

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:534.1

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ «ВОСЬМЕРКОЙ»

© 2013 г.

О.С. Костромина, А.Д. Морозов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

kostro-olga@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.09.2012

Рассматриваются периодические по времени возмущения уравнения Дюффинга–Ван-дер-Поля с гомоклинической «восьмёркой» седла. Проводится аналитическое исследование поведения решений в областях вне «восьмёрки», связанное, прежде всего, с анализом резонансных зон. Устанавливается поведение сепаратрис неподвижной седловой точки отображения Пуанкаре в малой окрестности невозмущённой «восьмёрки». Приводятся результаты численного исследования.

Ключевые слова: резонансы, гомоклинические структуры.

1. Введение

Значительный интерес в теории бифуркаций вызывает задача о периодических по времени возмущениях двумерной гамильтоновой системы с седлом и двумя петлями сепаратрисы в виде восьмёрки (рис. 1). В этой задаче седловая величина невозмущённой системы равна нулю. Бифуркации в окрестности «восьмёрки» в случае ненулевой седловой величины рассмотрены в последнее время в работе [1]. В случае нулевой седловой величины эта задача не исследована. В данной работе мы рассмотрим дифференциальное уравнение Дюффинга–Ван-дер-Поля, которое является хорошей моделью для решения этой задачи. Итак, рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} - x + x^3 = \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)\dot{x} + p_3 \sin p_4 t], \quad (1)$$

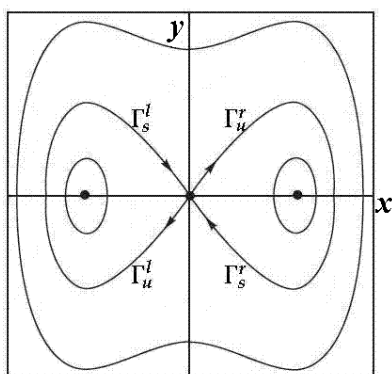


Рис. 1. Фазовый портрет невозмущённого уравнения на плоскости $(x, y = \dot{x})$

где p_1, p_2, p_3, p_4 – параметры, ε – малый положительный параметр. Фазовый портрет невозмущённого уравнения показан на рис. 1. Наряду с многочисленными прикладными задачами, которые приводят к уравнению (1) (см., например, [2, 3], где отсутствуют члены $(p_2x - x^2)\dot{x}$), отметим также автономную задачу о бифуркациях векторных полей на плоскости, инвариантных относительно поворота на угол π [4]. В этой задаче $p_2 = p_3 = 0$ и малые параметры стоят перед линейными членами $(\mu_1x + \mu_2\dot{x})$. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров деформации μ_1, μ_2 приведена в книге Арнольда [4].

Наличие члена с параметром p_2 в (1) приводит к асимметрии фазовых портретов автономного уравнения ($p_3 = 0$). В [5] установлено разбиение плоскости параметров (p_1, p_2) на 22 области с разными топологическими структурами (в симметричном случае – четыре области). К одному из основных эффектов асимметрии следует отнести существование «большой петли сепаратрисы», впервые обнаруженной в [6].

Основные проблемы, которые возникают при исследовании неавтономных уравнений вида (1), следующие:

- 1) установление топологии резонансных зон;
- 2) установление поведения решений в малой окрестности невозмущённых сепаратрис.

2. Анализ топологии резонансных зон

В областях, заполненных замкнутыми фазовыми кривыми невозмущённого уравнения ($\varepsilon = 0$) и отделённых от невозмущённых сепаратрис, запишем уравнение (1) в переменных «действие I – угол θ »:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)y + p_3 \sin \varphi]x'_\theta \equiv \varepsilon F_1(I, \theta, \varphi), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)y + \\ &+ p_3 \sin \varphi]x'_\theta \equiv \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= p_4, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω – частота собственных колебаний.

Рассмотрим резонансный случай, когда

$$\omega(I_{pq}) = (q/p)p_4, \quad (3)$$

где p, q – взаимно простые целые числа.

