УДК 519.2

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК КВАНТИЛЕЙ

Т.С. Бородина, М.С. Тихов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

zhts.260980@mail.ru

Поступила в редакцию 18.09.2012

Рассмотрены непараметрические оценки квантилей. Показано, что эти оценки являются состоятельными и асимптотически нормальными. Указаны предельные дисперсии построенных оценок.

Ключевые слова: доза-эффект модель, непараметрические ядерные оценки, квантильный процесс.

1. Введение

Пусть $U_1,...,U_n$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения (ф.р.) $Q(x)$ и плотностью распределения $q(x)>0$. Будем считать, что $\mathbf{P}(0\le U_i\le 1)=1$. Пусть

$$x_\lambda = Q^{-1}(\lambda)=\inf\{x: Q(x)\ge\lambda\},$$
$$Q_n^{-1}(\lambda)=\inf\{x: Q_n(x)\ge\lambda\},$$

где $Q_n(x)=n^{-1}\sum_{i=1}^n I(U_i\le x)$ есть эмпирическая функция распределения.

Оценка для x_{λ_j} вида

$$\hat q_{jn}(Q_n)=h^{-1}\int_0^1 Q_n^{-1}(x)K((\lambda_j-x)h^{-1})\,dx=$$
$$=n^{-1}h^{-1}\sum_{i=1}^n u_n^{(i)}K((\lambda_j-i/n)h^{-1}),$$

где неслучайная последовательность $h=h(n)\to 0$ при $n\to\infty$, $K(x)$ есть ограниченная и непрерывная на $\mathbf{R}$ плотность распределения с носителем на $[-1,1]$, а $u_n^{(i)}$ есть *i*-я порядковая статистика, была предложена в работе [1]. При условиях гладкости на $Q(x)$ и отделимости плотности $q(x)$ от нуля в [1] была доказана асимптотическая нормальность $N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$ вектора $n^{1/2}(\hat q_{jn}(Q_n)-\hat q_{jn}(Q))_{j=1}^m$, где $\mathbf{\Sigma}=(\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij}=(Q^{-1})'(\lambda_i)(Q^{-1})'(\lambda_j)\lambda_i(1-\lambda_j)$, $1\le i\le j\le m$, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$. Доказательство основывалось на представлении Бахадура (см. [2–7]), которое позволяет вместо квантильного процесса $\delta_n(\lambda)=n^{1/2}q(Q^{-1}(\lambda))(Q^{-1}(\lambda)-Q_n^{-1}(\lambda)),\ 0<\lambda<1$, рассматривать эмпирический процесс $\beta_n(x)=n^{1/2}(Q_n(x)-Q(x))$, $-\infty<x<\infty$.

Пусть $H(x)=\int_{-\infty}^x K(u)du$. В данной работе в качестве оценки ф.р. $Q(x)$ мы будем использовать оценку $\hat Q_n(x)$ ядерного типа, именно,

$$\hat Q_n(x)=n^{-1}\sum_{i=1}^n H((x-U_i)h^{-1}).$$

В [8] для оценок ядерного типа установлено, что $n^{1/4}\,|\hat\beta_n(Q^{-1}(\lambda))-\hat\delta_n(\lambda)|\xrightarrow[n\to\infty]{d}Y$, где

$$\hat\beta_n(x)=n^{1/2}(\hat Q_n(x)-Q(x)),$$
$$\hat\delta_n(\lambda)=n^{1/2}q(Q^{-1}(\lambda))(Q^{-1}(\lambda)-\hat Q_n^{-1}(\lambda)).$$

В [8] показано, что

$$n^{1/4}(\ln n)^{-1/2}\sup_{a\le t\le b}|\hat\beta_n(Q^{-1}(t))-\hat\delta_n(t)|\xrightarrow[n\to\infty]{d}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{d}(\sup_{a\le t\le b}|B(t)|)^{1/2},$$

где $\{B(t),\,0\le t\le 1\}$ есть процесс броуновского движения, а $0\le a<b\le 1$. Из этого замечания следует, что статистику

$$\hat q_{jn}(\hat Q_n)=h^{-1}\int_0^1\hat Q_n^{-1}(x)K((\lambda_j-x)h^{-1})\,dx$$

можно использовать в качестве оценки для квантиля x_{λ_j}, и нетрудно показать, что предельным распределением вектора $n^{1/2}(\hat q_{jn}(\hat Q_n)-\hat q_{jn}(Q))_{j=1}^m$ будет нормальное распределение $N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$. В данном сообщении мы рассматриваем оценки вида

$$\hat x_{1,n}(\lambda_j)=n^{-1}\sum_{i=1}^n H((\lambda_j-\hat Q_n(i/n))h^{-1})$$

и доказываем, что распределения вектора $n^{1/2}(\hat x_{1,n}(\lambda_j)-x_{\lambda_j})_{j=1}^m$ при некоторых условиях регулярности сходятся к нормальному распределению $N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}_1)$.

Мы рассматриваем также статистики

$$\hat x_{2,n}(\lambda)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\frac{i}{n}H\left(\frac{\lambda-\hat Q_n(i/n)}{h}\right),$$

которые служат основой предложенной ниже оценки $\hat{x}_{3,n}(\lambda_j)$.

Мы показываем, что

$$\hat{x}_{2,n}(\lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{p} x_\lambda^2 \text{ и}$$

$$n^{1/2}(\hat{x}_{2,n}(\lambda)-x_\lambda^2)\xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\sigma^2),$$

где $\sigma^2 = 4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2 / q^2(x_\lambda)$, поэтому в качестве оценки x_λ рассматривается следующая статистика: $\hat{x}_{3,n}(\lambda)=(\hat{x}_{2,n}(\lambda))^{1/2}$. Использование теоремы 3.2 позволяет доказать, что если $0<\lambda_1< <\lambda_2<\ldots<\lambda_m<1$ то

$$n^{1/2}(\hat{x}_{3,n}(\lambda_j)-x_{\lambda_j})_{j=1}^m \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}_3),$$

где $\mathbf{\Sigma}_3=(\tau_{ij})$, $\tau_{ij}=\tau_{ji}$, $\tau_{ij}=\lambda_i(1-\lambda_j)(x_{\lambda_i},x_{\lambda_j})^{1/2} / /(q(x_{\lambda_i})q(x_{\lambda_j}))$.

Поскольку $0<x_\lambda<1$, то предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{3,n}(\lambda)$ будет меньше, чем предельные дисперсии оценки $\hat{x}_{1,n}(\lambda)$ и оценки $\hat{q}_{jn}(\hat{Q}_n)$.

Исследованы также оценки вида

$$\hat{x}_{5,n}(\lambda)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i H\left(\frac{\lambda-\hat{Q}_n(\xi_i)}{h}\right)$$

и

$$\hat{x}_{6,n}(\lambda)=\sqrt{\hat{x}_{5,n}(\lambda)},$$

где $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ независимы, имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а их предельное распределение такое же, как и у оценок $\hat{x}_{2,n}(\lambda)$ и $\hat{x}_{3,n}(\lambda)$.

2. Условия

Пусть $\{U_i, i=1,\ldots,n\}$ и U – независимые одинаково распределенные на отрезке $[0,1]$ случайные величины с функцией распределения $Q(u)$, $P=\{u_0,u_1,\ldots,u_n,u_{n+1}\}$ – упорядоченное разбиение отрезка $[0,1]$, где $u_0=0<u_1< <\ldots<u_n<1=u_{n+1}$.

Сформулируем условия на параметры h_r и h_d.

Условия (H)

(**H₁**) $h_r=h_r(n)$, $h_d=h_d(n)$, причем $h_r \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $h_d \underset{n\to\infty}{\to} 0$, но $nh_r \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, $nh_d \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

(**H₂**) $h_d / h_r \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

(**H₃**) $nh_r^5 = O(1)$ при $n\to\infty$.

