

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 62-504.14:681.511.4

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ СИНХРОНИЗАЦИИ С ИМПУЛЬСНЫМ ЧАСТОТНО-ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

© 2013 г.

*О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов*

НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета  
им. Н.И. Лобачевского

pmk@unn.ac.ru

*Поступила в редакцию 21.09.2012*

Показано, что разработка математических моделей синтезаторов частоты на основе метода точечных отображений может быть использована как для построения, так и для исследования квазистатических моделей синтезаторов произвольной размерности.

*Ключевые слова:* синтезатор частоты, математическая модель, динамика системы, точечное отображение, неподвижная точка, устойчивость, кратный цикл.

### Введение

В работе [1] была сделана попытка получения качественных сведений нелокального характера об особенностях динамических процессов в системах синхронизации, использующих принцип широтно-импульсной модуляции управляющего сигнала. В качестве конкретного примера была взята схема синтезатора частоты (СЧ) с импульсным частотно-фазовым детектором типа ИЧФДЗН [2] и идеальным астатическим фильтром. Однако несмотря на использование общеметодологического подхода к описанию процессов на основе метода точечных отображений построение соответствующих функций точечных отображений с помощью инженерного подхода, основанного на описании характерных осциллограмм процессов, не позволило в связи с быстрым нарастанием трудностей при анализе осуществить разбиение пространства параметров на области существования движений различной сложности.

В настоящей работе приводятся результаты общего качественного анализа процессов в системе управления работы [1]. Получение общих результатов оказалось возможным за счет распространения подхода к анализу систем с широтно-импульсной модуляцией систем управления, апробированного в [3,4], на системы с разрывным предельным циклом.

### Математическая модель системы

Уравнения рассматриваемой математической модели (ММ) СЧ с управляемой координатой  $x$  в произвольном периоде следования импульсов опорного генератора (ОГ) имеют вид при подключенном выходе детектора

$$\alpha \dot{\theta} = g(x(\tau)),$$

$$\mu \dot{x} = u - x,$$

$$(0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1, u = \pm 1), \quad (1)$$

а при отключенном выходе детектора на этапе хранения информации

$$\alpha \dot{\theta} = g(x(\tau)),$$

$$x(\tau) = x_0,$$

$$(0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1), \quad (2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $\tau$ , изменяющемуся в пределах периода сигнала ОГ;  $0 < \mu \ll 1$  – астатизирующий параметр;  $\alpha$  – показатель счетчика (С);  $u$  – выходной сигнал детектора;  $x$  – выходная координата фильтра;  $\theta$  – координата С, пустого при  $\theta=0$  и заполненного при  $\theta=1$ ;  $x_0$  – начальное условие;  $g(x) > 0$  – нормированная на единицу ( $g(0)=1$ ) характеристика управляемого генератора (УГ).

Согласно методике работ [3,4], учитывающей скачкообразно изменяющийся характер структуры уравнений, для изучения поведения

фазовых траекторий  $\theta(\tau)$ ,  $x(\tau)$  ММ СЧ следует использовать три фазовых подпространства:  $\Pi_1$ , в котором определена система (1) с  $u=+1$ ;  $\Pi_3$ , в котором система (1) определена при  $u=-1$ , и подпространство  $\Pi_2$ , в котором определена система (2).

Поскольку при таком подходе к моделированию динамики СЧ режимы работы детектора обусловлены свойствами фазовых траекторий в каждом из подпространств, а при переходе к случаю идеального астатизма ( $\mu = +0$ ) в силу устойчивости (1) по быстрым движениям при  $\mu = +0$  участков поверхности  $x=u=\text{const}$  фазовая траектория возмущенного при  $\mu \neq 0$  циклического движения располагается в  $O(\sqrt{\mu})$ -окрестности невозмущенного движения [5], и при этом направление и величина мгновенного скачка по координате  $x$  при переходе траектории движения из одного подпространства в другое определены однозначно, – постольку переход к изучению ММ СЧ пониженной размерности является обоснованным, что, в свою очередь, предоставляет возможность проведения полного качественного анализа динамики.

