УДК 517.956.4

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А.В. Чернов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 04.05.2012

Доказывается неотрицательность решения первой краевой задачи для линейного параболического уравнения второго порядка достаточно общего вида.

Ключевые слова: первая краевая задача, параболическое уравнение, неотрицательное решение.

Введение

Поточечные оценки решений *начально-краевых задач* (НКЗ), связанных с уравнениями в частных производных, оказываются востребованными при исследовании различных вопросов, в частности, таких, как асимптотическое поведение решений, устойчивость (в том или ином смысле), сравнение решений и т.д. В связи с обширностью литературы по этой тематике укажем лишь имена некоторых авторов:

1. *Эллиптические уравнения*: М.А. Красносельский, Е.Б. Дынкин (E.B. Dynkin), С.Е. Кузнецов (S.E. Kuznetsov), J.-F. Le Gall, M. Marcus, L. Veron.
2. *Параболические и обобщенно-параболические уравнения*: А.К. Гущин, А.В. Лежнев, В.И. Ушаков, Ф.Х. Мукминов, Л.М. Кожевникова, Г.А. Рудых, А.В. Синицын, Л.И. Камынин, В.И. Налимов.
3. *Гиперболические уравнения*: M. Cichon, I. Kubiaczyk, S.S. Dragomir, Y.-H. Kim, M. Dawidowski, A. Belarbi, M. Benchohra.

Работы перечисленных выше авторов условно можно разбить на следующие три категории:

1. Работы, в которых соответствующие оценки носили вспомогательный характер и были получены достаточно специфическим образом.
2. Работы, посвященные именно вопросу оценки решений, но для достаточно специфических задач.
3. Работы, в которых использовались некие общие соображения, но представленные примеры имели достаточно простую структуру.

В [1] был предложен общий подход к обоснованию положительности (иначе говоря, неотрицательности) решений, основанный на некоторых конструкциях [2], изначально не связанных с этим вопросом. В данной статье подход [1] (но с несколько более строгим обоснованием и в совокупности с некоторыми результатами [2] для параболического уравнения) применяется к доказательству неотрицательности решения первой краевой задачи для линейного параболического уравнения второго порядка достаточно общего вида. При этом используется также один результат из [3].

Проблема достаточных условий неотрицательности решений НКЗ, связанных именно с линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, возникает (помимо прочего) в связи со следующими обстоятельствами.

Пусть $n, m, \ell, s \in R^n$ – заданные числа, $\Pi \subset R^n$ – измеримое (здесь и далее в смысле Лебега) ограниченное множество, Y, Z, U – банаховы идеальные пространства функций, измеримых на множестве П; $\mathrm{D} \subset \mathrm{U}^s$ – множество допустимых управлений; $A : \mathrm{Z}^m \to \mathrm{Y}^l$ – заданный *линейный ограниченный оператор* (ЛОО); $\theta \in \mathrm{Y}^\ell$; $f(\tau,y,v) : \Pi \times R^l \times R^s \to R^m$ – заданная функция, измеримая по $\tau \in \Pi$, непрерывная по $\{y, v\} \in \mathrm{Y}^\ell \times \mathrm{U}^s$ и такая, что $f(.,y(.),u(.)) \in \mathrm{Z}^m$ для всех $y \in \mathrm{Y}^\ell$, $u \in \mathrm{U}^s$. Как было показано в [4–8], довольно широкий класс управляемых НКЗ с помощью *метода обращения главной части* дифференциального уравнения может быть сведен к уравнению следующего вида:

$$y(\tau) = \theta(\tau) + A[f(.,y(.),u(.))](\tau), \ \tau \in \Pi, \ y \in \mathrm{Y}^\ell, \quad (1)$$

с управлением $u \in \mathrm{D}$. Это обстоятельство позволяет использовать данное уравнение как инструмент исследования различных вопросов теории управляемых распределенных систем, в частности, глобальной разрешимости [6,7], сходимости численных методов оптимизации [9], управляемости [8], существования ситуации ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с уравнениями в частных производных [5] (см. также [10]), оценки приращения решения [4] и т.д. При этом так или иначе используется предположение о положительности самого оператора A либо о наличии у него положительной мажоранты. Положительность оператора A по отношению к исходной НКЗ означает, фактически, что НКЗ для соответствующего линейного уравнения (полученного путем замены правой части на некоторую фиксированную функцию z) имеет неотрицательное решение.

