

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО МЕХАНИЗМА
ФОРМИРОВАНИЯ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВНЕДРЕНИЮ
ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В ГРУНТОВЫЕ СРЕДЫ**

© 2013 г.

Е.Ю. Линник

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

foxlen13@rambler.ru

Поступила в редакцию 25.06.2012

На основе численного метода Годунова и модели локального взаимодействия проведено сравнительное исследование процессов удара и проникания в грунт осесимметричных сферических и конических ударников. Показано, что ошибка применимости модели определяется отношением максимального и квазистационарного значений сил сопротивления внедрению.

Ключевые слова: численное моделирование, модель локального взаимодействия, сферический ударник, конический ударник, удар, проникание, грунтовая среда, коэффициент внутреннего трения.

Введение

Задачи о движении заостренных и затупленных твердых осесимметричных тел в потоке среды изучались многими российскими и зарубежными авторами. Актуальность исследований обусловлена тем, что задачи удара и глубокого проникания наряду с важным научным значением широко представлены в специальном машиностроении, нефтегазовой и горнодобывающей промышленности при глубоком бурении, зондировании космических и наземных объектов. При решении задач глубокого проникания широкое распространение получили численно-аналитические методы на основе модели локального взаимодействия для связи кинематических и силовых факторов на поверхности контакта тела и среды. Распространение подобных приближенных методов объясняется тем, что такие характеристики движения тела, как глубина проникания, сила сопротивления и контактные напряжения могут быть связаны с его геометрией. На практике среди соотношений для напряжений, действующих на площадке контакта, наиболее часто используется двухчленная модель взаимодействия, содержащая динамическую составляющую, квадратичную по скорости, с постоянным слагаемым, характеризующим прочность среды. Для сыпучих сред и геоматериалов, например, песчаных или гравелистых грунтов, прочностное слагаемое в законе сопротивления мало, но присутствует линейный по скорости член, обусловленный наличием внутреннего трения. В данной работе проводится анализ погрешности и оценка применимости модели локального взаимодействия на

основе численных исследований процессов формирования сил сопротивления внедрению сферических и конических ударников в грунт с учетом внутреннего трения.

**Постановка задачи проникания
ударника в грунт**

Численное исследование осесимметричной задачи проникания ударника в мягкие грунтовые среды проводится в рамках модели Григоряна [1], которая записывается в цилиндрической системе координат rOz (Oz – ось симметрии) в виде системы дифференциальных уравнений неразрывности, изменения количества движения и соотношений теории пластического течения:

$$\begin{aligned} d\rho/dt + \rho(v_{r,r} + v_{z,z}) &= -(\rho v_r)/r, \\ \rho dv_r/dt - \sigma_{rr,r} - \sigma_{rz,z} &= (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r, \\ \rho dv_z/dt - \sigma_{rz,r} - \sigma_{zz,z} &= (\sigma_{rz})/r, \\ D_j s_{ij} + \lambda s_{ij} &= 2G e_{ij} \quad (i, j = r, z), \\ p &= f_1(\rho)H(\rho - \rho_0), \\ s_{ij} s^{ij} &\leq \frac{2}{3} f_2^2(p), \end{aligned} \quad (1)$$

где t – время, d/dt – полная производная по времени, ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотности, v – вектор скорости среды, σ – тензор напряжений Коши, s , e – девиаторы тензора напряжений и скоростей деформаций соответственно, H – функция Хевисайда, p – давление, D_j – производная Яуманна, G – модуль сдвига; $f_1(\rho)$, $f_2(p)$ – заданные функции, f_1 характеризует объемную сжимаемость грунта, f_2 – функ-

циональная зависимость в условии текучести Мизеса–Шлейхера, $\lambda > 0$ при выполнении условия пластичности.