Действительно, согласно логике работы детектора, в регулярном случае изображающая точка движения (ИТД) появляется в подпространстве  $\Pi_1$  после прихода импульса ОГ, т.е. только на границе  $\tau=0$ . Идентифицируя эту границу как сечение  $C_{12}$  (единица в обозначении соответствует номеру подпространства, а двойка – границе  $\tau=0$ ), из (1) при  $u=+1$  находим, что перемещение ИТД в  $\Pi_1$  осуществляется по траектории

$$x(\tau) = +1, \quad \theta(\tau) = \theta_0 + (g(1)/\alpha)\tau \quad (0 < \tau \leq 1) \quad (3)$$

при условии, что в интервале времени  $\tau = [0, +0]$  возможен мгновенный скачок по координате  $x$  из начальной точки  $(x_0, \theta_0)$  в точку  $(+1, \theta_0)$ . При  $x_0 = +1$  такой скачок отсутствует.

При выполнении условия  $\alpha < g(1)$  управляемости СЧ из (3) следует, что  $\theta(\tau=1) > 1$  при любых  $0 \leq \theta_0 \leq 1$ . Но это означает, что движение по траектории (3) всегда заканчивается при некотором значении  $\tau = \bar{\tau} < 1$ , тем самым порождается точечное отображение

$$T_{12,21}: \quad \bar{x} = +1, \quad \bar{\tau} = (\alpha/g(1))(1 - \theta_0) \quad (\theta_0 \in C_{12}, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{21}). \quad (4)$$

В подпространстве  $\Pi_2$ , согласно (2), движение совершается по траектории

$$x(\tau) = +1, \quad \theta(\tau) = (g(1)/\alpha)(\tau - \tau_0) \quad (0 < \tau \leq 1). \quad (5)$$

Из (5) следует, что в зависимости от величины  $\tau_0$  ИТД может перейти по траектории (5) либо на границу  $\theta = 1$  (импульс С) с последующим переносом конечной точки движения в подпространство  $\Pi_3$ , либо на границу  $\tau = 1$  (импульс ОГ) с последующим переносом (возвратом) в  $\Pi_1$ . Указанные движения порождают в  $\Pi_2$  точечные отображения

$$T_{212,31}: \quad \bar{x} = +1, \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha/g(1)) \quad (0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2), (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{31}), \quad (6)$$

$$T_{211,12}: \quad \bar{x} = +1, \quad \bar{\theta} = (g(1)/\alpha)(1 - \tau_0) \quad (\tau_0(\Gamma_2) < \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{12}) \quad (7)$$

и границу  $\Gamma_2$  их определения

$$\Gamma_2: \quad \tau_0(\Gamma_2) = 1 - (\alpha/g(1)). \quad (8)$$

Поскольку ИТД, выходящие из подпространства  $\Pi_2$  в подпространство  $\Pi_1$ , вновь возвращаются в  $\Pi_2$ , целесообразно ввести в рассмотрение отображение  $T_1 = T_{12,21} T_{211,12}$ . Согласно (4), (7)

$$T_1: \quad \bar{x} = +1, \quad \bar{\tau} = (\alpha/g(1)) - 1 + \tau_0 \quad (\tau_0(\Gamma_2) \leq \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{21}). \quad (9)$$

График функции соответствия отображения (6) и график функции последования (9) могут быть представлены на одной диаграмме Ламерея ([5], с. 505) (рис. 1). В общем случае отображение сечения  $C_{21}$  в сечение  $C_{31}$  разрывно, что обуславливает наличие возвратных движений из  $\Pi_2$  в  $\Pi_1$ .

Нетрудно проверить, что

$$T_{21,31}: \quad \bar{x} = +1, \quad \bar{\tau} = \tau_0 + (\alpha/g(1)) - (1 - (\alpha/g(1))m_1) \quad (0 \leq \tau_0 \leq 1), \quad (10)$$

где

$$m_1 = m_1(\tau_0) = \text{ceil}(\tau_0 / (1 - (\alpha/g(1))) - 1), \quad (11)$$

и использует операцию «ceil» округления числа до целого в большую сторону. Поэтому когда при  $\tau_0 < \tau_0(\Gamma_2)$  величина, стоящая за знаком «ceil» в (11) отрицательна,  $\text{ceil}(\dots) = 0$  и формула (10) совпадает с формулой (6), а при  $\tau_0 > \tau_0(\Gamma_2)$   $m_1(\tau_0)$  обозначает число разрывов графика функции соответствия (10), проходимых лесенкой Ламерея, выходящей из точки  $\tau_0 = \tau_3$  до попадания в интервал  $0 \leq \tau_0 \leq \tau_0(\Gamma_2)$  (рис. 1).