Уровень $I = I_{pq}$ (замкнутую фазовую кривую невозмущённой системы $H(x, y) = h_{pq}$) будем называть резонансным уровнем. Резонансной зоной будем называть окрестность $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I, \theta) : I_{pq} - C\sqrt{\varepsilon} < I < I_{pq} + C\sqrt{\varepsilon}, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0\}$.

Делая в системе (2) замену

$$\theta = \psi + (q/p)\varphi, \quad I = I_{pq} + \mu\eta, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}, \quad (4)$$

усредняя полученную систему по быстрой переменной φ и пренебрегая членами $O(\mu^3)$, придём к системе [7]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu A_0(v, I_{pq}) + \mu^2 P_0(v, I_{pq})u, \\ \dot{v} &= \mu b u + \mu^2 (b_1 u^2 + Q_0(v, I_{pq})), \end{aligned} \quad (5)$$

где $u = \eta + O(\mu)$, $v = \psi + O(\mu^2)$, $b = d\omega(I_{pq})/dI$,

$$b_1 = d^2\omega(I_{pq})/2dI^2,$$

$$A_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_1(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi, \quad (6)$$

$$P_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} [\partial F_1(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) / \partial I] d\varphi, \quad (7)$$

$$Q_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_2(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Система (5) с помощью замены $u \rightarrow u - \mu Q_0(v, I_{pq})/b$ и перехода к «медленному» времени $\tau = \mu t$ приводится к уравнению маятникового типа [7]

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b A_0(v, I_{pq}) = \mu \sigma(v, I_{pq}) \frac{dv}{d\tau}, \quad (9)$$

где

$$\sigma(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (p_1 + p_2x - x^2) \Big|_{\substack{x=x(I_{pq}, v+q\varphi/p) \\ y=y(I_{pq}, v+q\varphi/p)}} d\varphi. \quad (10)$$

Очевидно, $\sigma = \text{const}$.

Уравнение (9) с точностью до членов порядка μ^2 определяет топологию резонансных зон.

При вычислении функции $A_0(v, I_{pq})$, величин b и σ будем различать следующие случаи.

Случай 1:

$$(x, y) \in G_1^\pm = \{(x, y) : y^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h, h \in (-0.25, 0)\}.$$

Случай 2:

$$(x, y) \in G_2 = \{(x, y) : y^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h, h > 0\}.$$

Функцию $A_0(v, I_{pq})$ представим в виде

$A_{0j}(v, I_{pq}) = \tilde{A}_{0j}(v, I_{pq}) + B_j(I_{pq})$ и обозначим $b = b_j$, $\sigma = \sigma_j$, $j = 1, 2$, где B_j – порождающие функции Пуанкаре–Понтрягина для автономного уравнения в соответствующих областях [5]. В каждом из этих случаев невозмущённое решение в (2) имеет различный вид [5].

Следуя [7], расщепляемыми резонансными уровнями будем называть уровни $I = I_{pq}$, для которых уравнение $A_{0j}(v, I_{pq}) = 0$ имеет простые вещественные корни. При этом уровень $I = I_{pq}$ будем называть: 1) частично проходимым, если $\max_v |\tilde{A}_{0j}(v, I_{pq})| > |B_j(I_{pq})| > 0$, 2) непроходимым, если $B_j(I_{pq}) = 0$. Если $\max_v |\tilde{A}_{0j}(v, I_{pq})| < |B_j(I_{pq})|$, то уровень $I = I_{pq}$ будем называть проходимым.

2.1. Случай 1

Используя невозмущённые решения на резонансном уровне и формулы (6), (10), найдём при $q = 1$

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b_1(p_3 A_1 \cos p v + B_1) = \mu \sigma_1 \frac{dv}{d\tau}, \quad (11)$$

где

$$b_1 = \frac{\pi (2-p)^{3/2} [2(1-p)\mathbf{K}(\rho) - (2-p)\mathbf{E}(\rho)]}{2 \rho^2 (1-p)\mathbf{K}^2(\rho)}, \quad (12)$$

$$\sigma_1 = p_1 - \frac{2}{(2-p)\mathbf{K}(\rho)} \mathbf{E}(\rho), \quad (13)$$

$$A_1 = -\sqrt{2} p_4 \frac{a^p}{1+a^{2p}}, \quad a = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\rho})}{\mathbf{K}(\rho)}\right), \quad (14)$$

\mathbf{K}, \mathbf{E} – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $\rho = k^2$, $k = k(I_{pq})$ – модуль эллиптических интегралов.