В качестве примера таких последовательностей рассмотрим $h_r=n^{-1/5}$, $h_d=n^{-1/3}$ [9]. Очевидно, что для них условия **(H)** будут выполнены.

Положим $\|K\|^2=\int_{-1}^{1}K^2(x)\,dx$.

Сформулируем условия на ядерные функции $K_r(x)$ и $K_d(x)$.

Условия (K)

(**K₁**) $K_{r(d)}(x)\ge 0$, причем $K_{r(d)}(x)=0$, $x\notin[-1,1]$.

(**K₂**) $\int_{-1}^{1}K_r(x)\,dx=1$, $\int_{-1}^{1}K_d(x)\,dx=1$.

(**K₃**) $K_{r(d)}(x)=K_{r(d)}(-x)$, $x\in \mathrm{R}$.

(**K₄**) $\|K_j\|_\infty=\sup_{x\in \mathrm{R}}|K_j|=\kappa_j<\infty$ для $j=r,d$.

(**K₅**) Существуют непрерывные ограниченные производные функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ до третьего порядка включительно на отрезке $[-1,1]$.

Замечание 2.1. При условиях **(K)** $\|K\|^2<\infty$ и существуют четвертые моменты для распределений с плотностями $K_r(x)$, $K_d(x)$:

$$\nu_j^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2K_j(x)dx,\quad \mu_j^4=\int_{-\infty}^{\infty}x^4K_j(x)dx,$$
$$j=r,d.$$

Определим вариацию функции K [10, с. 234].

Пусть $K:[a,b]\to\mathbf{R}$. *Вариацией* функции $K=K(u)$ на отрезке $[a,b]$ называется величина $\mathbf{V}(K)=\mathbf{V}_a^b(K)=\sup_P\sum_{k=0}^n|K(u_{k+1})-K(u_k)|$, т.е. точная верхняя грань по всем упорядоченным разбиениям P отрезка $[a,b]$.

Замечание 2.2. Из условия ограниченности производных функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ на отрезке $[-1,1]$ (условие (**K₅**)) следует, что их вариации ограничены (см. [10, с. 235]), т.е. $\mathbf{V}_{-1}^1(K_{r(d)})<\infty$.

Условие (F)

(**F₁**) Существует третья непрерывная ограниченная производная плотности распределения $q(x)=Q'(x)$, причем $q(x)\ge c_0>0$ для $0\le x\le 1$, т.е. плотность $q(x)$ на отрезке $[0,1]$ отделима от нуля.

Условие (P)

(**P₁**) При $n\to\infty$

$$\max_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}\max\{|u_k-k/n|,|u_{k+1}-k/n|\}=O(n^{-1}).$$

Из условия (**P**) следует, что $u_k=\frac{k}{n}+O(n^{-1})$, причем последовательность $n\left(u_k-\frac{k}{n}\right)$ равномерно по $0\le k\le n$ ограничена константой C.

Всюду в работе будем предполагать, что выполнены условия (**H**), (**K**), (**F**), (**P**), которые будем называть *основными условиями*.

3. Вспомогательные результаты

Пусть $\Re$ – лебегова σ-алгебра на [0,1] и μ – лебегова мера на $\Re$. Определим

$$A(B,P)=\sum_{i=1}^{n}\chi_B(u_i),$$

$$D_n(B,P)=\left|\frac{A(B,P)}{n}-\mu(B)\right|,$$

где $\chi_B(x)$ – индикатор множества B.

Положим $D_n^*(P)=D_n(J_c^*,P)$, где J_c^* есть семейство подынтервалов $[0,u_i]$ на $[0,1]$.

Для любой ограниченной функции $\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ положим $\|\psi\|_I=\sup_{x\in I}|\psi|$.

Теорема 3.1 [11] (KH-неравенство). *Если функция $f(u)$ $(0\le u\le 1)$ имеет ограниченную вариацию $\mathbf{V}_0^1(f)$, то для любых $0<u_1<$ $<u_2<\ldots<u_n<1$ имеем*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(u_i)-\int_0^1 f(u)du\right|\le \mathrm{V}_0^1(f)D_n^*(u_1,\ldots,u_n).$$

Приведем также еще две леммы из [11], которые проясняют суть этого неравенства.

Лемма 3.1. *Если* $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$, $x_i,y_i\in[0,1]$, *удовлетворяют неравенствам* $|x_i-y_i|\le\varepsilon$ *для* $1\le i\le n$, *то*

$$|D_n^*(x_1,\ldots,x_n)-D_n^*(y_1,\ldots,y_n)|\le\varepsilon.$$

Замечание 3.1. Из леммы 3.1 следует, что $D_n^*(x_1,\ldots,x_n)$ есть непрерывная функция переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Лемма 3.2. *Если* $0<u_1<\ldots<u_n<1$, *то*

$$D_n^*(u_1,\ldots,u_n)=\frac{1}{2n}+\max_{1\le i\le n}\left|u_i-\frac{2i-1}{2n}\right|.$$

Замечание 3.2. Если $u_i=\frac{i}{n}$, то $\frac{i}{n}-\frac{2i-1}{2n}=$ $=\frac{1}{2n}$ и $D_n^*(u_1,\ldots,u_n)=\frac{1}{n}$.

Теорема 3.2 ([12, с. 299]). *Если* $\varphi(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$ *и последовательность оценок* T_n *такова, что*

$$\varphi(n)(T_n-\theta)\xrightarrow[n\to\infty]{d}N(0,\tau^2(\theta)),$$

то

$$\varphi(n)(g(T_n)-g(\theta))\xrightarrow[n\to\infty]{d}N(0,\tau^2(\theta)(g'(\theta))^2)$$

при условии, что существует непрерывная не равная нулю производная $g'(\theta)$ *функции* $g(\theta)$.

Для дальнейшего нам понадобится также следующий вспомогательный результат.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{q}=\widetilde{q}(u)=\frac{1}{h_d}K_d\left(\frac{Q(u)-\lambda}{h_d}\right)$$

и оценим ее вариацию на отрезке $[0,1]$.

Лемма 3.3. *Если выполнены основные условия, то*

$$\mathrm{V}(\widetilde{q})=\sup_P\sum_{j=1}^{l}|\widetilde{q}(u_j)-\widetilde{q}(u_{j-1})|=O(h_d^{-1}),$$

где супремум берется по всем возможным упорядоченным разбиениям $P=\{u_1,\ldots,u_l\}$, $0<$ $<u_1<\ldots<u_l<1$, *отрезка* $[0,1]$.

Доказательство. Пусть $0<u_1<\ldots<u_l<1$ есть произвольное упорядоченное разбиение отрезка $[0,1]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{l}|\widetilde{q}(u_j)-\widetilde{q}(u_{j-1})|=$$

$$=\frac{1}{h_d}\sum_{j=1}^{l}\left|K_d\left(\frac{Q(u_j)-\lambda}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{Q(u_{j-1})-\lambda}{h_d}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{h_d}\left(\sum_{j=1}^{l_1}+\sum_{j=l_1+2}^{l_2}+\sum_{j=l_2+2}^{l}\right)\left|K_d\left(\frac{Q(u_j)-\lambda}{h_d}\right)-\right.$$

$$\left.-K_d\left(\frac{Q(u_{j-1})-\lambda}{h_d}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{h_d}\left|K_d\left(\frac{Q(u_{l_1+1})-\lambda}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{Q(u_{l_1})-\lambda}{h_d}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{h_d}\left|K_d\left(\frac{Q(u_{l_2+1})-\lambda}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{Q(u_{l_2})-\lambda}{h_d}\right)\right|,$$

где l_1 и l_2 таковы, что

$Q(u_{l_1})\le\lambda-h_d$, $Q(u_{l_1+1})>\lambda-h_d$,

$Q(u_{l_2})<\lambda+h_d$, $Q(u_{l_2+1})\ge\lambda+h_d$.