Поскольку в  $\Pi_1$   $u=+1$ , а в процессе возвратных движений из  $\Pi_2$  в  $\Pi_1$  и обратно, связан-

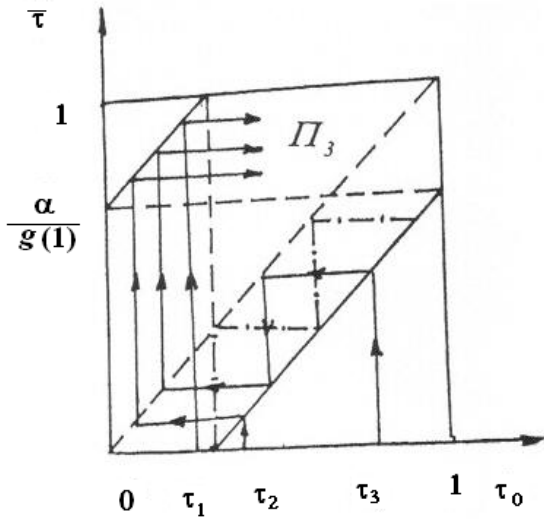


Рис. 1

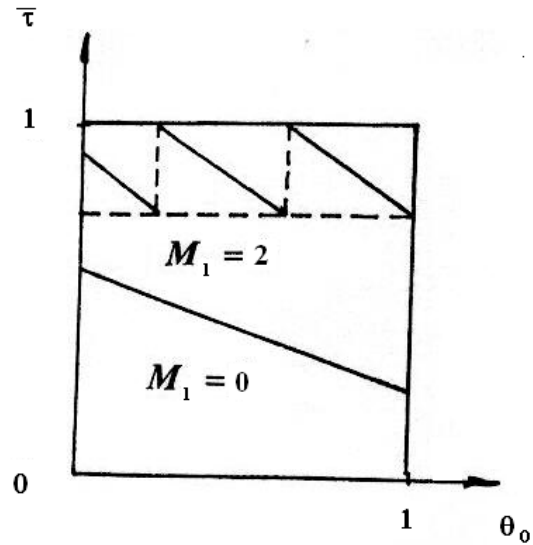


Рис. 2

ных с чередованием импульсов ОГ и С, детектор подключает и отключает один и тот же генератор напряжений (ГН), сохраняя при этом величину  $u \equiv +1$ , имеет смысл ввести в рассмотрение отображение  $T_+ = T_{212,31} T_{12,21}$  точек  $(x_0, \theta_0)$  сечения  $C_{12} \in \Pi_1$  в точки  $(\bar{x}, \bar{\tau})$  сечения  $C_{31} \in \Pi_3$ . Подставляя величину  $\bar{\tau}$  из (4) на место величины  $\tau_0$  в (10), находим, что

$$T_+ : \bar{x} = +1, \quad \bar{\tau} = (\alpha/g(1))(m_1 + 2 - \theta_0) - m_1 \quad (0 \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{31}), \quad (12)$$

где

$$m_1 = m_1(\theta_0) = \text{ceil}(((\alpha/g(1)) \times (2 - \theta_0) - 1) / (1 - (\alpha/g(1)))). \quad (13)$$

Из (13) следует, что величина  $M_1 = \max_{\theta_0} m_1(\theta_0)$  достигается при  $\theta_0 = 0$  и определяет граничное значение

$$\alpha(M_1) = (M_1 + 1)g(+1) / (M_1 + 2) \quad (M_1 = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Разрывы функции (12) располагаются при  $\theta_0 = \theta_{0p}$  ( $p$  – разрыв), где

$$\theta_{0p} = 1 - (g(1)/\alpha) - 1 + m_1 \quad (\alpha > g(1)/2, m_1 = 0, 1, \dots, M_1). \quad (15)$$

Вид графиков функции соответствия (12) отображения  $T_+$  для случаев  $M_1=0$  и  $M_1=2$  приведен на рис. 2.

Движение в  $\Pi_3$  начинается из точки  $(x_0, \tau_0)$ , лежащей на границе  $\theta = 0$  (т.е. в сечении  $C_{31}$ ) и осуществляется, согласно (2), по траектории

$$x(\tau) = -1, \quad \theta(\tau) = (g(-1)/\alpha)(\tau - \tau_0)$$

$$(0 < \tau \leq 1) \quad (16)$$

при условии мгновенного скачка по координате  $x$  из точки  $x_0 = 1$  в точку  $x(\tau = +0) = -1$ .

