УДК 517.98

О СВЯЗИ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА С ПАРАМИ ФИШЕРА

В.В. Напалков [1], ***А.А. Нуятов*** [2]

[1] Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа
[2] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

nuyatovlaa@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2012

Установлена связь разрешимости (корректной разрешимости) задачи Валле Пуссена для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами с парами Фишера.

Ключевые слова: задача Валле Пуссена, пары Фишера.

1. Введение

Изучение пар Фишера началось в 1917 году с работы Эрнста Фишера [1], в которой получен следующий результат:

Теорема 1. Если $P(z)\in H_k$ (H_k – пространство однородных полиномов степени k в $\mathbb{C}^n$), то всякий полином $Q(z)\in H_m$, $0 \le m < \infty$, представляется в виде $Q(z)=h(z)+g(z)$, где $g,h\in H_m$, причем g кратно P, а h удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$P^*(D)h=0,\ D=(D_1,\dots,D_n), D_j=\frac{\partial}{\partial z_j}, P^*(z)=\overline{P(\bar z)}.$$

Определение задачи Валле Пуссена можно найти в работе [2], ниже будет дана эквивалентная формулировка. Начало исследований о взаимосвязи пар Фишера и задачи Валле Пуссена для уравнений в частных производных гиперболического типа дано в работе [3]. Дальнейшее изучение пар Фишера описано в работах [4–7].

2. Предварительные сведения

Дадим определение пар Фишера согласно [4, 5].

Определение 1. Пара полиномов $\left(P(z), Q\left(\frac{d}{dz}\right)\right)$ в $H(\mathbb{C})$ называется парой Фишера, если имеет место

$$H(\mathbb{C}) = (P(z))\oplus \operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right), \qquad (1)$$

где $(P(z))$ – идеал в пространстве $H(\mathbb{C})$, $\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right)$ – ядро линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами $Q\left(\frac{d}{dz}\right)$. При этом равенство (1) называется разложением Фишера. Если не справедливо (1), но имеет место

$$H(\mathbb{C})= (P(z)) + \operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right), \qquad (2)$$

то равенство (2) называется представлением Фишера.

Согласно результату работы [7] представление (разложение) Фишера эквивалентно разрешимости (корректной разрешимости) задачи Валле Пуссена для оператора свертки, действующего из FS- или DFS-пространства в себя (пространство Фреше–Шварца и сопряженное к нему), известно (см. [8]), что оператор свертки становится линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, если его характеристической функцией является полином.

Дадим эквивалентную формулировку задачи Валле Пуссена для оператора $Q\left(\frac{d}{dz}\right)$ с данными на дивизоре Z_P: для любой функции $\varphi(z)\in H(\mathbb{C})$ существует (единственная) функция $h(z)\in \operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right)$, такая, что $\frac{\varphi(z)-h(z)}{P(z)}\in H(\mathbb{C})$.

Применив результат статьи [7] к пространству $H(\mathbb{C})$, получим:

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Задача Валле Пуссена для $Q\left(\frac{d}{dz}\right)$ с данными на Z_P разрешима (корректно разрешима).

(2) Имеет место представление (разложение) Фишера.

3. Основной результат

Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – нули $Q(z)$ и $q_1,\ldots,q_n$ – соответственно их кратности; $\mu_1,\ldots,\mu_m$ – нули $P(z)$ и $p_1,\ldots,p_m$ – соответственно их кратности.

Теорема 3. Если $\deg Q>\deg P$, либо $\deg Q=\deg P$ и $\deg P\neq m$, либо $\deg Q<\deg P$ и $\deg Q>m$, то имеет место представление Фишера

$$H(\mathbb{C})=(P(z))+\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right).$$

Если $\deg Q = m$, то имеет место разложение Фишера

$$H(\mathbb{C})=(P(z))\oplus\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right).$$

Если $\deg Q < m$, то

$$H(\mathbb{C})\neq(P(z))+\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right).$$

Доказательство. Представление Фишера (разложение Фишера) согласно теореме 2 эквивалентно тому, что для любой функции $\varphi(z)\in H(\mathbb{C})$ существует (единственная) функция $h(z)\in\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right)$, такая, что

$$\frac{\varphi(z)-h(z)}{P(z)}\in H(\mathbb{C}).$$

Последнее будет выполнено, если разность $\varphi(z)-h(z)$ обращается в ноль в нулях полинома $P(z)$ (в противном случае функция $\frac{\varphi(z)-h(z)}{P(z)}$ будет мероморфной), поскольку $h(z)=$ $=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{q_\nu-1}C_{\nu k}z^k e^{\lambda_\nu z}$, то имеем систему

$$\begin{cases} C_{10}e^{\lambda_1\mu_1}+\ldots+C_{nq_n-1}\mu_1^{q_n-1}e^{\lambda_n\mu_1}=\varphi(\mu_1),\\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\\ C_{10}e^{\lambda_1\mu_m}+\ldots+C_{nq_n-1}\mu_m^{q_n-1}e^{\lambda_n\mu_m}=\varphi(\mu_m). \end{cases}$$

В данной системе $q_1+\ldots+q_n$ неизвестных и m уравнений, где m – количество различных нулей полинома $P(z)$.

Здесь возможны три случая:

1. Если $\deg Q>\deg P$ или $\deg Q=\deg P$, но $\deg P\neq m$, или $\deg Q<\deg P$, но $\deg Q>m$, то система не определена, получаем, что система имеет решение, но оно не единственное, т.е. существует не единственная функция $h(z)\in\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right)$, такая, что $\frac{\varphi(z)-h(z)}{P(z)}\in H(\mathbb{C})$.

2. Если $\deg Q=m$, то система имеет единственное решение, т.е. существует единственная функция $h(z)\in\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right)$, такая, что $\frac{\varphi(z)-h(z)}{P(z)}\in H(\mathbb{C})$.

3. Если $\deg Q<m$, система решений не имеет, т.е. не существует функция $h(z)\in\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right)$, такая, что $\frac{\varphi(z)-h(z)}{P(z)}\in H(\mathbb{C})$.

Замечание. Если $P(z)$ и $Q(z)$ имеют только простые нули и $\deg Q=\deg P$, то

$$H(\mathbb{C})=(P(z))\oplus\operatorname{Ker} Q\left(\frac{d}{dz}\right).$$

Список литературы

1. Fischer E. Uber die Differentiationsprozesse der Algebra //J. Math. 1917. T. 148. C. 1–78.

2. de la Vaillee Poussin Ch. J. Sur l'equation differentielle du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordren // de Math. pur. et appl. 1929. V. 9. № 8. P. 125–144.

3. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley – Interscience publishers, 1970.

4. Meril A., Struppa D.C. Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions // Bull. London Math. Soc. 1985. V. 17. P. 469–473.

5. Shapiro H.S. An algebraic theorem of E. Fischer, and the holomorphic Goursat problem //Bull. London Math. Soc. 1989. V. 21. P. 513–537.

6. Meril A., Yger A. Problemes de Cauchy globaux // Bull. Soc. Math. France. 1992. V. 120. P. 87–111.

7. Напалков В.В., Попенов С.В. Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера// Докл. РАН. 2001. T. 381. № 2. C. 164–166.

8. Напалков В.В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.

ON RELATION OF THE VALLÉE-POUSSIN PROBLEM TO FISCHER PAIRS

V.V. Napalkov, A.A. Nuyatov

A relation has been established of the Vallée-Poussin problem solvability (correct solvability) for differential operators of infinite order with constant coefficients to Fischer pairs.

Keywords: Vallée-Poussin problem, Fischer pairs.