Жесткий цилиндрический ударник со сферическим и коническим оголовками проникает с постоянной скоростью V_0 , направленной по нормали к свободной поверхности грунта. В начальный момент времени скорости и напряжения в грунте равны нулю. На границе контакта тело–грунт применялись условия непроницаемости по нормали и проскальзывания без трения в касательном направлении [2]. Решение задачи осуществлялось с применением модифицированного [3] численного метода Годунова первого порядка точности, реализованного в пакете прикладных программ «Динамика-2» [4] НИИМ Нижегородского госуниверситета.

Решение задачи на основе модели локального взаимодействия

Приближенное решение задачи осуществляется на основе гипотезы локального взаимодействия. В соответствии с одной из ее реализаций давление в каждом элементе боковой поверхности ударника отождествляется с давлением в сферической полости, расширяющейся в безграничной среде от нулевого радиуса до радиуса ударника с постоянной массовой скоростью U . Система одномерных уравнений пластического деформирования грунтовой среды следует из (1) и включает уравнения неразрывности и изменения количества движения в эйлеровых переменных:

$$\begin{aligned} \rho(v_{r,r} + 2v_r/r) &= -d\rho/dt, \\ \sigma_{rr,r} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r &= -\rho dv_r/dt, \\ \sigma_{rr} &= f_1(\rho), \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = f_2(p), \\ v_r|_{r=R_0} &= U, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_0} = 0, \quad [v_r] = [\sigma_{rr}] = [\sigma_{\theta\theta}] = 0, \\ R_0|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Сжимаемость грунта характеризуется ударной адиабатой

$$c = A + \lambda U,$$

представленной линейной зависимостью скорости ударной волны c от массовой скорости U за ее фронтом.

Сопротивление сдвигу описывается линейной зависимостью предела текучести от давления

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \rho_0 A^2 \theta / (1 - \lambda \theta)^2, \quad \theta \equiv 1 - \rho_0 / \rho, \\ f_2 &\equiv \sigma_0 + \mu \sigma_{rr}. \end{aligned} \quad (2)$$

Константа A в (2) характеризует скорость распространения волны сжатия в грунте при малых давлениях, λ – предельную сжимаемость

грунта, σ_0 и μ определяют сцепление и внутреннее трение в рамках модели грунтовой среды Григоряна [1].

Напряжения σ на внутренней границе расширяющейся сферической полости в зависимости от коэффициента внутреннего трения определяются выражениями, полученными аналогично [5, 6] в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_\tau + \rho U^2 C, \quad (3) \\ \sigma_\tau &= \begin{cases} -2\sigma_0 \ln \varepsilon, & \mu = 0; \\ 2\sigma_0(1 - \varepsilon^{-1}), & \mu = 0.5; \\ \sigma_0(1 - \varepsilon^{-2\mu})/\mu, & \mu \neq 0, \mu \neq 0.5, \end{cases} \\ C &= \begin{cases} (3/2 - \varepsilon - \varepsilon^4/2), & \mu = 0; \\ (1/3 - 2 \ln \varepsilon - \varepsilon^3/3), & \mu = 0.5; \\ \frac{3}{(\mu - 2)(2\mu - 1)} + \frac{2\mu + 1}{2\mu - 1} \varepsilon^{1-2\mu} - \\ - \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \varepsilon^{4-2\mu}, & \mu \neq 0, \mu \neq 0.5, \end{cases} \\ \rho &= \rho_0 / (1 - \varepsilon^3), \quad \varepsilon = U/c, \\ c &= \lambda^{1/3} U + A/3, \end{aligned}$$

где ρ – плотность за фронтом ударной волны, распространяющейся со скоростью c .

Решение (3) используется при определении коэффициентов модели локального взаимодействия (МЛВ), в которой напряжение имеет квадратичную зависимость от скорости внедрения

$$\sigma = \alpha U^2 + \beta U,$$

где U – компонента вектора скорости, направленная по нормали к поверхности ударника. Для сферического тела имеем $U = V_0 \cos \varphi$, угол φ отсчитывается от вершины головной части ударника в направлении свободной поверхности. Сила сопротивления внедрению сферического ударника имеет вид

$$F/qS_0 = \frac{\alpha}{2}(1 - \cos^4 \varphi) + \frac{2\beta}{3V_0}(1 - \cos^3 \varphi). \quad (4)$$

Для конического ударника с углом полураствора γ имеем $U = V_0 \sin \gamma$ и

$$F/qS_0 = \alpha \sin^2 \gamma + \frac{\beta}{V_0} \sin \gamma. \quad (5)$$

Величина силы сопротивления отнесена к произведению скоростного напора $q = \rho_0 V_0^2$ и площади миделева сечения основания ударника $S_0 = \pi R^2$.