При выполнении условия  $\alpha > g(-1)$  управляемости СЧ движение по траектории (16) в силу того, что  $\theta(\tau = 1)$  при всех  $0 \leq \tau_0 \leq 1$  меньше единицы, оказывается на границе  $\tau = 1$  подпространства  $\Pi_3$  при некотором значении  $\theta = \bar{\theta}$ , порождая тем самым точечное отображение

$$T_{31,22} : \bar{x} = -1, \quad \bar{\theta} = (g(-1)/\alpha)(\tau - \tau_0) \quad (0 \leq \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{22}). \quad (17)$$

Поскольку в  $\Pi_3$  импульс ОГ всегда появляется раньше, чем импульс С, ИТД переносится из  $\Pi_3$  в  $\Pi_2$  на границу  $\tau = 0$  (сечение  $C_{22}$ ) с начальными значениями  $x$  и  $\theta$ , определяемыми соотношениями (17). Дальнейшее движение в подпространстве  $\Pi_2$ , согласно (2), осуществляется по траектории

$$x(\tau) = -1, \quad \theta(\tau) = \theta_0 + (g(-1)/\alpha)\tau \quad (0 \leq \tau \leq 1). \quad (18)$$

В зависимости от величины  $\theta_0$  ИТД может перейти по траектории (18) либо на границу  $\tau = 1$  (импульс ОГ) с последующим переносом в подпространство  $\Pi_1$ , либо на границу  $\theta = 1$  (импульс С) с последующим переносом (возвратом) в  $\Pi_3$ . Указанные движения порождают в  $\Pi_2$  точечные отображения

$$T_{22,12} : \bar{x} = -1, \quad \bar{\theta} = \theta_0 + (g(-1)/\alpha) \quad (0 \leq \theta_0 \leq \theta_0(\Gamma_4), (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{12}), \quad (19)$$

$$T_{222,31}: \quad \bar{x} = -1, \quad \bar{\tau} = (\alpha/g(-1))(1-\theta_0) \quad (M_2 = 0,1,\dots) \quad (25)$$

$$(\theta_0(\Gamma_4) \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\tau}) \in C_{31}), \quad (20)$$

и границу их определения

$$\Gamma_4: \theta_0(\Gamma_4) = 1 - (g(-1)/\alpha). \quad (21)$$

Поскольку ИТД, выходящие из подпространства  $\Pi_2$  в подпространство  $\Pi_3$ , вновь возвращаются в  $\Pi_2$ , целесообразно ввести в рассмотрение отображение  $T_2 = T_{31,22} T_{222,31}$ . Согласно (17), (20)

$$T_2: \quad \bar{x} = -1, \quad \bar{\theta} = (g(-1)/\alpha) - 1 + \theta_0$$

$$(\theta_0(\Gamma_4) \leq \theta_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{22}). \quad (22)$$

График функции соответствия (19) и график функции последования (22) могут быть представлены на одной диаграмме Ламерея. Эту диаграмму можно получить, произведя на рис. 1 следующие преобразования:  $\tau_0 \rightarrow \theta_0$ ,  $\bar{\tau} \rightarrow \bar{\theta}$ ,  $\tau_1 \rightarrow \theta_1$ ,  $\tau_2 \rightarrow \theta_2$ ,  $\tau_3 \rightarrow \theta_3$ ,  $\alpha/g(+1) \rightarrow g(-1)/\alpha$ ,  $\Pi_3 \rightarrow \Pi_1$ .

Повторяя рассуждения, сделанные при анализе диаграммы Ламерея, приведенной на рис. 1, для графиков функции соответствия  $T_{222,31}$  и функции последования  $T_1$  можно отметить, что любая фазовая траектория, уходящая с сечения  $C_{31}$  подпространства  $\Pi_3$  и попадающая затем в  $\Pi_2$ , оказывается либо сразу, либо после некоторого количества возвратных движений в интервале-ловушке  $0 \leq \theta_0 \leq \theta_0(\Gamma_4)$ , из которого отображением  $T_{221,12}$  переводится в подпространство  $\Pi_1$  на сечение  $C_{12}$ . Поскольку в  $\Pi_3$   $u = -1$ , а в процессе возвратных движений из  $\Pi_2$  в  $\Pi_3$  и обратно, связанных с чередованием импульсов ОГ и С, детектор подключает и отключает один и тот же ГН, сохраняя при этом величину  $u \equiv -1$ , имеет смысл ввести в рассмотрение отображение  $T_-$  точек  $(x_0, \tau_0)$  сечения  $C_{31} \in \Pi_3$  в точки  $(\bar{x}, \bar{\theta})$  сечения  $C_{12} \in \Pi_1$ . Нелегко проверить, что