При $q > 1$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b_1 B_1 = \mu \sigma_1 \frac{dv}{d\tau}. \quad (15)$$

Итак, при $q = 1$ топология резонансных зон описывается уравнением (11). Фазовые портреты этого уравнения хорошо известны [7]. При $B_1(I_{pq}) = 0$, когда резонансный уровень $I = I_{pq}$ совпадает с уровнем $I = I_0$, в окрестности которого у автономного уравнения существует предельный цикл, имеем непроходимый резонанс. При $|B_1(I_{pq})| < |p_3 A_1(I_{pq})|$, $B_1(I_{pq}) \neq 0$, резонанс частично проходимый, а при $|B_1(I_{pq})| > |p_3 A_1(I_{pq})|$ – проходимый. При $q > 1$ и $B_1(I_{pq}) \neq 0$, согласно (15), имеем проходимый резонанс.

Отметим, что собственная частота $\omega(I)$ удовлетворяет условию $\omega(I) \in (0, \sqrt{2})$. Поэтому из условия резонанса (3) следует $p > p_4/\sqrt{2}$. Следовательно, расщепляются лишь резонансные уровни $H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h_{p_1}$, для которых $p > p_4/\sqrt{2}$, причём резонансные уровни с большим значением p лежат ближе к невозмущённой сепаратрисе.

2.2. Случай 2

Аналогично случаю 1 находим уравнение

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b_2(p_3 A_2 \cos p v + B_2) = \mu \sigma_2 \frac{dv}{d\tau}, \quad (16)$$

которое определяет топологию резонансных зон при нечётном p и $q = 1$. В противном случае топология резонансных зон определяется уравнением

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b_2 B_2 = \mu \sigma_2 \frac{dv}{d\tau}. \quad (17)$$

В (16), (17) обозначено

$$b_2 = \frac{\pi (2\rho - 1)^{3/2} [(1 - \rho)\mathbf{K}(\rho) + (2\rho - 1)\mathbf{E}(\rho)]}{4 \rho(1 - \rho)\mathbf{K}^2(\rho)}, \quad (18)$$

$$\sigma_2 = p_1 - \frac{2}{(2\rho - 1)\mathbf{K}(\rho)} (\mathbf{E}(\rho) + (\rho - 1)\mathbf{K}(\rho)), \quad (19)$$

$$A_2 = -2\sqrt{2} p_4 \frac{a^{p/2}}{1 + a^p}. \quad (20)$$

При чётном p и/или $q > 1$ резонанс является проходимым, если $B_2(I_{pq}) \neq 0$.

С помощью программы WInSet [8] было построено отображение Пуанкаре для уравнения (1) при различных значениях параметров. Установлено, что при небольших значениях ε чис-

ленные результаты хорошо согласуются с проведённым теоретическим исследованием.

Рисунок 2 иллюстрирует расщепление резонансных уровней $I = I_{11}$ (рис. 2а, 2б – в области G_1^+ , рис. 2е, 2ф – в области G_2), $I = I_{21}$ (рис. 2с, 2д – в области G_1^+) и $I = I_{31}$ (рис. 2г, 2h – в области G_2). На рисунках 2а, 2с, 2е и 2г показана структура резонансной зоны частично проходимых резонансов (помимо сепаратрис седловой точки отображения Пуанкаре изображены замкнутые инвариантные кривые, которым отвечают предельные циклы возмущённого автономного уравнения), а на остальных – структура непроходимых резонансов.