При аппроксимации напряжений, соответствующих формуле (3) в диапазоне скоростей 200–800 м/с, методом наименьших квадратов были получены [9] параметры модели $\alpha \in [1; 1.5]$,

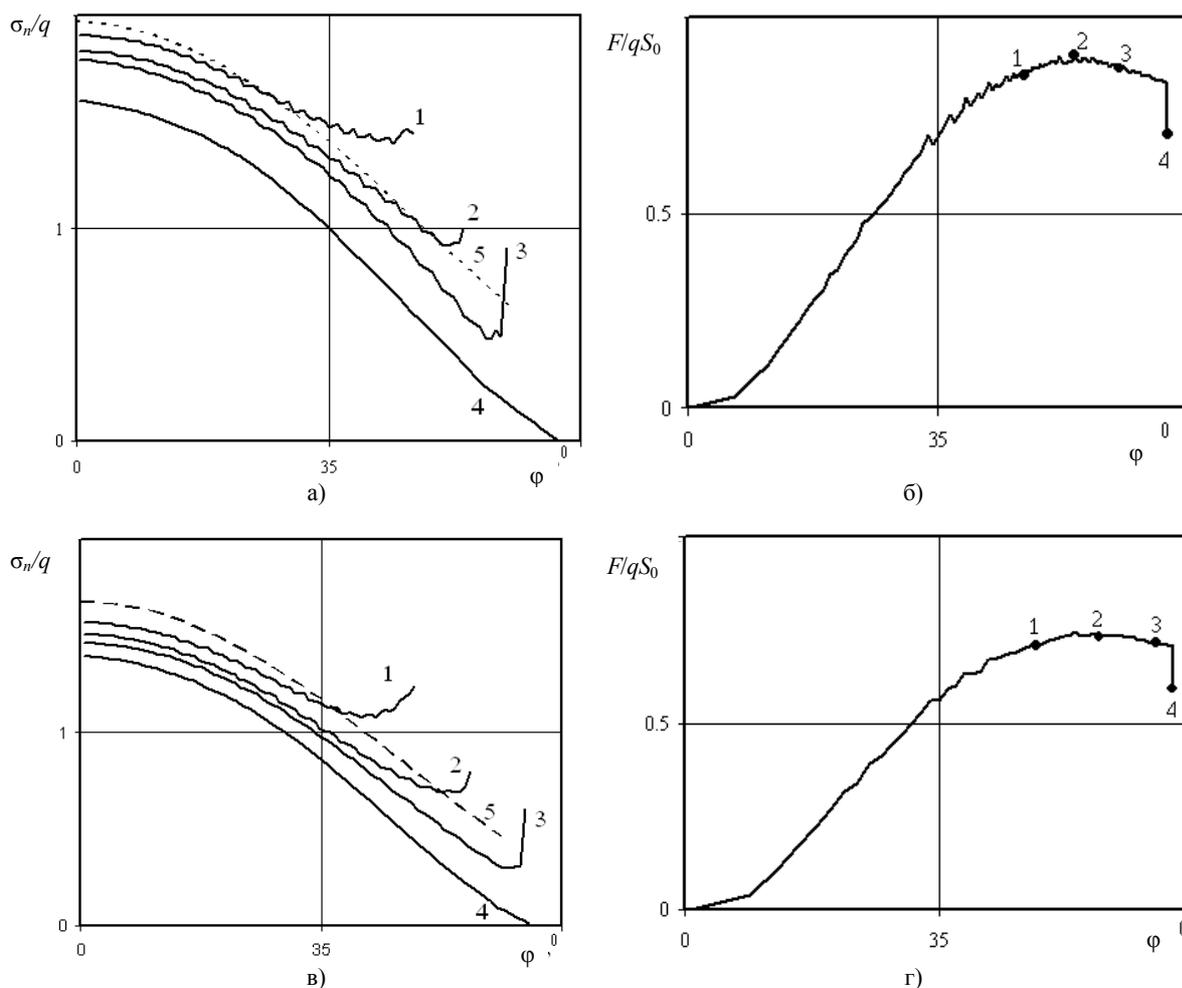


Рис. 1. Нормальные напряжения и силы сопротивления для сферического ударника при $k=1, V_0=300$ м/с (а, б), 600 м/с (в, г), 1–4 результаты расчетов, 5 – МЛВ

$\beta \in [2; 21]$ при значениях коэффициента внутреннего трения из допустимого диапазона $\mu \in [0; 0.75]$, определенного в [7]. Значение коэффициента α изменяется незначительно, а коэффициент β возрастает на порядок с ростом коэффициента внутреннего трения.

Анализ погрешности МЛВ относительно численных расчетов

Реализация модели локального взаимодействия, оснащенная параметрами из решения задачи о расширении сферической полости [6], использовалась далее для определения максимального и квазистационарного значений силы сопротивления внедрению сферического ударника в диапазоне скоростей 300–600 м/с в сравнении с численными решениями в осесимметричной постановке. Расчеты проводились при следующих значениях параметров, соответствующих сухой песчаной смеси естественного состава [8]: $A=460$ м/с, $\lambda=2.3$, $\rho_0=1700$ кг/м³.

Проводилось исследование сходимости решений задачи о внедрении с постоянной скоростью 300 м/с жесткого сферического ударника радиуса $R=0.01$ м, полученных на основе применяемой численной методики. Использовалось условие пластичности $f_2 \equiv Y + kp$, $Y=0.01$ МПа, $k=1$. Коэффициенты внутреннего трения μ в условии пластичности (2) и k связаны соотношением $\mu = k / (1 + 2/3k)$. Размеры квадратных ячеек разностных сеток составляли $h=R/n$ при $n=45, 90, 135$ и 180 . Было установлено, что погрешность решения линейно зависит от шага, что соответствует теоретическому порядку точности метода Годунова. В качестве базовой сетки была выбрана разностная сетка с шагом $h=R/90$, при котором погрешность численного решения не превышает 5%.

В расчетах определялись нормальные напряжения и силы сопротивления внедрению сферических ударников в грунт. Результаты, полученные при коэффициенте внутреннего

