УДК 517.983.54

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ АНАЛОГЕ НЕПРЕРЫВНОГО МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОГО ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ

Е.В. Барабошкина, Р.А. Шафиев

Нижегородский государственный педагогический университет

elenavbaraboshkina@gmail.com

Поступила в редакцию 14.09.2012

Предложен итерационный метод регуляризации задачи связанного псевдообращения, который, как и порождающий его непрерывный метод, обладает свойством стабилизации последовательностей к нормальному решению начиная из любой точки гильбертова пространства. Найдены условия сходимости метода и его устойчивости к возмущениям в исходных данных задачи.

Ключевые слова: задача связанного псевдообращения, нормальное псевдорешение, двупараметрический метод регуляризации, итерационный метод регуляризации, сходимость итерационного метода, устойчивость итерационного метода.

Введение

Задача условной минимизации

$$\min\left\{\|Ax-y\|^2 : x\in \operatorname{Arg}\min_{x\in X}\|Bx-z\|^2\right\}, \quad (1)$$

где $A{:}X\to Y$, $B{:}X\to Z$ – заданные линейные ограниченные операторы, $y\in Y$, $z\in Z$ – заданные векторы, пространства X, Y, Z – гильбертовы, называется задачей связанного псевдообращения уравнения

$$Ax=y \quad (2)$$

при дополнительных линейных связях

$$Bx=z. \quad (3)$$

Решение задачи (1) минимальной нормы обозначается x^* и называется нормальным связанным псевдорешением уравнения (2) при дополнительных связях (3). Для краткости x^* будем называть нормальным решением задачи (1).

При отсутствии связей (при B=0) задача (1) – это традиционная задача псевдообращения уравнения (2). Если A^+ – псевдообратный оператор к оператору A, то нормальное псевдорешение уравнения (2) $x^*=A^+y$ может быть найдено методами регуляризации из книги [1].

Впервые задача (1) рассмотрена в работе [2] в качестве абстрактной модели одной задачи управления. В [2] авторы ввели понятие суженного псевдообратного оператора A_B^+ и с его помощью записали решение x^* задачи (1): $x^*=A_B^+\left(y-AB^+z\right)+B^+z$. Независимо задача (1) под названием задачи L-псевдообращения рассмотрена в работе [3] (см. [4]), в которой приведен первый регуляризирующий алгоритм её решения, применимый при очень жестком ограничении на операторы A и B.

В дальнейшем (см., например, [5, 6]) один из авторов данной статьи вывел для суженного псевдообратного оператора A_B^+ регуляризирующий алгоритм, посредством которого построил двупараметрический метод регуляризации задачи (1):

$$\left(\alpha I+\Gamma_r^*\Gamma_r\right)x=\Gamma_r^* g_r,\ \alpha, r>0, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_r=\begin{bmatrix}\sqrt{r}B\\ A\end{bmatrix}: X\to Z\times Y=G,\ g_r=\begin{bmatrix}\sqrt{r}z\\ y\end{bmatrix}\in G.$$

В работе [7] для решения уравнения (4) применяется известный непрерывный метод [8], который имеет вид задачи Коши:

$$\begin{cases}u'(t)+\alpha(t)u(t)+\Gamma_{r(t)}^*\left(\Gamma_{r(t)}u(t)-g_{r(t)}\right)=0,\\ u(t_0)=u_0,\ \ t\ge t_0\ge 0.\end{cases} \quad (5)$$

Смысл перехода от стационарного уравнения (4) к задаче Коши (5) заключается в том, что вопрос приближенного вычисления x^* сводится к нахождению решения задачи Коши для достаточно большого значения аргумента t. Ясно, что для этого можно воспользоваться хорошо разработанным аппаратом численного интегрирования дифференциальных уравнений.

В данной работе для приближенного интегрирования задачи (5) применяется метод разностной аппроксимации.