2. О глобальном поведении решений вне окрестности «восьмёрки»

Резонансные уровни, порождающие предельные циклы в автономном уравнении, являются расщепляемыми, ибо для этих уровней $B_j(I_{pq}) = 0$. Согласно [5], таких уровней не более двух. Из рассматриваемых ячеек выбросим окрестности таких уровней, а оставшиеся области без окрестности «восьмёрки» обозначим через D . Из (11), (14), (16), (20), [5] и [7] следует

Теорема. Число расщепляемых резонансных уровней в D не более чем конечно.

Из этой теоремы вытекает, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ окрестности расщепляемых резонансных уровней не пересекаются. Это позволяет говорить о глобальном поведении решений в рассматриваемых ячейках. Согласно [7], сепаратрисы соседних резонансов пересекаются, что приводит к существованию гетероклинических структур и сложному характеру областей притяжения устойчивых точек.

В качестве примера, иллюстрирующего глобальное поведение решений, рассмотрим ячейку внутри правой петли. Пусть возмущённое автономное уравнение имеет два предельных цикла в этой ячейке, и $\rho = \rho^{(1)}$, $\rho = \rho^{(2)}$ – простые корни порождающей функции Пуанкаре–Понтрягина $B_1^+(\rho)$ в области G_1^+ . Зафиксируем параметр $p_2 = 1.22$ и найдём такие значения параметров p_1 , p_4 , чтобы цикл $\rho = \rho^{(1)}$ совпал с резонансным уровнем $I = I_{21}$, а цикл $\rho = \rho^{(2)}$ – с уровнем $I = I_{31}$. Из условия резонанса (3) имеем: $p_4 = 2\omega(\rho^{(1)}, p_1) = 3\omega(\rho^{(2)}, p_1)$. Из этого соотношения и уравнений, определяющих предельные циклы ($B_1^+(\rho^{(1)}, p_1) = 0$, $B_1^+(\rho^{(2)}, p_1) = 0$), нахо-