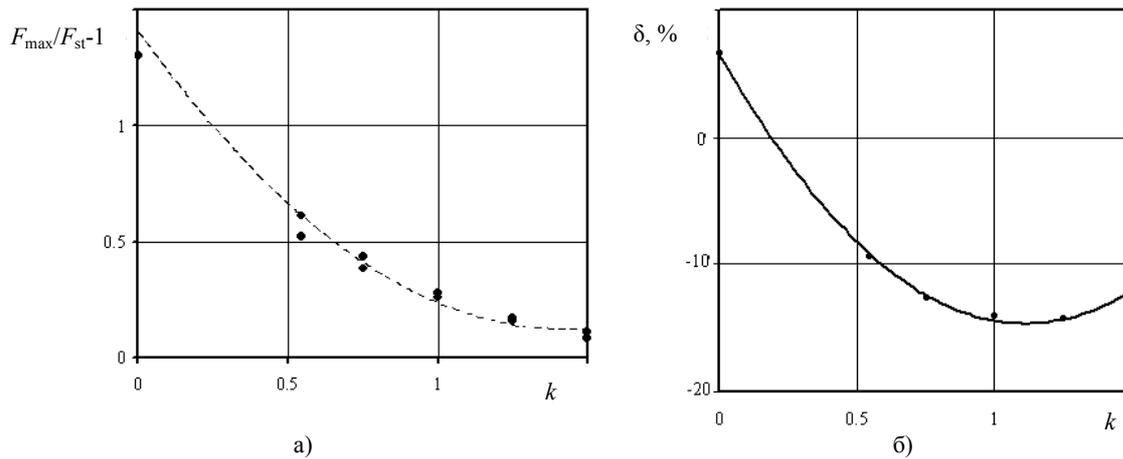


Рис. 2. Отношение максимального и квазистационарных значений силы сопротивления (а) и погрешность МЛВ (б) относительно численных расчетов внедрения сферического ударника в грунт

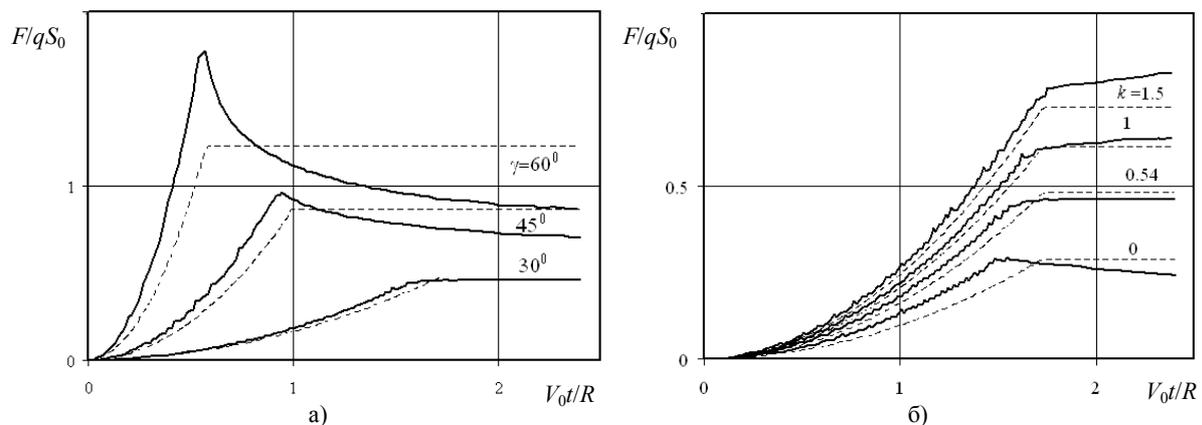


Рис. 3. Безразмерные зависимости силы сопротивления внедрению со скоростью $V_0=A$ при $k=1$ (а) и $\gamma=30^\circ$ (б)

трения $k=1$, представлены на рис. 1 в виде безразмерных зависимостей от угла внедрения.

Кривые 1–3 на рис. 1а, соответствующие распределениям напряжений вдоль поверхности сферического ударника, получены в моменты достижения силой максимальных значений 2 и его окрестности 1, 3 (отмечены точками на рис. 1б). После достижения максимума происходит отрыв потока, площадь смоченной поверхности далее не увеличивается, но сила сопротивления продолжает падать до установления некоторого значения, близкого к постоянному (квазистационарному). Кривая 4 соответствует расчетным распределениям напряжения на этой стадии внедрения. Распределения нормальных напряжений, показанные на рис. 1а кривой 5, получены в рамках МЛВ (4) и хорошо соответствуют численным результатам. Аналогично, на рис. 1в, г приведены данные расчетов для постоянной скорости внедрения 600 м/с. Наблюдается качественное и количественное подобие безразмерных контактных напряжений при слабой зависимости погрешности МЛВ от скорости внедрения.

Далее представлены результаты расчетов внедрения сферы в грунт с постоянной скоростью 300 м/с и 600 м/с при значениях коэффициента внутреннего трения $k=0, 0.54, 1$ и 1.5 . На рис. 2а приведено отношение максимального значения силы сопротивления и силы на квазистационарной стадии внедрения в зависимости от коэффициента внутреннего трения.