Для этого в промежутке $\left[t_0,+\infty\right)$ берется система точек $\{t_k\}$, и задача Коши (5) заменяется неявной разностной схемой:

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau_k} + \alpha_k u_k + \Gamma_{r_k}^*\left(\Gamma_{r_k} u_k - g_{r_k}\right) = 0\,,$$
$$k=1,2,3,\ldots,$$

где $u_k = u(t_k)$, $\alpha_k = \alpha(t_k)$, $r_k = r(t_k)$, $t_k - t_{k-1} = \tau_k$.

Способ построения последовательности $\{u_k\}$ по рекуррентной формуле

$$\left(1 + \tau_k \alpha_k\right) u_k + \tau_k \Gamma_{r_k}^* \Gamma_{r_k} u_k = u_{k-1} + \tau_k \Gamma_{r_k}^* g_{r_k}\,, \quad (6)$$
$$k=1,2,3,\ldots,$$

называется итерационным аналогом непрерывного метода регуляризации задачи связанного псевдообращения.

В работе найдены условия на параметрические последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{r_k\}$ регуляризации, которые обеспечивают сходимость метода (6) к нормальному решению задачи связанного псевдообращения исходя из любого начального приближения $u_0 \in X$, а также его устойчивость к ошибкам в исходных данных этой задачи.

1. Необходимые сведения

Обозначим через P и Q ортопроекторы соответственно на подпространства $N(B)$ и $N(B) \cap N(A)$, где $N(\cdot)$ – ядро соответствующего оператора. Введенный ранее оператор Γ_r при r=1 будем обозначать просто Г. Очевидно, $N(\Gamma) = N(B) \cap N(A)$, и поэтому Q – ортопроектор на $N(\Gamma)$.

В [6] (а также в [9]) установлено, что задача (1) разрешима тогда и только тогда, когда выполнимы условия:

$$z \in D\left(B^+\right) = R(B) \oplus N(B^*),$$
$$y - AB^+ z \in D\left((AP)^+\right) = R(AP) \oplus N(PA^*);$$

при выполнении этих условий в ортогональном дополнении $N(\Gamma)^\perp$ существует единственное нормальное решение x^* задачи (1), а любое её решение x_* имеет вид $x_* = x^* + Qx, x \in X$, и характеризуется равенствами

$$B^*\left(Bx_* - z\right) = 0, \quad PA^*\left(Ax_* - y\right) = 0.$$

В [7] решение операторного уравнения (5) обозначается $x_{r\alpha}$ $(\alpha > 0,\ r \ge 1)$ и используется для аппроксимации решения x^* задачи (1).

Теорема 1.1 [7]. Если задача (1) разрешима и выполнены условия

$$A^*\left(Ax^* - y\right) \in D\left(B^{*+}\right), \quad (1.1)$$

$$x^* = \Gamma^* g, \quad g = [v,u]^T \in G, \quad (1.2)$$

то

$$\left\|x^* - x_{r\alpha}\right\| \le \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\|v\| + \|u\|\right) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha r}}\left\|B^{*+} A^*\left(Ax^* - y\right)\right\|. \quad (1.3)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\left\|B^*\left(Bx_{r\alpha} - z\right)\right\| \le \sqrt{\frac{\alpha}{r}}\frac{\|z\|}{2} + \frac{1}{r}\left\|A^* y\right\| + \frac{1}{\sqrt{\alpha r}}\frac{\|A\|^2}{2}\left(\|z\| + \frac{1}{\sqrt{r}}\|y\|\right). \quad (1.4)$$

Отметим, что условие (1.1) выполняется, если оператор B – нормально разрешимый. Тогда B^* – также нормально разрешимый, и область определения $D\left(B^{*+}\right) = X$. Кроме того, $D\left(B^+\right) = Z$, и задача (1) разрешима при любом z.

В заключение приведем лемму 2.29 [10, с. 83].

Лемма [10]. Если неотрицательная числовая последовательность $\{\omega_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_k \le \left(1 - a_k\right)\omega_{k-1} + b_k\,, \quad 0 \le a_k \le 1\,,$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} a_i = \infty\,, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_k} = 0\,, \text{ то } \lim_{k\to\infty}\omega_k = 0\,.$$

2. О двупараметрическом методе регуляризации (4).