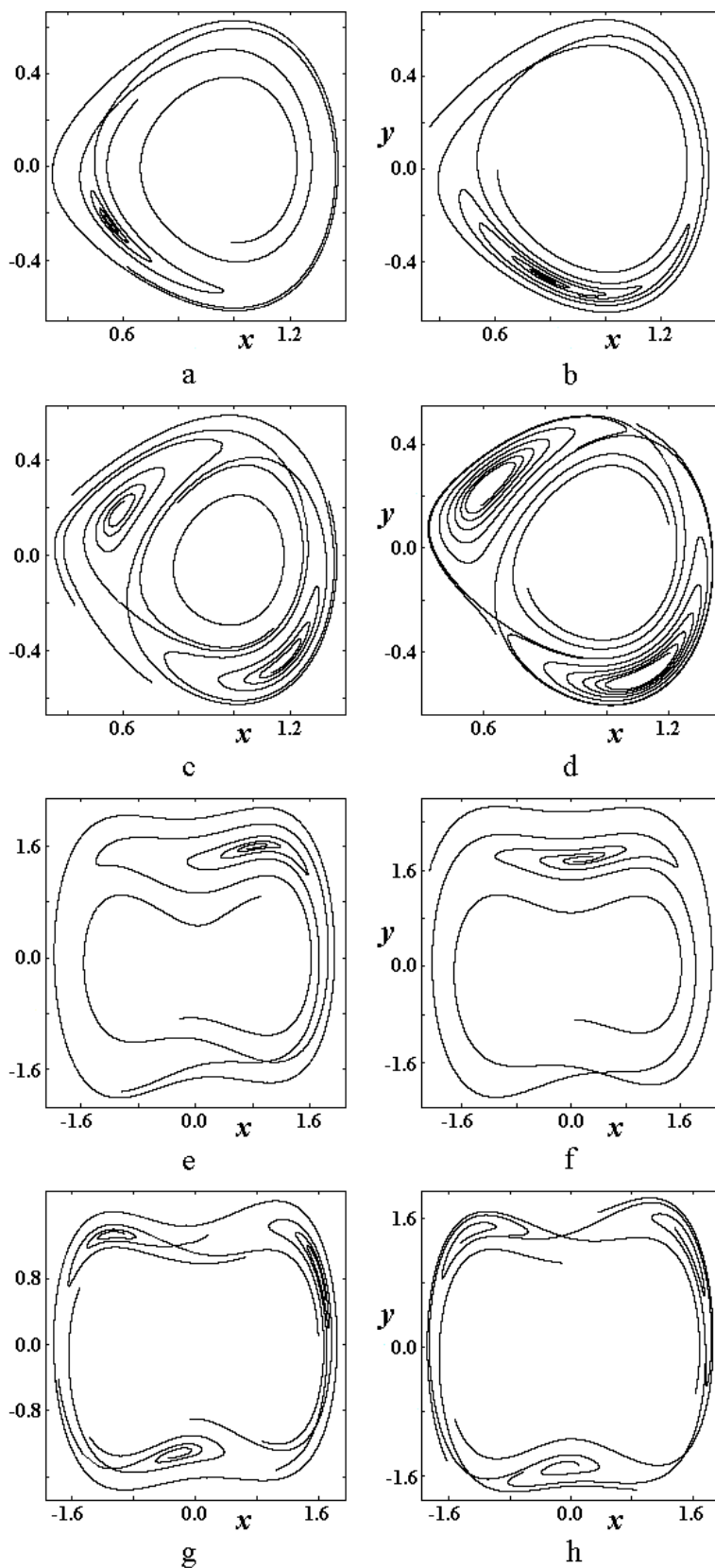


Рис. 2. Поведение инвариантных кривых отображения Пуанкаре для уравнения (1) при $\varepsilon = 0.1$ и $p_1 = 1$, $p_2 = -0.14$, $p_3 = 0.03$, $p_4 = 1.2$ (a); $p_1 = 1$, $p_2 = -0.1$, $p_3 = 0.03$, $p_4 = 1.2$ (b); $p_1 = 1$, $p_2 = -0.02$, $p_3 = 0.5$, $p_4 = 2.5$ (c); $p_1 = 1$, $p_2 = -0.1$, $p_3 = 0.5$, $p_4 = 2.5$ (d); $p_1 = 1.12$, $p_2 = 0.005$, $p_3 = 0.5$, $p_4 = 1.1$ (e); $p_1 = 1.12$, $p_2 = 0.005$, $p_3 = 0.5$, $p_4 = 1.25$ (f); $p_1 = 1$, $p_2 = 0.03$, $p_3 = 1$, $p_4 = 3.1$ (g); $p_1 = 1$, $p_2 = 0.03$, $p_3 = 1$, $p_4 = 3.36$ (h)

дим $p \approx -0.221$, $\rho^{(1)} \approx 0.45$, $\rho^{(2)} \approx 0.98$. Тогда $p_4 \approx 2.782$. В данном случае имеем два непроеходимых резонанса с $p = 2, q = 1$ и $p = 3, q = 1$, а между ними все резонансы будут проходимыми (см. рис. 3). В красной зоне существуют устойчивые периодические точки периода три, в белой зоне – неустойчивые периодические точки периода два, а также устойчивая неподвижная точка, соответствующая состоянию равновесия невозмущённого уравнения. Траектории отображения Пуанкаре, выходящие из окрестности периодических периода два точек, медленно раскручиваются по спирали, замазывая плоскость, поэтому на рисунке они не показаны.

3. Анализ поведения решений в малой окрестности невозмущённой «восьмёрки»

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) имеет правую петлю $\Gamma^r = \Gamma_s^r \cup \Gamma_u^r$ сепаратрисы седла $O(0, 0)$ и левую $\Gamma^l = \Gamma_s^l \cup \Gamma_u^l$ (см. рис. 1).

Как известно, под действием возмущения сепаратрисы неподвижной седловой точки отображения Пуанкаре могут пересекаться, образуя гомоклиническую структуру. Возможны случаи:

- 1) $\Gamma_s^r \cap \Gamma_u^r \neq \emptyset$ и/или $\Gamma_s^l \cap \Gamma_u^l \neq \emptyset$;
- 2) $\Gamma_u^r \cap \Gamma_s^l \neq \emptyset$ или $\Gamma_s^r \cap \Gamma_u^l \neq \emptyset$.