На рис. 2б показана погрешность определения максимального значения силы сопротивления внедрению относительно численных решений в осесимметричной постановке. Видно, что погрешность не превосходит 15%. Сравнение кривых на рис. 2а и б обнаруживает сходный характер поведения. Таким образом, отношение максимального значения силы сопротивления и силы на квазистационарной стадии внедрения можно использовать в качестве критерия применимости МЛВ для определения силы сопротивления внедрению сферического ударника.

Для оценки погрешности МЛВ (5) с определенными ранее параметрами проводилось сравнение с численными расчетами максимального и квазистационарного значений силы сопротив-

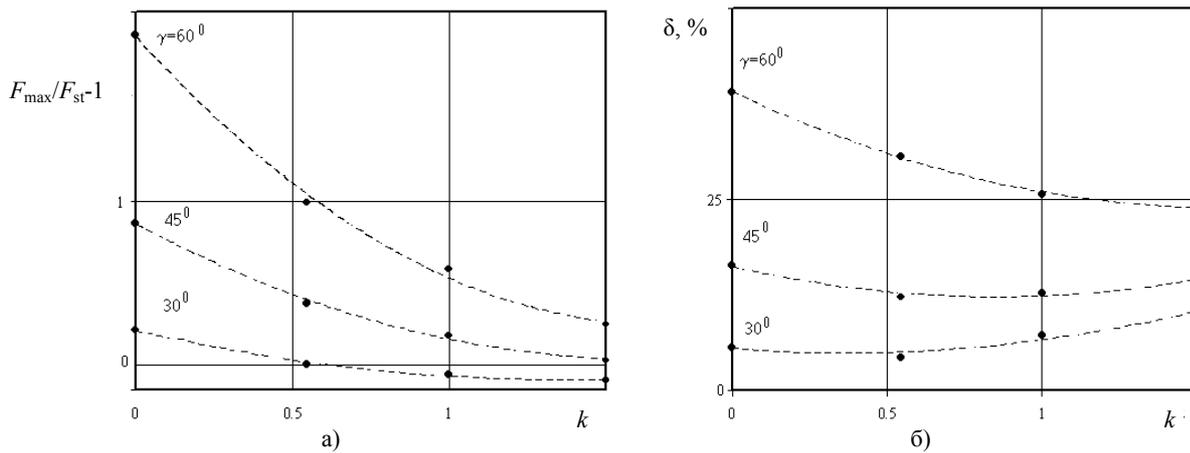


Рис. 4. Отношение максимального и квазистационарного значений силы сопротивления (а) и погрешность МЛВ (б) при внедрении конических ударников в грунт

ления внедрению в грунт конических ударников с углами полураствора $\gamma=30^\circ$, 45° и 60° .

На рис. 3а показаны безразмерные зависимости сил от глубины внедрения, отнесенной к радиусу ударника. Сплошными линиями обозначены численные решения, штриховыми – результаты, полученные в модели локального взаимодействия. На рис. 3б представлены безразмерные силы сопротивления внедрению конического ударника с углом полураствора $\gamma=30^\circ$ при указанных значениях коэффициента внутреннего трения.

Наблюдается хорошее соответствие модели и численных решений при малых углах полураствора и изменении коэффициента внутреннего трения в допустимом диапазоне.

На рис. 4а приведено отношение максимального значения силы сопротивления и силы на квазистационарной стадии внедрения при проникании конических ударников с углами полураствора $\gamma=30^\circ$, 45° и 60° для различных значений коэффициента внутреннего трения. Для тех же конических ударников на рис. 4б показана погрешность определения максимального значения силы сопротивления внедрению в рамках МЛВ (5) относительно результатов численных расчетов

Как видно из рис. 4, кривые для отношения сил и погрешности максимального значения силы внедрения имеют сходный характер поведения. Модель локального взаимодействия (5) дает удовлетворительные результаты в случае, когда данное отношение близко к единице.