Поскольку $K_d(x)=0$ для $|x|\ge 1$, то сумма $\sum_{j=1}^{l_1}+\sum_{j=l_2+2}^{l}$ будет равна нулю, а

$$K_d\left(\frac{Q(u_{l_1+1})-\lambda}{h_d}\right)=K_d(-1)+$$

$$+K_d'(\xi)\left(\frac{Q(u_{l_1+1})-\lambda}{h_d}+1\right)\underset{n\to\infty}{\to}0\ ,$$

где $-1\le\xi\le\dfrac{Q(u_{l_1+1})-\lambda}{h_d}$.

Аналогично, $K_d\left(\dfrac{Q(u_{l_2})-\lambda}{h_d}\right)\underset{n\to\infty}{\to}0$.

В оставшейся сумме все точки принадлежат отрезку $[-1,1]$, и поэтому

$$\frac{1}{h_d}\sum_{j=l_1+2}^{l_2}\left|K_d\left(\frac{Q(u_j)-\lambda}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{Q(u_{j-1})-\lambda}{h_d}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{h_d}\sum_{j=l_1+2}^{l_2}\left|K_d'(\xi_j)\left(\frac{Q(u_j)-Q(u_{j-1})}{h_d}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{M}{h_d^2}(Q(u_{l_2})-Q(u_{l_1+2}))\le\frac{2Mh_d}{h_d^2}=\frac{2M}{h_d}\ ,$$

где $\xi_j\in[-1,1]$, $|K_d'(\xi_j)|\le M$, M не зависит от n. Отсюда следует результат леммы.

4. Основные результаты

4.1. Асимптотика оценки $\hat{x}_{1,n}(\lambda)$

Рассмотрим оценку $\hat{x}_{1,n}(\lambda)$ и представим её в следующем виде:

$$\hat{x}_{1,n}(\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H_d\left(\frac{\lambda-\hat{Q}_n(i/n)}{h_d}\right)=x_{1,n}(\lambda)+\Delta(\lambda)\ ,$$

где

$$\hat{Q}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}H_r\left(\frac{x-U_j}{h_r}\right),$$

$$x_{1,n}(\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H_d\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)=$$

$$=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{Q(i/n)-u}{h_d}\right)du\ ,$$

$$\Delta(\lambda)=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{K_d\left(\frac{\hat{Q}_n(i/n)-u}{h_d}\right)-\right.$$

$$\left.-K_d\left(\frac{Q(i/n)-u}{h_d}\right)\right\}du=$$

$$=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\left(H_d\left(\frac{\lambda-\hat{Q}_n(i/n)}{h_d}\right)-H_d\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\right).$$

Асимптотическое поведение $x_{1,n}(\lambda)$ представлено в следующей лемме.

Лемма 4.1. *При* $n\to\infty$

$$x_{1,n}(\lambda)=x_\lambda+a_{2,d}h_d^2+o(h_d^2)\ ,$$

где $x_\lambda=Q^{-1}(\lambda)$, $a_{2,d}=\dfrac{1}{2}(Q^{-1})''(\lambda)\nu_d^2=-\dfrac{\nu_d^2q'(x_\lambda)}{2(q(x_\lambda))^3}$.

Доказательство. Используя КН-неравенство, лемму 3.3 и замечание 3.2, получаем:

$$x_{1,n}(\lambda)=\frac{1}{h_d}\int_0^1\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{Q(x)-u}{h_d}\right)dudx+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=\int_0^1 dx\int_{\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}}^{1}K_d(z)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Поскольку неравенства $\dfrac{Q(x)-\lambda}{h_d}\le-1$ и $x\le Q^{-1}(\lambda-h_d)\le1$ равносильны, то

$$x_{1,n}(\lambda)=\int_0^{Q^{-1}(\lambda-h_d)}dx\int_{-1}^{1}K_d(z)\,dz+$$

$$+\int_{Q^{-1}(\lambda-h_d)}^{1}dx\int_{\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}}^{1}K_d(z)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл равен $Q^{-1}(\lambda-h_d)$, а во втором сделаем замену $y=\dfrac{Q(x)-\lambda}{h_d}$ и, замечая, что $\lambda<Q(1)=1$, функция $Q(x)$ трижды непрерывно дифференцируема (а следовательно, дифференцируема и обратная функция $Q^{-1}(y)$) и $Q'(x)\ge c_0>0$, получим

$$x_{1,n}(\lambda)=Q^{-1}(\lambda-h_d)+$$

$$+h_d\int_{-1}^{\frac{Q(1)-\lambda}{h_d}}dy\int_y^1K_d(z)(Q^{-1})'(\lambda+h_dy)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Так как

$$\int_{-1}^{1}dy\int_y^1K_d(z)\,dz=1,\ \int_{-1}^{1}y\,dy\int_y^1K_d(z)\,dz=\frac{\nu_d^2}{2}-\frac{1}{2}\ ,$$

$$\sup_{t,x\in[0,1]}|(Q^{-1})'(t)-(Q^{-1})'(x)-(t-x)(Q^{-1})''(x)|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sup_{t,x\in[0,1]}|(Q^{-1})'''(x)|,$$

$$(Q^{-1})'''(x)=\frac{3(Q''(Q^{-1}(x)))^2}{(Q'(Q^{-1}(x)))^5}-\frac{Q'''(Q^{-1}(x))}{(Q'(Q^{-1}(x)))^4}\ ,$$

то в силу отделимости плотности от нуля и ограниченности производных плотности получаем, что

$$\sup_{t,x\in[0,1]}|(Q^{-1})'(t)-(Q^{-1})'(x)-(t-x)(Q^{-1})''(x)|\le C\ .$$

Таким образом,

$$x_{1,n}(\lambda)=Q^{-1}(\lambda-h_d)+h_d((Q^{-1})'(\lambda)+$$

$$+(Q^{-1})''(\lambda)h_d\int_{-1}^{1}y\,dy\int_{y}^{1}K_d(z)\,dz+O(h_d^2))+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=Q^{-1}(\lambda)+\frac{1}{2}h_d^2(Q^{-1})''(\lambda)\nu_d^2+O\left(h_d^3+\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=x_\lambda-\frac{h_d^2\nu_d^2}{2}\cdot\frac{q'(x_\lambda)}{q^3(x_\lambda)}+o(h_d^2),$$

что завершает доказательство леммы 4.1.

Рассмотрим теперь величину $\Delta(\lambda)$ и представим её в следующем виде:

$$\Delta=\Delta(\lambda)=\Delta_1+\frac{1}{2}\Delta_2+\frac{1}{6}\Delta_3+\frac{1}{24}\Delta_4 .$$

Здесь

$$\Delta_1=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right),$$

$$\Delta_2=\frac{1}{nh_d^2}\sum_{i=1}^{n}K_d'\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^2,$$

$$\Delta_3=-\frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n}K_d''\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^3,$$

$$\Delta_4=\frac{1}{nh_d^4}\sum_{i=1}^{n}K_d'''\left(\frac{\lambda-\xi_i}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^4,$$

где $|\xi_i-Q(i/n)|\le|\hat{Q}_n(i/n)-Q(i/n)|$.

Лемма 4.2. *Если* $h_d=n^{-1/3}$, *то при* $n\to\infty$

$$\sqrt{n}(\Delta_1-a_{2,r}h_r^2)\xrightarrow{d}N(0,\sigma_1^2),$$

где

$$a_{2,r}=-\frac{\nu_r^2}{2}Q''(Q^{-1}(\lambda))(Q^{-1})'(\lambda)=-\frac{\nu_r^2Q''(x_\lambda)}{2Q'(x_\lambda)},$$

$$\sigma_1^2=\lambda(1-\lambda)[(Q^{-1})'(\lambda)]^2=\frac{\lambda(1-\lambda)}{q^2(x_\lambda)}.$$

Доказательство. Определим величины

$$\Delta_{1,1}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\times$$

$$\times(\hat{Q}_n(i/n)-\mathbf{E}(\hat{Q}_n(i/n))),$$

$$\Delta_{1,2}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\times$$

$$\times(\mathbf{E}(\hat{Q}_n(i/n))-Q(i/n)).$$

Тогда $\Delta_1=\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}$.