$$T_-: \quad \bar{x} = -1, \quad \bar{\theta} = (g(-1)/\alpha)(m_2 + 2 - \tau_0) - m_2$$

$$(0 \leq \tau_0 \leq 1, (\bar{x}, \bar{\theta}) \in C_{12}), \quad (23)$$

где

$$m_2 = m_2(\tau_0) = \text{ceil}(((g(-1)/\alpha) \times (2 - \tau_0) - 1) / (1 - (g(-1)/\alpha))). \quad (24)$$

Из (24) следует, что величина  $M_2 = \max_{\tau_0} m_2(\tau_0)$  достигается при  $\tau_0 = 0$  и определяет граничное значение

$$\alpha(M_2) = (M_2 + 2)g(-1)/(M_2 + 1)$$

Разрывы функции соответствия (23) располагаются при  $\tau_0 = \tau_{0p}$ , где

$$\tau_{0p} = 1 - (\alpha/g(-1)) - 1 + m_2$$

$$(\alpha < 2g(-1), m_2 = 0,1,\dots,M_2) \quad (26)$$

Вид графиков функции соответствия (23) отображения  $T_-$  для случаев  $M_2 = 0$  и  $M_2 = 2$  с точностью до переименования осей совпадает с видом графиков, приведенных для отображения  $T_+$  на рис. 2.

### Качественное исследование математической модели системы

Из приведенных формул для отображений  $T_+$  и  $T_-$  следует, что стационарные движения в рассматриваемой ММ СЧ описываются свойствами циклического отображения  $T$ , равного произведению отображений  $T_+$  и  $T_-$ , и поэтому для построения диаграммы Ламерея для отображения  $T$  достаточно воспользоваться построением графиков функций соответствия отображений  $T_+$  и  $T_-$  на одной диаграмме ([5], с. 505).

Для простейшего случая, когда  $2g(-1) < \alpha < g(+1)/2$ , т.е.  $M_1 = M_2 = 0$ , и, следовательно, графики функций соответствия отображений  $T_+$  и  $T_-$  не имеют разрывов, совместная диаграмма приведена на рис. 3. Для установления системной связи между количеством разрывов у отображений  $T_+$  и  $T_-$  и характером пересечения их графиков необходимо конкретизировать вид функции  $g(x)$ . В случае линейной функции  $g(x) = 1 + \Delta x$  таким системообразующим параметром является крутизна характеристики  $S$ .

Считая в соотношениях (14) и (25)  $M_1$  и  $M_2$  заданными числами, находим, что на плоскости  $(\alpha, S > 0)$  уравнения границ областей существования определенного количества разрывов принимают вид:

у отображения  $T_+$

$$S = S(M_1) = -1 + ((M_1 + 2)/(M_1 + 1))\alpha$$

$$(M_1 = 0,1,\dots), \quad (27)$$

у отображения  $T_-$

$$S = S(M_2) = 1 - ((M_2 + 1)/(M_2 + 2))\alpha$$

$$(M_2 = 0,1,\dots). \quad (28)$$

На плоскости  $(\alpha, S > 0)$  в пределах границ управляемости  $S \geq \alpha - 1$  ( $\alpha \geq 1$ ),  $S \geq 1 - \alpha$  ( $\alpha \leq 1$ ) и условия  $S < 1$ , эквивалентного физическому условию  $g(-1) > 0$  положительности часто-