Вопрос о существовании гомоклинической структуры типа 1) решается с помощью формулы Мельникова [9] $\Delta(t_0) = \varepsilon \Delta_1(t_0) + O(\varepsilon^2)$, где $\Delta(t_0)$ есть расстояние между родственными ветвями сепаратрисы, на которые расщепляется невозмущённая сепаратриса.

В работе [9] при получении формулы для $\Delta_1(t_0)$ предполагалось, что возмущение обращается в нуль в состоянии равновесия типа седло при любых значениях t . Для уравнения (1) это условие не выполняется. Поэтому сделаем в уравнении (1) замену $x = \xi + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$, где

$$x_1(t) = -\frac{p_3}{1+p_4} \sin(p_4 t). \quad (21)$$

В результате придём к уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - \xi + \xi^3 = \varepsilon[(p_1 + p_2 \xi - \xi^2)\dot{\xi} + \\ + \frac{3p_3}{1+p_4} \xi^2 \sin(p_4 t)]. \end{aligned} \quad (22)$$

В седловой точке ($\xi = 0, \dot{\xi} = 0$) правая часть уравнения (22) обращается в нуль при любых t . Применяя к этому уравнению формулу Мельникова, находим

$$\begin{aligned} \Delta_1(t_0) = 2 \left(\frac{2}{3} p_1 \pm \frac{\pi}{8} \sqrt{2} p_2 - \frac{8}{15} \right) + \\ + \frac{3\pi p_4}{2 \operatorname{ch}(\pi p_4 / 2)} p_3 \cos(p_4 t_0). \end{aligned} \quad (23)$$

Если $\Delta_1(t_0)$ – знакопеременная функция, что возможно при условии

$$|p_3| > p_3^* = \frac{4}{3} \left| \left(\frac{2}{3} p_1 \pm \frac{\pi}{8} \sqrt{2} p_2 - \frac{8}{15} \right) \frac{\operatorname{ch}(\pi p_4 / 2)}{\pi p_4} \right|, \quad (24)$$

то имеет место трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий неподвижной точки.

Если $\Delta_1(t_0)$ – знакопостоянная функция, то соответствующие сепаратрисные многообразия седловой неподвижной точки не пересекаются.

Однако если при этом величина $|p_3 - p_3^*|$ достаточно мала, то в окрестности «восьмёрки» существует нетривиальное гиперболическое множество. Этот результат следует из работы [10] и повторяет соответствующее доказательство из [11].

При условии $|p_3| = p_3^*$ имеем касание (с точностью до членов порядка ε^2) соответствующих сепаратрис неподвижной точки $(0, 0)$.

Используя эти формулы, нетрудно представить все возможные случаи взаимного расположения сепаратрис, получающиеся в результате расщепления левой или правой петель сепаратрисы.

Например, в отсутствие внешнего воздействия условие

$$\frac{2}{3} p_1 + \frac{\pi}{8} \sqrt{2} p_2 - \frac{8}{15} = 0 \quad (25)$$

определяет существование правой петли сепаратрисы. При учёте внешнего воздействия выходящая и входящая сепаратрисы трансверсально пересекаются, образуя гомоклиническую структуру Пуанкаре.

Для левой петли сепаратрисы в этом случае имеем

$$\Delta_1(t_0) = -\frac{\pi}{2} \sqrt{2} p_2 + \frac{3\pi p_4}{2 \operatorname{ch}(\pi p_4 / 2)} p_3 \cos(p_4 t_0). \quad (26)$$

На рис. 4 показана бифуркационная кривая касания устойчивых и неустойчивых сепаратрис, порождённых левой петлёй, на плоскости

$$\left(\frac{p_3}{p_2}, p_4 \right).$$

Точкам на кривой соответствуют

значения параметров p_3, p_4 (для p_1, p_2 , удовлетворяющих соотношению (25)), при которых имеется касание соответствующих сепаратрис неподвижной седловой точки, порождённых левой петлёй.

