длина деформированного стержня – 0.546, длина его недеформированной части – 0.171. Процесс изменения формы стержня отображен на рис. 1 (на горизонтальной оси, как и далее на рис. 2, показана масштабная линейка для измерения поперечных размеров стержня).

Указанные результаты полностью совпадают с соответствующими результатами, полученными Тейлором [2].

7. Пример

Процесс изменения формы конического стержня ($Re = 3, a = -0.7$) изображен на рис. 2. Продолжительность удара $t^* = 0.815$; максимальное значение лагранжевой координаты фронта $\xi^* = 0.780$; длина и площадь ударяющего торца деформированного стержня $L(t^*) = 0.518$ и $S(0, t^*) = 4.791$.

Список литературы

1. Константинов А.Ю. Экспериментально-расчетное исследование поведения конструкционных материалов под действием динамических нагрузок. Дисс.... канд. тех. наук. Н. Новгород, 2007. 144 с.
2. Taylor G. The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress. I. Theoretical Considerations // Proc. R. Soc. Lond. A. 1948. V. 194. P. 289–299.
3. Уилкинс М.Л., Гуинан М.У. Удар цилиндра по жесткой преграде // Механика: сборник переводов. М.: Мир, 1973. № 3. С. 112–128.
4. Konokman H.E., Soroh M.M., Kayran A. Computational and experimental study of high-speed impact of metallic Taylor cylinders // Acta mech. 2011. V. 220. P. 61–85.
5. Зукас Дж.А., Николас Т., Сфифт Х.Ф. и др. Динамика удара: Перевод с англ. М.: Мир, 1985. 296 с.
6. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
7. Whiffin A.C. The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress. II. Tests on Various Metallic Materials // Proc. R. Soc. Lond. A. 1948. V. 194. P. 300–322.
8. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
9. Окулов Н.А. Удар жестко-пластического стержня переменного сечения. Наро-Фоминск: Филиал РГСУ в г. Наро-Фоминске, 2012. 16 с. Деп. в ВИНТИ 27.02.2012. № 80 – В 2012.
10. Дубинов А.Е., Дубинова И.В., Сайков С.К., Соколовский В.В. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ», 2006. 169 с.

IMPACT OF A RIGID-PLASTIC CONICAL ROD AGAINST A RIGID BARRIER*N.A. Okulov*

The deformation process of a rigid-plastic rod of variable cross section at the impact against a rigid barrier is considered. The problem is solved in a one-dimensional approximation. The conditions of the applicability of Taylor's model are established. The numerical simulation results are presented.

Keywords: rigid-plastic rod, Taylor's method, Taylor's solution, Taylor's model, numerical simulation.