Волновой механизм формирования силы сопротивления внедрению

Результаты, полученные при исследовании процессов удара и проникания сферических и конических ударников, находят объяснение в рамках волнового механизма формирования

силы сопротивления внедрению затупленного тела вращения. Контактные напряжения в момент удара близки к напряжениям в плоской волне, которые оцениваются выражением $\rho_0(A + \lambda U)U$. Далее напряжения уменьшаются за счет волнового взаимодействия с полупространством грунта в поперечном направлении. Интенсивность данного взаимодействия зависит от внутреннего трения и, как показано в работе, может быть связана с отношением максимального и квазистационарного значений силы сопротивления, определяемым экспериментально. С течением времени от момента удара в окрестности головной части ударника за счет волнового воздействия в боковом направлении устанавливается напряженное состояние, приближенное к одномерному. Это объясняет невысокую погрешность применения одномерной МЛВ при отношении максимального и квазистационарного значений силы сопротивления внедрению, близком к единице.

Заключение

В осесимметричной постановке проведены численные расчеты процесса удара и проникания жесткого сферического ударника в песчаный грунт. Показано, что нормальные напряжения на смоченной поверхности проникающей сферы изменяются от максимального значения, достигаемого в момент удара, до некоторого квазистационарного значения, которое устанавливается после отрыва потока. Приведены решения одномерной задачи о расширении сферической полости из точки с постоянной скоростью в грунтовой среде, сжимаемость которой описывается ударной адиабатой. Показано, что ошибка применимости модели определяется отношением максимального и квазистационарного значений сил сопротивления внедрению

(что можно считать критерием применимости МЛВ) и является удовлетворительной в случае близости указанного отношения к единице.

Автор выражает благодарность Баженову В.Г. и Котову В.Л. за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.1137, при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для ведущих научных школ (грант НШ-2843.2012.8) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-08-33106-мол_а_вед).

Список литературы

1. Григорян С.С. О приближенном решении некоторых задач динамики грунтов // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 5. С. 944–946.
2. Котов В.Л., Баландин Вл.Вл., Линник Е.Ю., Баландин В.В. Численный анализ методики прямого эксперимента при внедрении полусферического ударника в песчаный грунт // Проблемы прочности и пластичности. 2011. Вып. 73. С. 51–57.
3. Баженов В.Г., Козлов Е.А., Крылов С.В. Численное моделирование нелинейных двумерных задач ударного взаимодействия деформируемых сред и конструкций на основе метода С.К. Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Изд-во ГГУ, 1990. С. 99–106.
4. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В. и др. Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // ММ. 2000. Т. 12. № 6. С. 67–72.
5. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Макарова А.А., Тарасова А.А. Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде // Проблемы прочности и пластичности. 2011. Вып. 73. С. 58–63.
6. Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю. Оценка силы сопротивления внедрению ударника в грунт на основе решения задачи о расширении сферической полости // XVIII международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы конструкций и сплошных сред» им. Горшкова, 2012. С. 13–14.
7. Григорян С.С., Черноусько Ф.Л. Задача о поршне для уравнений динамики грунтов // ПММ. 1961. Т. 25. № 6. С. 867–884.
8. Брагов А.М., Баландин В.В., Ломунов А.К., Филлипов А.Р. Методика определения сжимаемости мягких грунтов по результатам обращенных экспериментов // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 11. С. 52–55.
9. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Гоник Н.Г., Тарасова А.А. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности. 2012. Вып. 74. С. 49–58.

NUMERICAL SIMULATION OF THE WAVE FORMATION MECHANISM OF THE FORCE OF RESISTANCE TO PENETRATION OF BODIES OF REVOLUTION INTO SOIL MEDIUM

E. Yu. Linnik

A comparative study has been carried out of the processes of impact and penetration into soil medium of axisymmetric spherical and conical projectiles on the basis of the Godunov numerical method and the local interaction model. The model applicability error has been shown to be determined by the ratio of maximum and quasi-stationary values of penetration-resistance forces.

Keywords: numerical simulation, local interaction model, spherical projectile, conical projectile, impact, penetration, soil medium, coefficient of internal friction.