Здесь следует отметить еще одно обстоятельство. Стандартной является ситуация, где Z есть лебегово пространство $L_p(\Pi)$, $p\in[1;+\infty)$, и для простоты будем считать, что $m = 1$. Поскольку A – ЛОО, а следовательно, непрерывный оператор, и множество неотрицательных функций $L_p^+(\Pi)$ из $L_p(\Pi)$ замкнуто в $L_p(\Pi)$, для обоснования положительности оператора A достаточно доказать, что $A[z] \ge 0$ для всех неотрицательных z из какого-либо всюду плотного подмножества в пространстве $L_p(\Pi)$, в частности, из множества $\mathrm{C}_0^\infty(\Pi)$ всех бесконечно гладких финитных функций на Π (см., например, [11, § 4.7]). Поэтому далее упомянутую выше фиксированную функцию z мы будем брать из пространства $\mathrm{C}_0^\infty(\Pi)$.

1. Формулировка основного результата

Пусть $T > 0$ – некоторое число, $n\in N$, $n \ge 0$, $Q\subset R^n$ – ограниченная область переменных $x = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ с границей ∂Q, принадлежащей классу C^2; $\Pi_T = (0,T)\times Q$ – заданный цилиндр в пространстве R^{n+1} переменных $\tau = \{t,x\}$; $S_T = (0,T)\times \partial Q$ – боковая поверхность цилиндра Π_T; $\mathrm{C}_0^\infty(\Pi)$ – пространство всех бесконечно гладких финитных функций на Π; $z\in \mathrm{C}_0^\infty(\Pi)$ – заданная функция. Рассмотрим распределенную систему, поведение которой описывается первой краевой задачей для линейного параболического уравнения вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - L[y] = z(t,x), & \tau=\{t,x\}\in\Pi, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad x\in Q; & y|_{S_T}=0, \end{cases} \tag{2}$$

где $y = y(\tau) = y(t,x)$ – неизвестная функция; L – дифференциальный оператор, определяемый формулой:

$$L[y](t,x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}+ +c(x)y(t,x).$$

Мы предполагаем здесь, что коэффициенты a_{ij} и b_j для $1 \le i, j \le n$, а также c являются достаточно гладкими, и кроме того,

$$\gamma_1|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\gamma_2|\xi|^2,\ x\in\overline{Q},\ \xi\in R^n;\ c\ge 0.$$

Понимая решение задачи (2) в смысле [2], докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $z\in \mathrm{C}_0^\infty(\Pi)$, $y_0\in \mathrm{C}_0^\infty(Q)$, причем $z \ge 0$, $y_0 \ge 0$; $\Theta[y_0]$ – решение задачи (2) при $z = 0$; $A[z]$ – решение задачи (2) при $y_0 = 0$. Тогда $\Theta[y_0] \ge 0$, $A[z] \ge 0$.

Доказательство теоремы 1 нетривиально и будет основано на результатах С.Г. Крейна, М.А. Красносельского и Е.Ф. Сабаева. Существование решения следует из [2, п. 1.8.3].

2. Доказательство основного результата

Обозначим $\mathrm{E} = \mathrm{E}(Q) = L_2(Q)$, $\mathrm{D}(L)=\{\overline{y}\in L_2(Q):\overline{y}|_{\partial Q}=0\}$. В каждый фиксированный момент времени t функции $z(t,.)$ и $x(t,.)$ можно рассматривать как элементы пространства E, обозначим их $\overline{z}(t)$ и $\overline{x}(t)$ соответственно. Тогда задача (2) переписывается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt}=L[\overline{y}]+\overline{z}(t), & t\in[0;T], \\ \overline{y}(0)=y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим, прежде всего, случай $z \equiv 0$, т.е. $\overline{z}=0$. Иными словами, исследуем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt}=L[\overline{y}], & t\in[0;T], \\ \overline{y}(0)=y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Абстрактная задача вида (4) подробно исследована в [2]. Следуя [2], обозначим L_0 оператор, порожденный дифференциальным выражением L на гладких функциях, удовлетворяющих начальному условию в (4), а L будем понимать как его замыкание в пространстве $L_2(Q)$, $\mathrm{D}(L_0)=\{\overline{y}\in \mathrm{C}^2(Q):\overline{y}|_{\partial Q}=0\}$.

По поводу понятия решения уравнения (4) и его равномерной корректности см. [2, определения 1.1, 1.2 и далее]. Как показано в [2, п. 1.8.3], задача (4) при сделанных нами предположениях равномерно корректна.