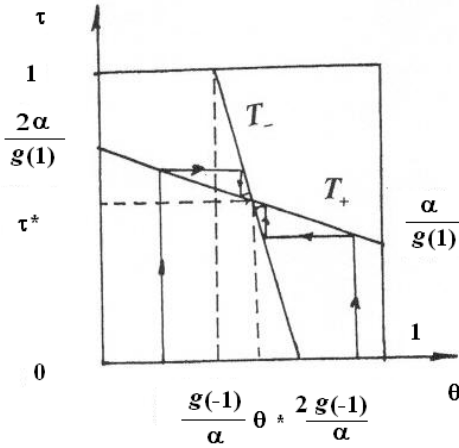


Рис. 3

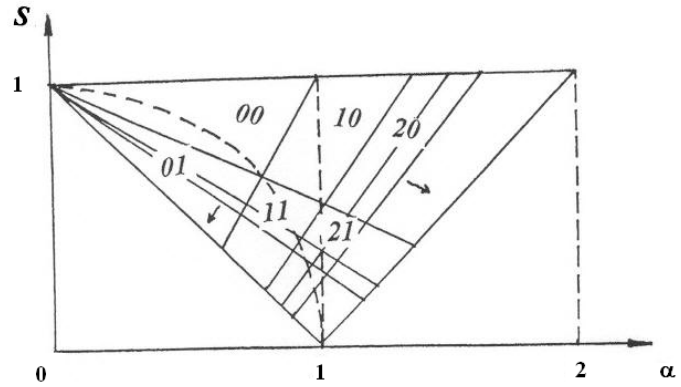


Рис. 4

ты УГ, области с границами (27), (28) образуют два пересекающихся веера (рис. 4). При установленной классификации областей рис. 3 соответствует параметрам  $\alpha, S$ , принадлежащим области № 00. При переходе на плоскости  $(\alpha, S)$  из области № 00 в область № 11 совместная диаграмма для отображений  $T_+$  и  $T_-$  принимает вид, приведенный на рис. 5.

Переходя к общему анализу относительного расположения графиков функций соответствия отображений  $T_+$  и  $T_-$ , необходимо отметить, что на плоскости  $(\alpha, S)$  имеется геометрическое место точек

$$\alpha = \sqrt{1 - S^2} \quad (0 \leq S \leq 1), \quad (29)$$

на котором выполняется условие  $M_1 = M_2 = M$ . На кривой (29) в интервале  $0.8 \leq \alpha \leq 1$  величина  $\alpha$  появления разрыва графиков для  $T_+$  и  $T_-$  одинакова и определяется соотношением

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{1 - S}{1 + S}}, \quad (30)$$

причем  $\max_S \alpha = \alpha(0.6) = 0.5$ .

Согласно рис. 5 ближайшие точки разрывных частей графиков функций соответствия отображений  $T_+$  и  $T_-$  имеют координаты для  $T_+$   $\theta = \theta_{op}(m_1 = 0) = 2 - (g(1)/\alpha)$ ,  $\tau = \alpha/g(1)$  и для  $T_-$   $\theta = g(-1)/\alpha$ ,  $\tau = \tau_{op}(m_2 = 0) = 2 - (\alpha/g(-1))$ . Рассмотрим разности координат указанных точек

$$\Delta_1 = \theta_{op}(m_1 = 0) - (g(-1)/\alpha) = 2 - (g(1) + g(-1))/\alpha, \quad (31)$$

$$\Delta_2 = \tau_{op}(m_2 = 0) - (\alpha/g(1)) = 2 - (\alpha(g(1) + g(-1))/g(1)g(-1)). \quad (32)$$

Для случая линейной характеристики  $g(x)$  из (31), (32) находим, что

$$\Delta_1 = 2(1 - (1/\alpha)),$$

$$\Delta_2 = 2(1 - (\alpha/(1 - S^2))). \quad (33)$$

Из (33) следует, что  $\Delta_1 = 0$  при  $\alpha = 1$  и  $\Delta_2 = 0$  при  $\alpha = 1 - S^2$ .

На плоскости  $(\alpha, S)$  границы  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2 = 0$  не пересекаются, но имеют одну общую точку  $\alpha = 1, S = 0$ , лежащую на стыке границ области управляемости СЧ (рис. 4). За счет этого, как нетрудно удостовериться, случай  $\Delta_1, \Delta_2 > 0$  не реализуется. Но это, в свою очередь, означает, что пересечение графиков отображений  $T_+$  и  $T_-$  возможно только трех типов. В первом случае пересекаются графики только в базовых интервалах непрерывности, т.е. так, как это показано на рис. 5. Во втором случае при  $m_1 \geq 1$  базовый участок непрерывности отображения  $T_-$  пересекается с графиком отображения  $T_+$  в произвольном месте. И в третьем случае при  $m_2 \geq 1$  график в базовом участке непрерывности отображения  $T_+$  пересекается с графиком отображения  $T_-$  в произвольном месте. При всех трех указанных типах пересечения графиков возможно попадание графика базового участка непрерывности в разрыв графика сопредельного отображения, например так, как это показано на рис. 6, получающемся непрерывной трансформацией рис. 5. В этом случае простая неподвижная точка произведения отображений отсутствует, но существуют кратные циклы, переходящие на границах существования циклов всевозможной сложности в движения, устойчивые по Пуассону [6]. Для определения условий существования кратных циклов ото-