Из [13] получаем

$$\mathbf{E}(\hat{Q}_n(x)-Q(x))=\frac{1}{2}\nu_r^2h_r^2Q''(x)+o(h_r^2),$$

а из ограниченности второй производной $Q''(x)$ следует, что

$$\sup_x|\mathbf{E}(\hat{Q}_n(x)-Q(x))|\le O(h_r^2).$$

Используя это замечание, получаем

$$\mathbf{E}(\Delta_1)=\mathbf{E}(\Delta_{1,2})=$$

$$=-\frac{\nu_r^2h_r^2}{2nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)Q''(i/n)(1+o(1))=$$

$$=-\frac{\nu_r^2h_r^2}{2h_d}\int_0^1K_d\left(\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}\right)Q''(x)\,dx+O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right)=$$

$$=-\frac{\nu_r^2h_r^2}{2}\int_{-1}^{1}K_d(z)(Q^{-1})'(\lambda+zh_d)\times$$

$$\times Q''(Q^{-1}(\lambda+zh_d))\,dz+O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right)=$$

$$=-\frac{\nu_r^2}{2}h_r^2(Q^{-1})'(\lambda)Q''(Q^{-1}(\lambda))+o(h_r^2).$$

Далее, подсчитаем дисперсию величины Δ_1. Имеем:

$$\mathbf{D}(\Delta_1)=\mathbf{D}(\Delta_{1,1})=$$

$$=\mathbf{D}\left(\frac{1}{n^2h_d}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_j}{h_r}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n^4h_d^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_j}{h_r}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n^3h_d^2}\mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_1}{h_r}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_d}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_1}{h_r}\right)\right)^2-\right.$$

$$\left.-\mathbf{E}^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_d}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_1}{h_r}\right)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}(I_{2n}-I_{1n}^2).$$

Теперь вычислим:

1)

$$I_{1n}=\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_d}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_1}{h_r}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_d}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\int_0^1H_r\left(\frac{i/n-u}{h_r}\right)dQ(u)=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{1}{h_d}K_d\left(\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{x-u}{h_r}\right)dx\right)dQ(u)=$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_{-\frac{\lambda}{h_d}}^{\frac{1-\lambda}{h_d}} K_d(z)(Q^{-1})'(\lambda + h_d z) \times$$

$$\times H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda + h_d z) - u}{h_r}\right) dz \Big) dQ(u) .$$

Заметим, что для фиксированного λ

$$-\frac{\lambda}{h_d} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty , \; \frac{1-\lambda}{h_d} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty .$$

Так как плотность $q(x)$ отделима от нуля, то

$$\sup_z |Q^{-1}(\lambda + h_d z) - Q^{-1}(\lambda)| \le C h_d \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

и

$$H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda + h_d z) - y}{h_r}\right) - H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - y}{h_r}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_r} K_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - y}{h_r}\right) \cdot ((Q^{-1})'(\lambda) h_d z +$$

$$+ \frac{1}{2}(Q^{-1})''(\lambda) h_d^2 z^2 + o(h_d^2)) = O\left(\frac{h_d^2}{h_r}\right),$$

где мы использовали, что

$$\int_{-1}^{1} K_d(z)dz = 1 , \; \int_{-1}^{1} z K_d(z) dz = 0 ,$$

функции K_r, $(Q^{-1})'$, $(Q^{-1})''$, $(Q^{-1})'''$ ограничены.

Поэтому

$$I_{1n} \sim (Q^{-1})'(\lambda) \int_0^1 H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) dQ(u) .$$

Если сделаем в последнем интеграле замену $t = \dfrac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}$, то при $n \to \infty$

$$I_{1n} \sim (Q^{-1})'(\lambda) \int_0^1 \frac{1}{h_r} K_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) Q(u) du \sim$$

$$\sim (Q^{-1})'(\lambda) \int_{\frac{Q^{-1}(\lambda)-1}{h_r}}^{\frac{Q^{-1}(\lambda)}{h_r}} K_r(t) Q(Q^{-1}(\lambda) - h_r t) dt \sim$$

$$\sim (Q^{-1})'(\lambda) \int_{-1}^{1} K_r(t) Q(Q^{-1}(\lambda)) dt .$$

Таким образом,

$$I_{1n} \sim \frac{\lambda}{q(x_\lambda)} .$$

2)

$$I_{2n} = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right)^2 \sim$$

$$\sim \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(x) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{x - u}{h_r}\right) dx \right)^2 dQ(u) \sim$$

$$\sim \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} (Q^{-1})'(\lambda) K_d(t) H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) dt \right)^2 dQ(u) \sim$$

$$\sim \frac{2}{q^2(x_\lambda)} \int_{-1}^{1} Q(Q^{-1}(\lambda) - h_r z) K_r(z) H_r(z) dz \sim$$

$$\sim \frac{2\lambda}{q^2(x_\lambda)} \int_{-1}^{1} K_r(z) H_r(z) dz \sim \frac{\lambda}{q^2(x_\lambda)} ,$$

так как $\int_{-1}^{1} K_r(z) H_r(z)\, dz = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\mathbf{D}(\Delta_1) \sim \frac{\lambda(1-\lambda)}{n q^2(x_\lambda)} .$$

Заметим, что $\sqrt{n} h_d^2 = n^{-1/6} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому при таком выборе h_r, h_d имеем:

$$\sqrt{n}\Delta_1 \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} N(0, \sigma_1^2) .$$

Теперь асимптотическая нормальность $\Delta_{1,1}$ доказывается применением центральной предельной теоремы Ляпунова аналогично [13].

Замечание. Если мы рассмотрим оценки

$$\hat{x}_{1,n}(\lambda_l) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_d\left(\frac{\lambda_l - \hat{Q}_n(i/n)}{h_d}\right), \; l = 1,2 ,$$

квантилей порядков λ_1 и λ_2, где будем считать, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, то для доказательства асимптотической нормальности вектора $(\hat{x}_{1,n}(\lambda_1), \hat{x}_{1,n}(\lambda_2))^{\mathrm{T}}$ достаточно теперь рассмотреть асимптотическое поведение ковариаций $\sigma_{12n} = \mathbf{cov}(\hat{x}_{1,n}(\lambda_1), \hat{x}_{1,n}(\lambda_2)) = \mathbf{E}(\hat{x}_{1,n}(\lambda_1) \cdot \hat{x}_{1,n}(\lambda_2)) - \mathbf{E}(\hat{x}_{1,n}(\lambda_1)) \cdot \mathbf{E}(\hat{x}_{1,n}(\lambda_2))$ оценок $\hat{x}_{1,n}(\lambda_1)$, $\hat{x}_{1,n}(\lambda_2)$. Имеем:

$$n\sigma_{12n} = \mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right) \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(j/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{j/n - U_1}{h_r}\right)\right)\right) -$$

$$- \frac{\lambda_1 \lambda_2}{q(x_{\lambda_1}) q(x_{\lambda_2})} \sim$$

$$\sim \int_0^1 dQ(u) \left(\int_0^1 \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(x) - \lambda_1}{h_d}\right) H_r\left(\frac{x - u}{h_r}\right) dx \right) \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(y) - \lambda_2}{h_d}\right) H_r\left(\frac{y - u}{h_r}\right) dy \right) -$$

$$- \frac{\lambda_1 \lambda_2}{q(x_{\lambda_1}) q(x_{\lambda_2})} \sim (Q^{-1})'(\lambda_1)(Q^{-1})'(\lambda_2) \times$$

$$\times\int_0^1 H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda_1)-u}{h_r}\right)H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda_2)-u}{h_r}\right)dQ(u)-$$
$$-\frac{\lambda_1\lambda_2}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})}.$$