В уравнение (4) мысленно введем параметр $t \in [t_0, +\infty]$, считая $\alpha = \alpha(t)$, $r = r(t)$, и дискретизируем его в точках последовательности $\{t_k\}$. В результате получим последовательность операторных уравнений

$$\alpha_k x + \Gamma_{rk}^* \Gamma_{rk} x = \Gamma_{rk}^* g_{rk}\,, \quad k = 1,2,3,\ldots. \quad (2.1)$$

При $\alpha_k > 0$ уравнение (2.1) имеет единственное решение, которое обозначим $x_{r_k\alpha_k}$.

Предположим, что последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{r_k\}$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_k > 0, r_k \ge 1;$$
$$\{\alpha_k\} \text{ – убывает, } \{r_k\} \text{ – возрастает;}$$
$$\alpha_k \to 0\,,\ r_k \to \infty \text{ при } k \to \infty\,. \quad (2.2)$$

Тогда при всех k уравнение (2.1) имеет решение $x_{r_k\alpha_k}$, к каждому из которых можно применить теорему 1.1.

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Если последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{r_k\}$ удовлетворяют условиям (2.2) и

$$\left(\alpha_k r_k\right)^{-1} \to 0, \quad k \to \infty, \quad (2.3)$$

то $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|x^* - x_{r_k\alpha_k}\right\| = 0$ и

$$\left\|x_{r_k\alpha_k}\right\| \le c_1, \ \left\|B^*\left(Bx_{r_k\alpha_k} - z\right)\right\| \le \frac{c_2}{\sqrt{r_k\alpha_k}}, \qquad (2.4)$$

где c_i – константы, не зависящие от номера последовательности k.

Доказательство. Для каждого $x_{r_k\alpha_k}$ имеет место оценка (1.3), где $\alpha = \alpha_k$, $r = r_k$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ и учитывая (2.2), (2.3), получим $\left\|x^* - x_{r_k\alpha_k}\right\| \to 0$. Первая оценка в (2.4) – это следствие из предельного соотношения, а вторая вытекает из (1.4) и устанавливает порядок сходимости $\left\{\left\|B^*\left(Bx_{r_k\alpha_k} - z\right)\right\|\right\}$ при $k \to \infty$.

В дальнейшем нам понадобится оценка $\left\|x_{r_k\alpha_k} - x_{r_{k-1}\alpha_{k-1}}\right\|$. Проведем ее здесь, обозначив

$$\delta_k = x_{r_k\alpha_k} - x_{r_{k-1}\alpha_{k-1}}. \qquad (2.5)$$

Подставив решения $x_{r_k\alpha_k}$ и $x_{r_{k-1}\alpha_{k-1}}$ в соответсвующие уравнения (2.1) и вычтя одно из другого, для вектора δ_k получим равенство:

$$\alpha_k\delta_k + \Gamma_{r_k}^*\Gamma_{r_k}\delta_k = -\left(\alpha_k - \alpha_{k-1}\right)x_{r_{k-1}\alpha_{k-1}} - \\ -\left(r_k - r_{k-1}\right)B^*\left(Bx_{r_{k-1}\alpha_{k-1}} - z\right).$$

Умножим это равенство скалярно на вектор δ_k и к правой части применим неравенство Коши–Буняковского, в результате получим неравенство

$$\alpha_k\left(\delta_k,\delta_k\right) + \left(\Gamma_{r_k}^*\Gamma_{r_k}\delta_k,\delta_k\right) \le \left(\left|\alpha_k - \alpha_{k-1}\right|\left\|x_{r_{k-1}\alpha_{k-1}}\right\| + \right. \\ \left. + \left|r_k - r_{k-1}\right|\left\|B^*\left(Bx_{r_{k-1}\alpha_{k-1}} - z\right)\right\|\right)\left\|\delta_k\right\|. \qquad (2.6)$$