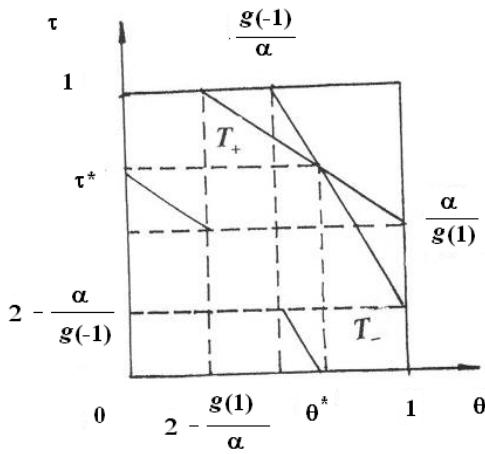


Рис. 5

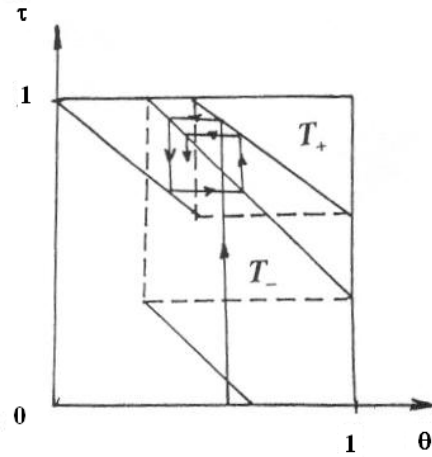


Рис. 6

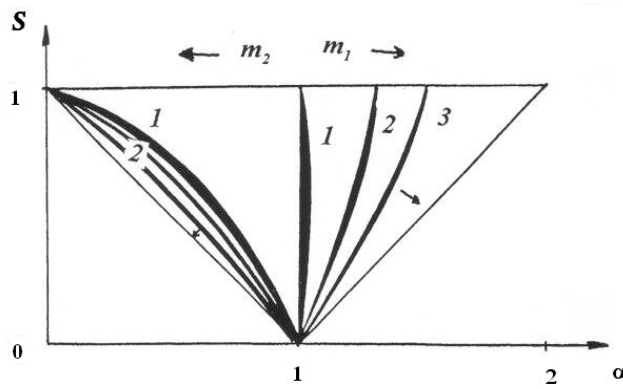


Рис. 7

бражения  $T$  отметим, что на плоскости параметров  $(\alpha, S)$  уравнения границ таких областей могут быть получены с помощью следующих простых рассуждений. Для отображения  $T_+$  участок разрывности, лежащий между участками непрерывности с номерами  $m_1$  и  $m_1 + 1$ , располагается на плоскости  $(\theta, \tau)$  между точками  $(\theta_{0p}(m_1), 1)$  и  $(\theta_{0p}(m_1), (\alpha/g(1)))$ , и поэтому границы существования кратных циклов соответствуют условию прохождения графика базового участка непрерывности отображения  $T_-$  через указанные точки. Отсюда находим, что кратные циклы отображения  $T = T_- T_+$ , соответствующие вышеуказанному типу пересечения графиков отображений  $T_+$  и  $T_-$ , существуют в интервале  $\underline{\alpha}_p(m_1) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_p(m_1)$ , где

$$\bar{\alpha}_p(m_1) = \frac{2g(-1) + (1+m_1)g(1)}{(2+m_1)g(1) + g(-1)} g(1), \quad (34)$$

$$\underline{\alpha}_p(m_1) = \frac{(1+m_1)g(1) + g(-1)}{2+m_1}. \quad (35)$$

Для отображения  $T_-$  участок разрывности, лежащий между участками непрерывности с