Замечая, что $\lambda_1<\lambda_2 \Leftrightarrow Q^{-1}(\lambda_1)<Q^{-1}(\lambda_2)$ и делая замену переменной $t=\dfrac{Q^{-1}(\lambda_1)-u}{h_r}$ под знаком интеграла, получаем, что

$$\frac{Q^{-1}(\lambda_2)-u}{h_r}=t+\frac{Q^{-1}(\lambda_2)-Q^{-1}(\lambda_1)}{h_r}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Поэтому

$$n\sigma_{12n}\sim\frac{1}{q(Q^{-1}(\lambda_1))q(Q^{-1}(\lambda_2))}\times$$
$$\times\int_0^1 H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda_1)-u}{h_r}\right)dQ(u)-\frac{\lambda_1\lambda_2}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})}.$$

Таким образом,

$$\sigma_{12n}\sim\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{nq(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})}.$$

Лемма 4.3. *Если* $h_d=n^{-1/3}$, *то при* $n\to\infty$

$$\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4=O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала величину Δ_2. Из КН-неравенства получаем

$$|\Delta_2|\le\frac{1}{nh_d^2}\sum_{i=1}^n\left|K_d'\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\right|\times$$
$$\times\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^2=\frac{1}{h_d^2}\int_0^1\left|K_d'\left(\frac{\lambda-Q(x)}{h_d}\right)\right|\times$$
$$\times(\hat{Q}_n(x)-Q(x))^2\,dx\cdot(1+o(1)).$$

В работе [4] показано, что при условиях (**H**), (**K**), (**F**)

$$\sup_x|\hat{Q}_n(x)-Q(x)|\le Ln^{-1/2}(\ln n)^{1/2}\ \text{п.н.}\quad(1)$$

Используя этот результат, имеем следующие соотношения:

$$|\Delta_2|\le\frac{L^2\ln n}{nh_d^2}\int_0^1\left|K_d'\left(\frac{\lambda-Q(x)}{h_d}\right)\right|dx\cdot(1+o(1))\sim$$
$$\sim(Q^{-1})'(\lambda)\frac{L^2\ln n}{nh_d}\int_{-1}^1|K_d'(t)|\,dt\sim$$
$$\sim(Q^{-1})'(\lambda)\frac{L^2\ln n}{nh_d}\mathbf{V}(K_d).$$

Поскольку вариация $\mathbf{V}(K_d)$ функции K_d конечна, $h_d=n^{-1/3}$, то

$$n^{1/2}|\Delta_2|=O\left(\frac{1}{n^{1/2}h_d}\right)=O(n^{-1/6})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Аналогично предыдущему показывается, что

$$|\Delta_3|\le\frac{1+\varepsilon}{h_d^3}\int_0^1\left|K_d''\left(\frac{\lambda-Q(x)}{h_d}\right)\right||\hat{Q}_n(x)-Q(x)|^3\,dx\le$$
$$\le\frac{L^3(\ln n)^{3/2}}{n^{3/2}h_d^2}\int_{-1}^1|K_d''(t)|\,dt\cdot(1+o(1)).$$

Тогда для $h_d=n^{-1/3}$ имеем

$$n^{1/2}\Delta_3=O\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right),\ \text{т.е.}\ \Delta_3=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Используя ограниченность третьей производной $K_d'''(x)$ функции $K_d(x)$ и соотношение (1), получим

$$\sqrt{n}|\Delta_4|\le\frac{M_3n^{1/2}}{h_d^4}\int_0^1|\hat{Q}_n(x)-Q(x)|^4dx\le$$
$$\le\frac{M_3L^4(\ln n)^2}{n^{3/2}h_d^4}=O\left(\frac{1}{n^{1/6}}\right),$$

где $|K'''(x)|\le M_3$, т.е. $\sqrt{n}\Delta_4\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Таким образом, $\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4=O\left(\dfrac{1}{nh_d}\right)$, откуда следует $\sqrt{n}(\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Пусть $\hat{x}_{1,n}(\lambda)=(\hat{x}_{1,n}(\lambda_1),\dots,\hat{x}_{1,n}(\lambda_k))^{\mathrm{T}}$, $x_\lambda=(x_{\lambda_1},\dots,x_{\lambda_k})^{\mathrm{T}}$. Из лемм 4.1–4.3 выводим следующую теорему.

Теорема 4.1. *Если* $h_d=n^{-1/3}$, $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k<1$ *и выполнены основные условия, то при* $n\to\infty$

$$(n^{1/2}(\hat{x}_{1,n}(\lambda_i)-x_{\lambda_i})_{i=1}^k)\underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}}N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}_1),$$

где $N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}_1)$ *обозначает k-мерное нормальное распределение со средним* **0** *и симметричной матрицей ковариаций* $\mathbf{\Sigma}_1=(\sigma_{ij})_{i,j=1}^k$,

$$\sigma_{ij}=\frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{q(x_{\lambda_i})q(x_{\lambda_j})},\ \lambda_i\le\lambda_j\ \text{для}\ i\le j.$$

4.2. Асимптотика оценок $\hat{x}_{2,n}(\lambda)$ и $\hat{x}_{3,n}(\lambda)$

Рассмотрим теперь оценку $\hat{x}_{2,n}(\lambda)$ следующего вида:

$$\hat{x}_{2,n}(\lambda)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\frac{i}{n}H_d\left(\frac{\lambda-\hat{Q}_n(i/n)}{h_d}\right)=$$
$$=x_{2,n}(\lambda)+2\Lambda(\lambda),$$

где

$$x_{2,n}(\lambda)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\frac{i}{n}H_d\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)=$$

$$=\frac{2}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{Q(i/n)-u}{h_d}\right)du\,,$$

$$\Lambda(\lambda)=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{K_d\left(\frac{\hat{Q}_n(i/n)-u}{h_d}\right)-\right.$$

$$\left.-K_d\left(\frac{Q(i/n)-u}{h_d}\right)\right\}du\,.$$

Асимптотическое поведение $x_{2,n}(\lambda)$ представлено в следующей лемме.

Лемма 4.4. *При* $n\to\infty$

$$x_{2,n}(\lambda)=x_\lambda^2+b_{2,d}h_d^2+o(h_d^2)\,,$$

где $x_\lambda=Q^{-1}(\lambda)$, $b_{2,d}=\nu_d^2x_\lambda\left(-\frac{q'(x_\lambda)}{q^3(x_\lambda)}+\frac{1}{q^2(x_\lambda)}\right)$.

Доказательство. Используя КН-неравенство, лемму 3.3 и замечание 3.2, получаем:

$$x_{2,n}(\lambda)=\frac{2}{h_d}\int_0^1\int_{-\infty}^{\lambda}xK_d\left(\frac{Q(x)-u}{h_d}\right)dudx+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=2\int_0^1 x\,dx\int_{\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}}^{1}K_d(z)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=2\int_0^{Q^{-1}(\lambda-h_d)}x\,dx\int_{-1}^{1}K_d(z)\,dz+$$

$$+2\int_{Q^{-1}(\lambda-h_d)}^{1}x\,dx\int_{\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}}^{1}K_d(z)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл равен $(Q^{-1}(\lambda-h_d))^2$, а во втором сделаем замену $y=\frac{Q(x)-\lambda}{h_d}$ и, замечая, что $\lambda<Q(1)=1$, а функция $Q(x)$ трижды непрерывно дифференцируема (а следовательно, дифференцируема и обратная функция $Q^{-1}(y)$), $Q'(x)\ge C_0>0$, получим

$$x_{2,n}(\lambda)=(Q^{-1}(\lambda-h_d))^2+2h_d\int_{-1}^{\frac{Q(1)-\lambda}{h_d}}dy\int_y^1K_d(z)\times$$

$$\times(Q^{-1})'(\lambda+h_dy)Q^{-1}(\lambda+h_dy)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=\{Q^{-1}(\lambda)-(Q^{-1})'(\lambda)h_d+(Q^{-1})''(\lambda)\frac{h_d^2}{2}+o(h_d^2)\}^2+$$

$$+2h_d(Q^{-1})'(\lambda)Q^{-1}(\lambda)\int_{-1}^{1}dy\int_y^1K_d(z)\,dz+$$

$$+2h_d^2\int_{-1}^{1}y\,dy\int_y^1K_d(z)\,dz\{(Q^{-1})''(\lambda)Q^{-1}(\lambda)+$$

$$+[(Q^{-1})'(\lambda)]^2\}+o(h_d^2)\,.$$

Замечая, что

$$\int_{-1}^{1}dy\int_y^1K_d(z)\,dz=1\,,\ \int_{-1}^{1}ydy\int_y^1K_d(z)\,dz=\frac{\nu_d^2}{2}-\frac{1}{2}\,,$$