Слева отбросив неотрицательное второе слагаемое, а справа используя оценки (2.4), мы усилим неравенство, и, сократив его на $\|\delta_k\|$, получим нужную оценку:

$$\left\|\delta_k\right\| \le c_3\left(\frac{\left|\alpha_k - \alpha_{k-1}\right|}{\alpha_k} + \frac{\left|r_k - r_{k-1}\right|}{r_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{r_{k-1}\alpha_{k-1}}}\right). \qquad (2.7)$$

Сходимость итерационного метода

Введем обозначение

$$\varepsilon_k = x_{r\alpha} - u_k. \qquad (3.1)$$

Подставив $x_{r\alpha}$ в уравнение (2.1) и вычтя из этого равенства формулу (6), для вектора ε_k получим разностное уравнение

$$\left(1 + \tau_k\alpha_k\right)\varepsilon_k + \tau_k\Gamma_{r_k}^*\Gamma_{r_k}\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + \delta_k,$$

где вектор δ_k определен в (2.5). Это равенство умножим скалярно на ε_k и, отбросив в левой части слагаемое с положительным оператором $\Gamma_{r_k}^*\Gamma_{r_k}$, получим неравенство

$$\left(1 + \tau_k\alpha_k\right)\left(\varepsilon_k,\varepsilon_k\right) \le \left(\varepsilon_{k-1},\varepsilon_k\right) + \left(\delta_k,\varepsilon_k\right).$$

Отсюда, применяя к правой части неравенство Коши–Буняковского и деля на $\left\|\varepsilon_k\right\|$, находим

$$\left\|\varepsilon_k\right\| \le \left(1 - a_k\right)\left\|\varepsilon_{k-1}\right\| + b_k, \qquad (3.2)$$

где

$$a_k = \frac{\tau_k\alpha_k}{1 + \tau_k\alpha_k}, \ b_k = \frac{\left\|\delta_k\right\|}{1 + \tau_k\alpha_k}, \qquad (3.3)$$

а оценка $\left\|\delta_k\right\|$ найдена в (2.7).

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Если последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{r_k\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{\tau_i\alpha_i}{1 + \tau_i\alpha_i} = \infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left|\alpha_k - \alpha_{k-1}\right|}{\tau_k\alpha_k^2} + \frac{\left|r_k - r_{k-1}\right|}{\tau_k\alpha_k^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r_{k-1}\alpha_{k-1}}}\right) = 0, \qquad (3.4)$$

то итерационный метод (6) начиная из любого $u_0 \in X$ сходится к x^*.

Доказательство. Из очевидного неравенства

$$\left\|u_k - x^*\right\| \le \left\|u_k - x_{r_k\alpha_k}\right\| + \left\|x_{r_k\alpha_k} - x^*\right\| \qquad (3.5)$$

вытекает, что для доказательства теоремы достаточно установить, что $\left\|u_k - x_{r_k\alpha_k}\right\| = \left\|\varepsilon_k\right\| \to 0$ при $k \to \infty$, поскольку сходимость к нулю второго слагаемого в (3.5) доказана в лемме 2.1. Но мы установили, что последовательность $\left\{\left\|\varepsilon_k\right\|\right\}$ удовлетворяет неравенству (3.2), рассмотренному в приведенной нами лемме из [10]. Из этой леммы следует, что $\left\|\varepsilon_k\right\| \to 0$ при $k \to \infty$, если коэффициенты (3.3) удовлетворяют условиям $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \to \infty$, $\dfrac{b_k}{a_k} \to 0$, $k \to \infty$. Но эти условия, как легко видеть, – это предположения (3.4) теоремы, и теорема доказана.

3. Устойчивость итерационного метода

Предположим, что исходные данные задачи (1) заданы приближенно. При этом известны последовательности $\left\{A_k\right\}$ и $\left\{B_k\right\}$ ограниченных операторов, аппроксимирующих операторы A и B соответственно, последовательности $\left\{y_k\right\}$ и $\left\{z_k\right\}$ векторов, аппроксимирующих y и z, и известны уровни их ошибок:

$$\left\|A_k - A\right\| \le l_k, \ \left\|B_k - B\right\| \le h_k, \\ \left\|y_k - y\right\| \le s_k, \ \left\|z_k - z\right\| \le \delta_k, \qquad (4.1)$$

где $\left\{l_k\right\}, \left\{h_k\right\}, \left\{s_k\right\}, \left\{\delta_k\right\}$ – неотрицательные ограниченные последовательности.