номерами  $m_2$  и  $m_2 + 1$ , располагается на плоскости  $(\theta, \tau)$  между точками  $((g(-1)/\alpha), \tau_{0p}(m_1))$  и  $(1, \tau_{0p}(m_1))$ . Подставляя координаты этих точек в уравнение (12) при  $m_1 = 0$ , т.е. в уравнение базового участка непрерывности, находим, что соответствующий этому случаю интервал существования кратных циклов задается неравенством  $\underline{\alpha}_p(m_2) \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_p(m_2)$ , где

$$\bar{\alpha}_p(m_2) = \frac{(2+m_2)g(-1)g(+1)}{g(-1)(1+m_2)g(+1)}, \quad (36)$$

$$\underline{\alpha}_p(m_2) = \frac{g(-1) + (2+m_1)g(+1)}{2g(-1) + (1+m_1)g(+1)} g(-1). \quad (37)$$

Отметим ряд общих свойств поведения границ (34)–(37) на плоскости  $(\alpha, S)$ . При  $S=0$   $\underline{\alpha}_p(m_1) = \bar{\alpha}_p(m_1) = \underline{\alpha}_p(m_2) = \bar{\alpha}_p(m_2) = 1$ , и, следовательно, на плоскости  $(\alpha, S)$  при  $S \rightarrow 0$  все интервалы существования кратных циклов сжимаются и сходятся в точку  $(0, 1)$ . При  $S=1$   $\underline{\alpha}_p(m_2) = \bar{\alpha}_p(m_2) = 0$ , а  $\underline{\alpha}_p(m_1) = \bar{\alpha}_p(m_1) = 2(1+m_1)/(2+m_1)$ , т.е. при  $m_1 = 0, 1, \dots$  образуют ряд  $1; 4/3; 1.5; \dots$ , сходящийся к значению

$\alpha = 2$ . Далее, поскольку  $\text{sign}(\underline{\alpha}_p(m_1) - 1) = \text{sign}(Sm_1)$ , а  $\text{sign}(1 - \bar{\alpha}_p(m_2)) = \text{sign}S$ , области существования кратных циклов с индексом  $m_1$  располагаются на плоскости  $(\alpha, S)$  при  $\alpha > 1$  (исключение составляет случай  $m_1 = 0$ , когда левая граница области с  $m_1 = 0$  совпадает с линией  $\alpha = 1, 0 \leq S \leq 1$ ), а области существования кратных циклов с индексом  $m_2$  располагаются при  $\alpha < 1$ . Более того, поскольку  $\partial \bar{\alpha}_p(m_1) / \partial m_1 > 0$ ,  $\partial \underline{\alpha}_p(m_1) / \partial m_1 > 0$ , а  $\partial \bar{\alpha}_p(m_2) / \partial m_2 > 0$ ,  $\partial \underline{\alpha}_p(m_2) / \partial m_2 < 0$ , то при любом  $S$  с увеличением  $m_1$  области существования циклов на плоскости  $(\alpha, S)$  смещаются вправо, а с увеличением  $m_2$  – влево, т.е. так, как это показано на рис. 7.

### Заключение

Наличие в динамике СЧ счетного множества поддиапазонов, в которых фаза появления

управляющих импульсов модулирована циклами низкочастотной повторяемости, означает, что принцип импульсного частотно-фазового детектирования, обеспечивая единственность и устойчивость предельной траектории в широком частотном диапазоне, в определенных поддиапазонах интервала управляемости предъявляет чрезвычайно жесткие условия к фильтрации низкочастотных составляющих спектра выходного сигнала УГ.

### Список литературы

1. Горюнов В.И. // Математическое моделирование и оптимальное управление. Вестник Нижегород. ун-та. 2003. Вып. 1(26). С. 207–215.
2. Левин В.А., Малиновский В.Н., Романов С.К. Синтезаторы частот с системой импульсно-фазовой автоподстройки. М.: Радио и связь, 1989. 232 с.
3. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник Нижегород. ун-та. 2008. № 6. С. 135–140.
4. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник Нижегород. ун-та. 2009. № 4. С. 141–145.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
6. Леонов Н.Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. № 6. Т. 2. С. 943–956.

## QUALITATIVE ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF A SYNCHRONIZATION SYSTEM WITH PULSE PHASE/FREQUENCY CONTROL

*O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov*

We show that mathematical simulation of frequency synthesizers by the point mapping method can be used to build and study quasi-static models for arbitrarily dimensional synthesizers.

*Keywords:* frequency synthesizer, mathematical model, system dynamics, point mapping, fixed point, stability, multiple cycle.