получаем

$$x_{2,n}(\lambda)=(Q^{-1}(\lambda))^2+((Q^{-1})'(\lambda))^2h_d^2-$$

$$-2(Q^{-1})'(\lambda)Q^{-1}(\lambda)h_d+(Q^{-1})''(\lambda)Q^{-1}(\lambda)h_d^2+$$

$$+2(Q^{-1})'(\lambda)Q^{-1}(\lambda)h_d+(\nu_d^2-1)Q^{-1}(\lambda)h_d^2\times$$

$$\times\{(Q^{-1})''(\lambda)+((Q^{-1})'(\lambda))^2\}+o(h_d^2)\,.$$

Вычисляя производные от обратных функций, получаем результат леммы 4.4.

Представим теперь величину $\Lambda(\lambda)$ в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\Lambda(\lambda)=\Lambda_1+\frac{1}{2}\Lambda_2+\frac{1}{6}\Lambda_3+\frac{1}{24}\Lambda_4\,.$$

Здесь

$$\Lambda_1=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}K_d\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right),$$

$$\Lambda_2=\frac{1}{nh_d^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}K_d'\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^2,$$

$$\Lambda_3=-\frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}K_d''\left(\frac{\lambda-Q(i/n)}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^3,$$

$$\Lambda_4=\frac{1}{nh_d^4}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}K_d'''\left(\frac{\lambda-\xi_i}{h_d}\right)\left(\hat{Q}_n\left(\frac{i}{n}\right)-Q\left(\frac{i}{n}\right)\right)^4,$$

где $|\xi_i-Q(i/n)|\le|\hat{Q}_n(i/n)-Q(i/n)|$.

Лемма 4.5. *Если* $h_d=n^{-1/3}$, *то при* $n\to\infty$

$$\sqrt{n}(\Lambda_1-\tilde{a}_{2,r}h_r^2)\xrightarrow{d}N(0,\sigma_2^2)\,,$$

где $\tilde{a}_{2,r}=-\frac{\nu_r^2x_\lambda q'(x_\lambda)}{q(x_\lambda)}$, $\sigma_2^2=\frac{4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)}$.

Доказательство. Определим величины

$$\Lambda_{1,1}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\times$$

$$\times(\hat{Q}_n(i/n)-\mathbf{E}(\hat{Q}_n(i/n)))\,,$$

$$\Lambda_{1,2}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\times$$

$$\times(\mathbf{E}(\hat{Q}_n(i/n))-Q(i/n))\,.$$

Тогда $\Lambda_1=\Lambda_{1,1}+\Lambda_{1,2}$.

Из [13] получаем

$$\mathbf{E}(\hat{Q}_n(x)-Q(x))=\frac{1}{2}\nu_r^2h_r^2Q''(x)+o(h_r^2)\,,$$

а из ограниченности второй производной $Q''(x)$ следует, что

$$\sup_x |\mathbf{E}(\hat{Q}_n(x) - Q(x))| \le O(h_r^2).$$

Используя это замечание, получаем

$$\mathbf{E}(\Lambda_1) = \mathbf{E}(\Lambda_{1,2}) \sim$$

$$\sim -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2nh_d} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) Q''(i/n) \sim$$

$$\sim -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2h_d} \int_0^1 x K_d\left(\frac{Q(x) - \lambda}{h_d}\right) Q''(x)dx \sim$$

$$\sim -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} \int_{-1}^{1} K_d(z) Q^{-1}(\lambda + zh_d) \times$$

$$\times (Q^{-1})'(\lambda + zh_d) Q''(Q^{-1}(\lambda + zh_d)) dz \sim$$

$$\sim -\frac{\nu_r^2}{2} h_r^2 Q^{-1}(\lambda)(Q^{-1})'(\lambda) Q''(Q^{-1}(\lambda)).$$

Далее, подсчитаем дисперсию величины Λ_1. Имеем:

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \mathbf{D}(\Lambda_{1,1}) =$$

$$= \mathbf{D}\left(\frac{1}{n^2 h_d} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_j}{h_r}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^4 h_d^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_j}{h_r}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3 h_d^2} \mathbf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{nh_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \mathbf{E}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{nh_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right)\right].$$

Рассмотрим каждое из слагаемых.

1)

$$\widetilde{I}_{1n} = \frac{1}{n} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{nh_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{nh_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) \int_0^1 H_r\left(\frac{i/n - u}{h_r}\right) dQ(u) =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 x \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(x) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{x - u}{h_r}\right) dx\right) dQ(u) =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\lambda}{h_d}}^{\frac{1-\lambda}{h_d}} K_d(z) Q^{-1}(\lambda + h_d z) \times\right.$$

$$\left. \times (Q^{-1})'(\lambda + h_d z) H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda + h_d z) - u}{h_r}\right) dz\right) dQ(u).$$

Заметим, что для фиксированного λ

$$-\frac{\lambda}{h_d} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty, \quad \frac{1-\lambda}{h_d} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty,$$

$$\sup_z |Q^{-1}(\lambda + h_d z) - Q^{-1}(\lambda)| \le$$

$$\le (Q^{-1})'(\lambda) h_d \le Ch_d \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

$$H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda + h_d z) - y}{h_r}\right) - H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - y}{h_r}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_r} K_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - y}{h_r}\right) \cdot ((Q^{-1})'(\lambda) h_d z +$$

$$+ \frac{1}{2}(Q^{-1})''(\lambda) h_d^2 z^2 + o(h_d^2)) = O\left(\frac{h_d^2}{h_r}\right),$$

где мы использовали, что $\int_{-1}^{1} K_d(z)dz = 1$, $\int_{-1}^{1} zK_d(z)dz = 0$, функции K_r, $(Q^{-1})'$, $(Q^{-1})''$, $(Q^{-1})'''$ ограничены.

Поэтому

$$\widetilde{I}_{1n} \sim Q^{-1}(\lambda)(Q^{-1})'(\lambda) \int_0^1 H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) dQ(u).$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t = \dfrac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}$. Тогда при $n \to \infty$

$$\widetilde{I}_{1n} = Q^{-1}(\lambda)(Q^{-1})'(\lambda) \int_0^1 \frac{1}{h_r} K_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) Q(u)\, du \sim$$

$$\sim Q^{-1}(\lambda)(Q^{-1})'(\lambda) \int_{\frac{Q^{-1}(\lambda)-1}{h_r}}^{\frac{Q^{-1}(\lambda)}{h_r}} K_r(t) Q(Q^{-1}(\lambda) - h_r t) dt \sim$$

$$\sim Q^{-1}(\lambda)(Q^{-1})'(\lambda) \int_{-1}^{1} K_r(t) Q(Q^{-1}(\lambda)) dt.$$

В итоге получаем, что $\widetilde{I}_{1n} \sim \dfrac{\lambda x_\lambda}{q(x_\lambda)}$.