Обозначим $\widetilde{\Gamma}_{r_k} = \begin{bmatrix} \sqrt{r_k} B_k \\ A_k \end{bmatrix}$, $\widetilde{g}_{r_k} = \begin{bmatrix} \sqrt{r_k} z_k \\ y_k \end{bmatrix}$ и выпишем возмущенный метод (6):

$$(1+\tau_k\alpha_k)v_k + \tau_k \widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\widetilde{\Gamma}_{r_k} v_k = v_{k-1} + \tau_k \widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\widetilde{g}_{r_k},$$

$$v_0 = u_0. \qquad (4.2)$$

Введем обозначение

$$\sigma_k = v_k - u_k \qquad (4.3)$$

и, вычтя (6) из (4.2), найдем уравнение для σ_k:

$$(1+\tau_k\alpha_k)\sigma_k + \tau_k \widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\widetilde{\Gamma}_{r_k}\sigma_k =$$
$$= \sigma_{k-1} - \tau_k\left(\widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\widetilde{\Gamma}_{r_k} - \Gamma^*_{r_k}\Gamma_{r_k}\right)u_k +$$
$$+ \tau_k \widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\left(\widetilde{g}_{r_k} - g_{r_k}\right) + \tau_k\left(\widetilde{\Gamma}^*_{r_k} - \Gamma^*_{r_k}\right)g_{r_k}.$$

Отсюда, как и прежде, для $\|\sigma_k\|$ получим неравенство:

$$\|\sigma_k\| \le (1-a_k)\|\sigma_{k-1}\| + b'_k,$$

где

$$a_k = \frac{\tau_k\alpha_k}{1+\tau_k\alpha_k}, \qquad (4.4)$$

$$b'_k = \frac{\tau_k}{1+\tau_k\alpha_k}\left(\left\|\widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\widetilde{\Gamma}_{r_k} - \Gamma^*_{r_k}\Gamma_{r_k}\right\|\|u_k\| + \right.$$
$$\left. + \left\|\widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\left(\widetilde{g}_{r_k} - g_{r_k}\right)\right\| + \left\|\left(\widetilde{\Gamma}^*_{r_k} - \Gamma^*_{r_k}\right)g_{r_k}\right\|\right).$$

Преобразуем выражения, стоящие в b'_k:

$$\widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\widetilde{\Gamma}_{r_k} - \Gamma^*_{r_k}\Gamma_{r_k} = r_k\left(B^*_k - B^*\right)B_k + r_k B^*\left(B_k - B\right) +$$
$$+ \left(A^*_k - A^*\right)A_k + A^*\left(A_k - A\right);$$
$$\widetilde{\Gamma}^*_{r_k}\left(\widetilde{g}_{r_k} - g_{r_k}\right) = r_k B^*_k\left(z_k - z\right) + A^*_k\left(y_k - y\right);$$
$$\left(\widetilde{\Gamma}^*_{r_k} - \Gamma^*_{r_k}\right)g_{r_k} = r_k\left(B^*_k - B^*\right)z + \left(A^*_k - A^*\right)y.$$

Оценим нормы выражений в b'_k с помощью условий аппроксимации (4.1):

$$b'_k \le \frac{a_k}{\alpha_k}\left[r_k h_k\left(\|B_k\| + \|B\|\right)\|u_k\| + l_k\left(\|A_k\| + \|A\|\right)\|u_k\| + \right.$$
$$\left. + r_k\delta_k\|B_k\| + s_k\|A_k\| + r_k h_k\|z\| + l_k\|y\|\right].$$

Так как $\|B_k\| \le \|B\| + \bar{h}$, $\|A_k\| \le \|A\| + \bar{l}$, где $\bar{h}$, $\bar{l}$ – границы последовательностей $\{h_k\}$ и $\{l_k\}$, а при выполнении условий сходимости $\|u_k\| \le c_4$, то

$$b'_k \le c_5 a_k\left(\frac{r_k}{\alpha_k}\left(h_k + \delta_k\right) + \frac{l_k + s_k}{\alpha_k}\right) = b_k. \qquad (4.5)$$

Таким образом, последовательность $\{\|\sigma_k\|\}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\sigma_k\| \le (1-a_k)\|\sigma_{k-1}\| + b_k, \qquad (4.6)$$

где коэффициент a_k определен в (4.4), а b_k – в (4.5).