Пусть W – банахово пространство. Напомним [2, Введение, п. 3.3], что для линейного ограниченного оператора B : W → W определена так называемая *операторная экспонента*

$$e^{tB}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B^n.$$

При этом $e^{(t_1+t_2)B}=e^{t_1B}e^{t_2B}$, и оператор e^{tB} дифференцируем по параметру t в смысле нормы операторов, причем $\frac{d}{dt}e^{tB}=B[e^{tB}]$. Обозначим $K\subset \mathrm{E}$ конус неотрицательных функций в пространстве Е.

Лемма 1 [2, доказательство теоремы 1.2.9]. Если задача (4) с замкнутым оператором L равномерно корректна, то справедливы следующие утверждения:

1) оператор L имеет резольвенту $R_L(\lambda)$ для всех достаточно больших $\lambda\in R$, $\lambda > 0$, и является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов $L_n=-\lambda_n I-\lambda_n^2 R_L(\lambda_n)$, $\lambda_n\to\infty$;

2) решение задачи (4) представляется в виде $U(t)y_0$, где $U(t)=\lim\limits_{n\to\infty} e^{tL_n}$ – полугруппа, причем сходимость $e^{tL_n}y_0$ к $U(t)y_0$ равномерна по $t \geq 0$ на любом конечном промежутке;

3) $\left\|e^{tL_n}\right\|_{\mathrm{E}}\leq Me^{\omega t}$, а следовательно, и $\|U(t)\|_{\mathrm{E}}\leq$ $\leq Me^{\omega t}$, где константы M и ω не зависят от n.

Лемма 2 [3, п. 7.2.3]. Пусть функция $\bar z\in \mathrm{E}$ неотрицательна и тождественно не равна нулю. Тогда существует число $\lambda_0 > 0$, такое, что 1) для всех $\alpha\in R$, $\alpha\lambda_0 < 1$ задача

$$\begin{cases}(-L-\alpha I)[\bar y]=\bar z,\\ \bar y\,|_{\partial Q}=0\end{cases}\tag{5}$$

имеет единственное неотрицательное решение; 2) для всех $\alpha\in R$, $\alpha\lambda_0 \geq 1$ задача (5) не имеет неотрицательных решений.

Замечание 1. Таким образом, существует $\omega <$ < 0 ($\omega=-\frac{1}{\lambda_0}$), такое, что при $\lambda > \omega$ из условия $\bar z\in K$ следует $-R_L(\lambda)\bar z\in K$. Как показано в [1, доказательство теоремы 3.4], данное обстоятельство в совокупности с утверждением 1) леммы 1 позволяет заключить, что $e^{tL_n}y\in K$ для всех $y\in K$, $t \geq 0$, и достаточно больших n. Поэтому из лемм 1, 2 получаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Решение задачи (4) при сделанных нами предположениях представляется в виде $U(t)y_0$, где $U(t)$ – полугруппа, обладающая свойствами: 1) $U(t)K\subset K$ для всех $t \geq 0$; 2) $\|U(t)\|_{\mathrm{E}}\leq$ $\leq Me^{\omega t}$.

Лемма 4 [2, теорема 1.6.5]. Если задача Коши вида (4) равномерно корректна, то формула

$$\bar y(t)=U(t)y_0+\int_0^t U(t-s)\bar z(s)ds$$

дает решение задачи (4) при $y_0\in \mathrm{D}(L)$ и функции $\bar z(t)$, удовлетворяющей одному из двух условий: 1) $\bar z(t)\in \mathrm{D}(L)$ и функция $L\bar z(t)$ непрерывна; 2) функция $\bar z(t)$ непрерывно дифференцируема.

Непосредственно из лемм 3, 4 получаем, что справедлива теорема 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными вузами (шифр заявки 1.1907.2011) и при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П(9)).

Список литературы

1. Сабаев Е.Ф. Системы сравнения для нелинейных дифференциальных уравнений и их приложения в динамике реакторов. М.: Атомиздат, 1980. 192 с.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1962. 396 с.

4. Чернов А.В. О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Матем. заметки. 2010. Т. 88. № 2. С. 288–302.

5. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Матем. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. Вып. 1. С. 91–117.

6. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.

7. Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.

8. Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400-1414.

9. Чернов А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.

10. Чернов А.В. О вольтерровых функционально-операторных играх с нефиксированной цепочкой // Вестник ННГУ. 2012. № 2(1). С. 142–148.

11. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005. 352 с.

ON NONNEGATIVITY OF THE SOLUTION TO THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION

A.V. Chernov

The nonnegativity of the solution to the first boundary value problem for a second order linear parabolic equation of a rather general form is proved.

Keywords: first boundary value problem, parabolic equation, nonnegative solution.