УДК 519.716

О ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ В P_3, ПОРОЖДЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

А.В. Михайлович

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

avmikhailovich@gmail.com

Поступила в редакцию 15.02.2012

Изучаются замкнутые классы функций трехзначной логики, порожденные симметрическими функциями, принимающими значения из множества {0, 1}. Для некоторых классов, порожденных элементарными периодическими симметрическими функциями такого вида, получены критерии базируемости и конечной порожденности.

Ключевые слова: функции многозначной логики, замкнутые классы, порождающая система, базис.

В работе рассматривается задача базируемости и конечной порожденности для классов функций трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями.

Э. Пост [1] описал структуру всех замкнутых классов булевых функций. При этом он показал, что все эти классы имеют конечный базис. На случай k-значных логик при $k\geq3$ этот результат не распространяется. В работе Ю.И. Янова и А.А. Мучника [2] приведены примеры, которые показывают, что при всех $k\geq3$ в P_k (здесь P_k – множество всех функций k-значной логики) существуют как замкнутые классы со счетным базисом, так и классы, не имеющие базиса (см. также [3, 4]). Следует отметить, что порождающие системы замкнутых классов в этих примерах состоят из симметрических функций, которые принимают значения из множества {0, 1}, причем ненулевые значения принимаются на наборах, состоящих только из единиц и двоек. В [5] рассмотрены семейства классов, порожденных немонотонными симметрическими функциями такого вида, принимающими значение 1 на фиксированном числе слоев, а в [6] – монотонными симметрическими функциями. Для этих классов приведены критерии базируемости и конечной порожденности. В данной работе рассматриваются семейства классов, порожденных периодическими симметрическими функциями с ограниченным периодом. Показано, что каждый такой класс имеет базис в том и только том случае, когда его порождающая система содержит лишь конечное число функций. Краткое изложение аналогичного результата для классов, порожденных периодическими симметрическими функциями с фиксированным периодом, содержится в [7]. Все необходимые определения можно найти в [4–6].

Пусть $E=\{0,1,2\}$. Обозначим через E^n, $n\geq1$, множество всех наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, таких, что $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in E$. Число единиц в наборе $\tilde{\alpha}$ из E^n обозначим через $|\tilde{\alpha}|$. Обозначим через N множество всех натуральных чисел, а через Z^+ – множество всех целых неотрицательных чисел.

Пусть Φ – некоторая формула над P_3. Множество всех функций, функциональные символы которых используются при построении формулы Φ, обозначим через $\Theta(\Phi)$. Символы переменных будем называть тривиальными формулами.

Обозначим через R множество всех функций трехзначной логики, принимающих значения только из множества {0, 1} и равных нулю на единичном наборе и на всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту. Легко видеть, что для функций из множества R выполняется следующее утверждение (см., например, [5]).

Утверждение 1. *Пусть* Φ – *некоторая формула над* R, Φ_1 – *произвольная нетривиальная подформула формулы* Φ, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ – *произвольные наборы из* E^n, *такие, что* $\Phi_1(\tilde{\alpha})=0$, $\Phi(\tilde{\beta})=1$. *Тогда* $\Phi(\tilde{\alpha})=0$ *и* $\Phi_1(\tilde{\beta})=1$.

Функции f и g из P_3 называются конгруэнтными, если одна из них получается из другой переименованием переменных без отождествления.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)\in R$. Будем обозначать через N_f множество всех наборов из E^n, на которых функция f принимает значение 1.

Множество всех наборов из E^n, которые получаются друг из друга перестановкой компонент, будем называть слоем. Слой, содержащий e единиц, d двоек и не содержащий нулей, обозначим через $L(e,d)$. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ из R

является симметрической, если для любого слоя $L \subseteq E^n$ и для любых наборов $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ из L выполняется равенство $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta})$.