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Если последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{r_k\}$ удовлетворяют дополнительно условиям согласования с уровнями возмущений (4.1):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{r_k}{\alpha_k}\left(h_k + \delta_k\right) = 0,\ \lim_{k\to\infty}\frac{l_k + s_k}{\alpha_k} = 0, \qquad (4.7)$$

то возмущенный метод (4.2) начиная из любого начального приближения u_0 сходится к нормальному решению x^* задачи (1).

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что $\|u_k - x^*\| \to 0$ при $k\to\infty$. Поэтому в силу неравенства $\|v_k - x^*\| \le \|v_k - u_k\| + \|u_k - x^*\|$ для доказательства теоремы достаточно установить $\|v_k - u_k\| = \|\sigma_k\| \to 0$ при $k\to\infty$.

Но последовательность $\{\|\sigma_k\|\}$ удовлетворяет неравенству (4.6), в котором из определения a_k (4.4) и первого условия из (3.4) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \infty$, а из определения b_k (4.5) и условия (4.7) вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_k} = 0$. Поэтому согласно лемме из [10] $\|\sigma_k\| \to 0$ при $k\to\infty$, и теорема доказана.

Приведем пример последовательностей $\{\alpha_k\}$, $\{r_k\}$, удовлетворяющих всем условиям (2.2), (2.3), (3.4) из теоремы 3.1 и условиям согласования (4.7) теоремы 4.1:

$$\tau_k \equiv 1,\ \alpha_k = k^{-\alpha},\ r_k = k^r,$$
$$h_k = \delta_k = k^{-h},\ l_k = s_k = k^{-l},$$

если $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, $\alpha < r < \min\{1, 2-5\alpha\}$, $h > r + \alpha$, $l > \alpha$.

Список литературы

1. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 181 с.

2. Minamide N., Nakamura K. A restricted pseudoinverse and its application to cotrained minima // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 19. P. 167–177.

3. Морозов В.А., Кирсанова Н.Н. Об одном обобщении метода регуляризации // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1970. Вып. 14. С. 40–45.

4. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 360 с.

5. Шафиев Р.А. К теории методов регуляризации Тихонова–Лаврентьева // ДАН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 804–808.

6. Шафиев Р.А. Псевдообращение операторов и некоторые приложения. Баку: Элм, 1989. 152 с.

7. Бондарь Е.А., Шафиев Р.А. Непрерывный метод решения задачи связанного псевдообращения // Вестник ННГУ. 2006. Вып. 1 (4). С. 4–13.

8. Альбер Я.И. Непрерывная регуляризация линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Математические заметки. 1968. Т. 4. № 5. С. 503–509.

9. Ястребова И.Ю. Нормальное *n*-связанное псевдорешение уравнения и регулярные методы его вычисления / Н.Новгород: Нижегородский гос. пед. ун-т, 1999. Деп. ВИНИТИ 17.11.99, № 3388-В99.

10. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. 261 с.

ON AN ITERATIVE ANALOGUE OF THE CONTINUOUS REGULARIZATION METHOD FOR A CONSTRAINED PSEUDOINVERSE PROBLEM

E.V. Baraboshkina, R.A. Shafiev

The article proposes an iterative method of constrained pseudoinverse problem regularization, which, like its originative continuous method, stabilizes sequences to the normal solution starting from any point of the Hilbert space. The conditions for the method convergence and stability to perturbations in the initial data of the problem are found.

Keywords: constrained pseudoinverse problem, normal pseudosolution, two-parameter regularization method, iterative regularization method, iterative method convergence, stability of the iterative method.