На рис. 5 показаны сепаратрисы неподвижной точки $(0, 0)$ для уравнения (22) на плоскости $(\xi = x, \dot{\xi} = y)$, построенные численно при $\varepsilon = 0.3$, $p_1 = 0.7551195621$, $p_2 = 0.053875454$, $p_4 = 4$ и (a) $p_3 = 1.13$ (соответствует символ (\circ) на рис. 4), (b) $p_3 = 1.7$ (соответствует символ

(\bullet) на рис. 4), (c) $p_3 = 2.83$ (соответствует символ (\times) на рис. 4). Эти численные результаты хорошо согласуются с теоретическими.

На рис. 6 показаны сепаратрисы неподвижной седловой точки отображения Пуанкаре для уравнения (22) на плоскости $(\xi = x, \dot{\xi} = y)$, порождённые большой петлёй сепаратрисы авто-

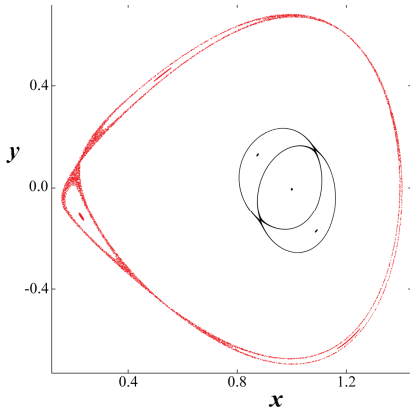


Рис. 3. Траектории отображения Пуанкаре для уравнения (1) при $\varepsilon = 0.01$, $p_1 = -0.221$, $p_2 = 1.22$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2.782$ в области G_1^+

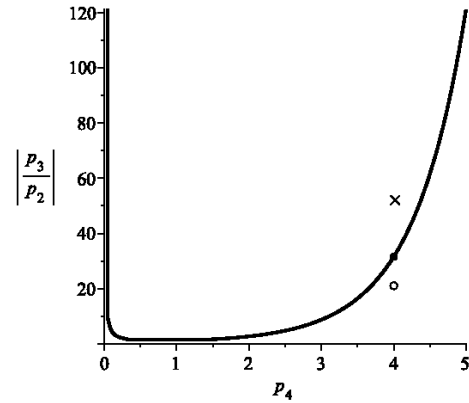


Рис. 4. Бифуркационная кривая касания устойчивых и неустойчивых сепаратрис, порождённых левой петлёй, на плоскости $\left(\left|\frac{p_3}{p_2}\right|, p_4\right)$ при p_1, p_2 , удовлетворяющих соотношению (25)

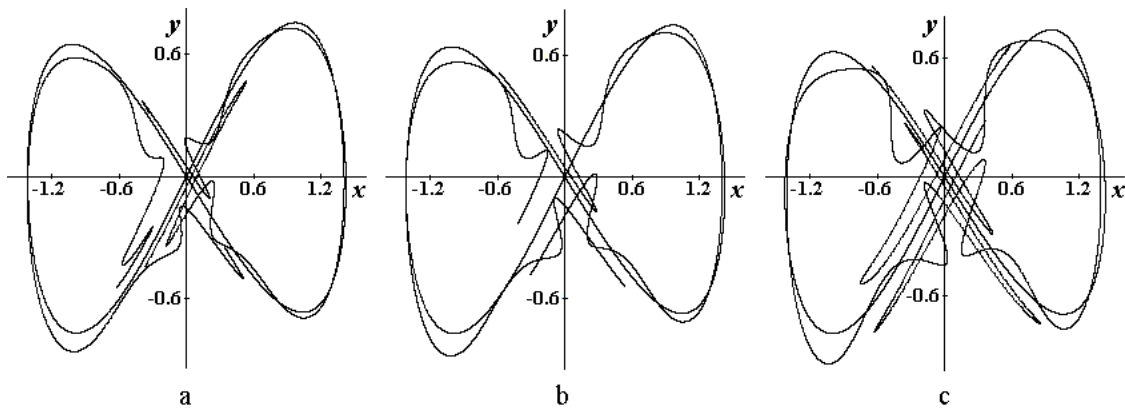


Рис. 5. Поведение сепаратрис неподвижной точки $(0, 0)$ для уравнения (22) на плоскости $(\xi = x, \dot{\xi} = y)$ при $\varepsilon = 0.3$, $p_1 = 0.7551195621$, $p_2 = 0.053875454$, $p_4 = 4$ и $p_3 = 1.13$ (a), $p_3 = 1.7$ (b), $p_3 = 2.83$ (c)