2)

$$\widetilde{I}_{2n} = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{nh_d} K_d\left(\frac{Q(i/n) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{i/n - U_1}{h_r}\right)\right)^2 \sim$$

$$\sim \int_0^1 \left(\int_0^1 x \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{Q(x) - \lambda}{h_d}\right) H_r\left(\frac{x - u}{h_r}\right) dx\right)^2 dQ(u) \sim$$

$$\sim \int_0^1 \left(\int_{-1}^{1} Q^{-1}(\lambda)(Q^{-1})'(\lambda) K_d(t) \times\right.$$

$$\left. \times H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) dt\right)^2 dQ(u) \sim$$

$$\sim \frac{x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)} \int_0^1 H_r^2\left(\frac{Q^{-1}(\lambda) - u}{h_r}\right) dQ(u) \sim$$

$$\sim \frac{2x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)} \int_{-1}^{1} Q(Q^{-1}(\lambda) - h_r z) K_r(z) H_r(z) dz \sim$$

$$\sim \frac{2\lambda x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)} \int_{-1}^{1} K_r(z) H_r(z) dz \sim \frac{\lambda x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)}.$$

Таким образом, $\mathbf{D}(\Lambda_1) \sim \dfrac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{nq^2(x_\lambda)}$.

Учитывая множитель 2 в определении оценки $\hat{x}_{2,n}(\lambda)$, получим результат леммы 4.5.

Заметим также, что $\sqrt{n}h_d^2 = n^{-1/6} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому имеем:

$$\sqrt{n}\Lambda_1 \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} N(0, \sigma_2^2).$$

Асимптотическая нормальность $\Lambda_{1,1}$ доказывается аналогично предыдущему.

Замечание. Если мы рассмотрим оценки

$$\hat{x}_{2,n}(\lambda_l) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} H_d\left(\frac{\lambda_l - \hat{Q}_n(i/n)}{h_d}\right), \quad l = 1,2,$$

квантилей порядков λ_1 и λ_2, где будем считать, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, то аналогично предыдущему достаточно рассмотреть асимптотическое поведение $n\widetilde{\sigma}_{12n}$, где $\widetilde{\sigma}_{12n}$ есть ковариация оценок $\hat{x}_{2,n}(\lambda_1)$ и $\hat{x}_{2,n}(\lambda_2)$.

Имеем:

$$n\widetilde{\sigma}_{12n} \sim$$

$$\sim \mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{nh_d}K_d\left(\frac{Q(i/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{i/n-U_1}{h_r}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{nh_d}K_d\left(\frac{Q(j/n)-\lambda}{h_d}\right)H_r\left(\frac{j/n-U_1}{h_r}\right)\right)\right) -$$

$$-\frac{\lambda_1\lambda_2 x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})} \sim$$

$$\sim \int_0^1 dQ(u)\left(\int_0^1 \frac{x}{h_d}K_d\left(\frac{Q(x)-\lambda_1}{h_d}\right)H_r\left(\frac{x-u}{h_r}\right)dx\right)\times$$

$$\times\left(\int_0^1 \frac{y}{h_d}K_d\left(\frac{Q(y)-\lambda_2}{h_d}\right)H_r\left(\frac{y-u}{h_r}\right)dy\right) -$$

$$-\frac{\lambda_1\lambda_2 x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})} \sim$$

$$\sim Q^{-1}(\lambda_1)Q^{-1}(\lambda_2)(Q^{-1})'(\lambda_1)(Q^{-1})'(\lambda_2)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1} H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda_1)-u}{h_r}\right)H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda_2)-u}{h_r}\right)dQ(u) -$$

$$-\frac{\lambda_1\lambda_2 x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})}.$$

Заметим теперь, что $\lambda_1 < \lambda_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow Q^{-1}(\lambda_1) < Q^{-1}(\lambda_2)$. Делая замену переменной $t = \dfrac{Q^{-1}(\lambda_1) - u}{h_r}$, получаем, что

$$\frac{Q^{-1}(\lambda_2)-u}{h_r} = t + \frac{Q^{-1}(\lambda_2) - Q^{-1}(\lambda_1)}{h_r} \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Поэтому

$$n\widetilde{\sigma}_{12n} \sim \frac{Q^{-1}(\lambda_1)Q^{-1}(\lambda_2)}{q(Q^{-1}(\lambda_1))q(Q^{-1}(\lambda_2))}\times$$

$$\times\int_0^1 H_r\left(\frac{Q^{-1}(\lambda_1)-u}{h_r}\right)dQ(u) - \frac{\lambda_1\lambda_2 x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})} \sim$$

$$\sim \frac{\lambda_1 x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})} - \frac{\lambda_1\lambda_2 x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{q(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{\sigma}_{12n} \sim \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}}{nq(x_{\lambda_1})q(x_{\lambda_2})}.$$

Лемма 4.6. *При* $n \to \infty$

$$\Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Доказательство. Замечая, что $0 \le i/n \le 1$, и повторяя доказательство леммы 4.3, получим результат леммы 4.6.

Из лемм 4.4–4.6 выводим следующую теорему.

Теорема 4.2. *Если* $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k < 1$ *и выполнены основные условия, то при* $n \to \infty$

$$(n^{1/2}(\hat{x}_{2,n}(\lambda_i) - x_{\lambda_i}^2)_{i=1}^k) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_2),$$

где $N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_2)$ *обозначает k-мерное нормальное распределение со средним* $\mathbf{0}$ *и симметричной матрицей ковариаций* $\mathbf{\Sigma}_2 = (\rho_{ij})_{i,j=1}^k$,

$$\rho_{ij} = \frac{4\lambda_i(1-\lambda_j)x_{\lambda_i}x_{\lambda_j}}{q(x_{\lambda_i})q(x_{\lambda_j})}.$$

Рассмотрим оценку

$$\hat{x}_{3,n}(\lambda) = \sqrt{\hat{x}_{2,n}(\lambda)}.$$

Воспользовавшись теоремой 3.2, получаем следующий результат.

Теорема 4.3. *При* $n \to \infty$

$$n^{1/2}(\hat{x}_{3,n}(\lambda) - x_\lambda) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} N(0, \sigma_3^2),$$

где $\sigma_3^2 = \dfrac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda}{q^2(x_\lambda)}$.

Так как $0 < x_\lambda < 1$, то из теоремы 4.3 заключаем, что предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{3,n}(\lambda)$ меньше, чем предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{1,n}(\lambda)$.

Обобщением теоремы 4.3 является следующая теорема.

Теорема 4.4. *Если* $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_k<1$ *и выполнены основные условия, то при* $n\to\infty$

$$(n^{1/2}(\hat{x}_{3,n}(\lambda_i)-x_{\lambda_i})_{i=1}^k)\underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}} N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}_3),$$

где $N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma}_3)$ *обозначает k-мерное нормальное распределение со средним* $\mathbf{0}$ *и симметричной матрицей ковариаций* $\mathbf{\Sigma}_3=(\tau_{ij})_{i,j=1}^k$.

4.3. Асимптотика оценок $\hat{x}_{4,n}(\lambda)$ и $\hat{x}_{5,n}(\lambda)$

Рассмотрим теперь оценку $\hat{x}_{4,n}(\lambda)$ следующего вида:

$$\hat{x}_{4,n}(\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_d\left(\frac{\lambda-\hat{Q}_n(\xi_i)}{h_d}\right),$$

$$\hat{x}_{5,n}(\lambda)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i H_d\left(\frac{\lambda-\hat{Q}_n(\xi_i)}{h_d}\right).$$

Представим статистику $\hat{x}_{4,n}(\lambda)$ в следующем виде:

$$\hat{x}_{4,n}(\lambda)=x_{4,n}(\lambda)+\Psi_1(\lambda),$$

где

$$x_{4,n}(\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_d\left(\frac{\lambda-Q(\xi_i)}{h_d}\right),$$

$$\Psi_1(\lambda)=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^n\int_{-\infty}^{\lambda}\left(K_d\left(\frac{\hat{Q}_n(\xi_i)-u}{h_d}\right)-\right.$$

$$\left.-K_d\left(\frac{Q(\xi_i)-u}{h_d}\right)\right)du.$$

Представим статистику $\hat{x}_{5,n}(\lambda)$ в следующем виде:

$$\hat{x}_{5,n}(\lambda)=x_{5,n}(\lambda)+\Psi_2(\lambda),$$

где

$$x_{5,n}(\lambda)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i H_d\left(\frac{\lambda-Q(\xi_i)}{h_d}\right),$$

$$\Psi_2(\lambda)=\frac{2}{nh_d}\sum_{i=1}^n\xi_i\int_{-\infty}^{\lambda}\left(K_d\left(\frac{\hat{Q}_n(\xi_i)-u}{h_d}\right)-\right.$$

$$\left.-K_d\left(\frac{Q(\xi_i)-u}{h_d}\right)\right)du.$$

Исследуем сначала поведение величины $x_{4,n}(\lambda)$. Для этого найдем её математическое ожидание и дисперсию. Имеем:

$$\mathbf{E}(x_{4,n}(\lambda))=J_1=\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_d\left(\frac{\lambda-Q(\xi_i)}{h_d}\right)\right)=$$

$$=\int_0^1 H_d\left(\frac{\lambda-Q(u)}{h_d}\right)du=$$

$$=\int_0^1 du\frac{1}{h_d}\int_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{Q(u)-x}{h_d}\right)dx=$$

$$=\int_0^1 du\int_{h_d^{-1}(Q(u)-\lambda)}^1 K_d(z)\,dz=\int_0^{Q^{-1}(\lambda-h_d)}du\int_{-1}^1 K_d(z)\,dz+$$

$$+\int_{Q^{-1}(\lambda-h_d)}^1 du\int_{h_d^{-1}(Q(u)-\lambda)}^1 K_d(z)\,dz=$$

$$=Q^{-1}(\lambda-h_d)+\int_{-1}^{h_d^{-1}(Q(1)-\lambda)}dy\int_y^1 h_dK_d(z)(Q^{-1})'\times$$

$$\times(\lambda+h_dy)dz=Q^{-1}(\lambda)+\frac{1}{2}h_d^2(Q^{-1})''(\lambda)\nu_d^2+$$

$$+O(h_d^3)=x_\lambda-\frac{h_d^2\nu_d^2q'(x_\lambda)}{2q^3(x_\lambda)}+O(h_d^3).$$

Кроме того, $\mathbf{D}(x_{4,n}(\lambda))=\frac{1}{n}(J_2-J_1^2)$, где

$$J_2=\int_0^1\left(\int_{-\infty}^{\lambda}h_d^{-1}K_d(h_d^{-1}(Q(x)-u))du\right)^2dx.$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что $J_2=x_\lambda-\frac{h_d^2q'(x_\lambda)}{2q^3(x_\lambda)}+o(h_d^2)$.

Значит, $\mathbf{D}(x_{4,n}(\lambda))\sim\frac{x_\lambda(1-x_\lambda)}{n}$.

Из неравенства Чебышева отсюда следует, что $x_{4,n}(\lambda)\underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}}x_\lambda$.

Точно так же (см. [14]) можно показать, что

$$\mathbf{E}(x_{5,n}(\lambda))=x_\lambda^2+h_d^2\nu_d^2\left(\frac{1}{q^2(x_\lambda)}-\frac{x_\lambda q'(x_\lambda)}{q^3(x_\lambda)}\right)+o(h_d^2),$$

$$\mathbf{D}(x_{5,n}(\lambda))\sim\frac{4x_\lambda^3}{n}\left(\frac{1}{3}-\frac{x_\lambda}{4}\right),$$

откуда $x_{5,n}(\lambda)\underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}}x_\lambda^2$.

Имеют место также следующие результаты.

Лемма 4.7. *При* $n\to\infty$

$$n^{1/2}\Psi_1(\lambda)\overset{d}{\to}N(0,\tilde{\sigma}_2^2(\lambda)),$$

где

$$\tilde{\sigma}_2^2(\lambda)=\frac{\lambda(1-\lambda)}{q^2(x_\lambda)}.$$

Лемма 4.8. *При* $n\to\infty$

$$n^{1/2}\Psi_2(\lambda)\overset{d}{\to}N(0,\tilde{\sigma}_3^2(\lambda)),$$

где $\tilde{\sigma}_3^2(\lambda) = \dfrac{4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)}$.

Из этих лемм уже нетрудно получить следующие результаты.

Теорема 4.5. *При* $n \to \infty$

$$n^{1/2}(\hat{x}_{4,n}(\lambda) - x_\lambda) \xrightarrow{d} N(0, \tilde{\sigma}_2^2(\lambda)),$$

где $\tilde{\sigma}_2^2(\lambda) = \dfrac{\lambda(1-\lambda)}{q^2(x_\lambda)}$.

Теорема 4.6. *При* $n \to \infty$

$$n^{1/2}(\hat{x}_{5,n}(\lambda) - x_\lambda^2) \xrightarrow{d} N(0, \tilde{\sigma}_3^2(\lambda)),$$

где $\tilde{\sigma}_3^2(\lambda) = \dfrac{4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{q^2(x_\lambda)}$.

Как и в случае фиксированного плана испытаний, рассмотрим следующую оценку:

$$\hat{x}_{6,n}(\lambda) = \sqrt{\hat{x}_{5,n}(\lambda)}.$$

Воспользовавшись теперь теоремой 3.2, получаем следующий результат.

Теорема 4.7. *При* $n \to \infty$

$$n^{1/2}(\hat{x}_{6,n}(\lambda) - x_\lambda) \xrightarrow{d} N(0, \tilde{\sigma}_4^2(\lambda))$$

где $\tilde{\sigma}_4^2(\lambda) = \dfrac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda}{q^2(x_\lambda)}$.

Список литературы

1. Falk M. Asymptotic normality of the kernel quantile estimator // Ann. Statist. 1985. V. 13. P. 428–433.
2. Bahadur R.R. A note on quantiles in large samples // Ann. Math. Statist. 1966. V. 37. P. 577–580.
3. Kiefer J. On Bahadur's representation of sample quantiles // Ann. Math. Statist. 1967. V. 38. P. 1323–1342.
4. Kiefer J. Deviations between the sample quantile process and the sample D.F. // In : Nonparametric Techniques in Statistical Inference (M.L. Puri, ed.). London: Cambridge Univ. Press., 1970. P. 299–319.
5. Reiss R.-D. Nonparametric Estimation of Smooth Distribution Functions // Scand. J. Statist. 1981. V. 8. P. 116–119.
6. Yang S.-S. A Smooth Nonparametric Estimator of a Quantile Function // J. American Statist. Assoc. 1985. V. 80. No. 392. P. 1004–1011.
7. Liu R., Yang L. Kernel estimation of multivariate distribution function // Journal of Nonparametric Statistics. 2008. V. 20. P. 661–667.
8. Csörgö M., Horváth L. On the distance between smoothed empirical and quantile process // Ann. Statist. 1995. V. 25. P. 113–131.
9. Shirahata S., Chu I.S. Integrated squared error of kernel-type estimator of distribution function // Ann. Inst. Statist. Math. 1992. V. 44. P. 579–591.
10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
11. Niederreiter H. Random number generation and quasi-Monte Carlo methods. SIAM. Philadelphia, 1992. 241 p.
12. Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991. 448 с.
13. Tikhov M.S., Borodina T.S. Nonparametric estimator for effective doses in dose-effect dependence over random experiment plans // Proceedings of the 9th International Conference «Reliability and Statistics in Transportation and Communication» (RelStat'09), 21–24 October 2012, Riga, Latvia. P. 134–143.
14. Тихов М.С. Оценивание эффективных доз в зависимости доза-эффект по случайным планам эксперимента // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. научн. тр. Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2012. С. 204–219.

ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE KERNEL QUANTILE ESTIMATORS

T.S. Borodina, M.S. Tikhov

Nonparametric quantile estimators are considered. These estimators are shown to be consistent and asymptotically normal. Limiting variances of the estimators constructed are presented.

Keywords: dose-effect model, nonparametric kernel estimators, quantile process.