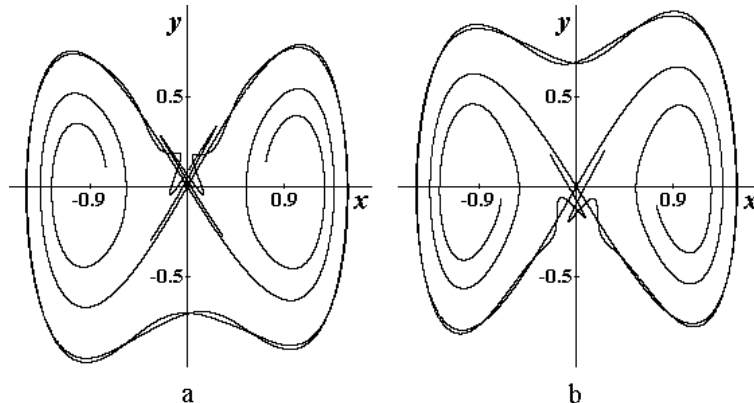


Рис. 6. Поведение сепаратрис неподвижной точки $(0, 0)$ для уравнения (22) на плоскости $(\xi = x, \dot{\xi} = y)$ при $\varepsilon = 0.1$, $p_1 = 0.78549$, $p_3 = 1.02$, $p_4 = 4$ и $p_2 = 1.6$ (a), $p_2 = -1.6$ (b)

номного уравнения, при $\varepsilon = 0.1$, $p_1 = 0.78549$, $p_3 = 1.02$, $p_4 = 4$ и $p_2 = 1.6$ (а), $p_2 = -1.6$ (б). Имеет место трансверсальное пересечение соответствующих сепаратрис ($\Gamma_u^r \cap \Gamma_s^l \neq \emptyset$ на рис. 6а, $\Gamma_s^r \cap \Gamma_u^l \neq \emptyset$ на рис. 6б). При изменении параметров возможны также гомоклинические структуры с касаниями.

Работа поддержана ФЦП «Кадры», № 14.В37.21.0361.

Список литературы

1. Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity* (в печати).
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с. (перевод с англ.).
3. Ravichandran V., Chinnathambiah V., Rajasekhar S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force // *Physica, ser. A*. 2007. V. 376. P. 223–236.
4. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. Костромина О.С., Морозов А.Д. О предельных циклах в асимметричном уравнении Дюффинга–Вандер-Поля // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2012. № 1 (1). С. 115–121.
6. Морозов А.Д., Федоров Е.Л. Об автоколебаниях в двумерных динамических системах, близких к гамильтоновым // *ПММ*. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 602–611.
7. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва–Ижевск: РХД, 2005. 420 с.
8. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
9. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. об-ва*, 1963. Т. 12. С. 3–52.
10. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трёхмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I // *Матем. сб.* 1972. Т. 88. № 4. С. 475–492.
11. Морозов А.Д. О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга // *Дифференциальные уравнения*. 1976. Т. 12. № 2. С. 241–255.

ON TIME-PERIODIC PERTURBATIONS OF TWO-DIMENSIONAL HAMILTONIAN SYSTEMS WITH A HOMOCLINIC «FIGURE-EIGHT»

O.S. Kostromina, A.D. Morozov

Time-periodic perturbations are considered of the Duffing–van-der-Pol equation with a homoclinic «figure-eight» for a saddle. An analytical study of the behavior of solutions in the regions outside of the «figure-eight» is carried out which is focused first of all on the analysis of the resonance zones. The behavior of the separatrices of the saddle fixed point of the Poincaré map in the small neighborhood of the unperturbed «figure-eight» is established. The results of numerical studies are presented.

Keywords: resonances, homoclinic structures.