Пусть $t \in N$. Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ из R называется элементарной периодической симметрической функцией с периодом t, если для некоторых e и d, удовлетворяющих условиям $e+d=n$, $0 \le d < t$, выполняется соотношение

$$N_f = \bigcup_{i=0}^{s} L(e - it, d + it),$$

где $s = \left]\frac{n-d}{t}\right[$ и $N_f \neq \varnothing$. Будем обозначать через t_f период функции f, а через e_f и d_f – соответственно число единиц и двоек в слое из N_f с наибольшим числом единиц. Множество всех элементарных периодических симметрических функций будем обозначать через PS, множество всех элементарных периодических симметрических функций с периодом t – через PS^t, а множество всех элементарных периодических симметрических функций, у которых период не превосходит t – через $PS^{(t)}$.

Обозначим через $i_n(x_1,\ldots,x_n)$, $n \ge 1$, функцию из R, принимающую значение 1 на всех наборах из $\{1,2\}^n$. Положим $I = \bigcup \{i_n\}$, где объединение берется по всем $n>0$. Легко видеть, что $PS^1 = I$. Отметим следующее свойство множества I.

Утверждение 2. *Для любого* $n \in N$, $n>1$, *выполняется равенство* $I = [\{i_n\}]$.

Докажем следующие вспомогательные утверждения.

Утверждение 3. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n) \in PS^t$, $t>1$, *и существует набор* $\tilde{\alpha} \in N_f$, *такой, что* $0 < |\tilde{\alpha}| < n$; Φ *– формула над* R, *реализующая функцию* f, Φ_1 *– подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(B_1,\ldots,B_m)$, *где* $g \in PS^r$, $r \in N$, $B_1,\ldots,B_m$ *— формулы над* R, *и среди формул* $B_1,\ldots,B_m$ *символы переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *встречаются* $q_1,\ldots,q_n$ *раз соответственно*, $q_1,\ldots,q_n \in Z^+$. *Тогда для любых* i *и* j, $1 \le i$, $j \le n$, *существует* $l \in Z^+$, *такое, что* $|q_i - q_j| = lr$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}$ — набор из N_f, такой, что $0 < |\tilde{\alpha}| < n$. Положим $e = |\tilde{\alpha}|$. Поскольку f — симметрическая функция, то выполняется включение $L(e,d) \subseteq N_f$. Для произвольных i и j, $1 \le i < j \le n$, рассмотрим наборы $\tilde{\beta}^1$, $\tilde{\beta}^2$ из $L(e,d)$, такие, что

$$\tilde{\beta}^1 = (\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},\ldots,\beta_{j-1},2,\beta_{j+1},\ldots,\beta_n),$$
$$\tilde{\beta}^2 = (\beta_1,\ldots,\beta_{i-1},2,\beta_{i+1},\ldots,\beta_{j-1},1,\beta_{j+1},\ldots,\beta_n).$$

Определим наборы $\tilde{\gamma}^1 = (\gamma_1^1,\ldots,\gamma_m^1)$, $\tilde{\gamma}^2 = (\gamma_1^2,\ldots,\gamma_m^2)$ следующим образом. Положим

$$\gamma_l^k = B_l(\tilde{\beta}^k),\ k = 1,2,\ l = 1,\ldots,m.$$

Поскольку наборы $\tilde{\beta}^1$ и $\tilde{\beta}^2$ содержатся в N_f, то в силу утверждения 1 наборы $\tilde{\gamma}^1$ и $\tilde{\gamma}^2$ содержатся в N_g. Пусть среди формул $B_1,\ldots,B_m$ нетривиальные формулы встречаются s раз, $0 \le s \le m$. Поскольку $g \in PS^r$, то для некоторого $l \in Z^+$ выполняется равенство $\left\| \tilde{\gamma}^1 \right| - \left| \tilde{\gamma}^2 \right\| = lr$. Кроме того, для любой нетривиальной формулы B_k, $1 \le k \le m$, в силу утверждения 1 выполняется равенство

$$B_k(\tilde{\beta}^p) = 1,\quad p=1,2.$$

Поэтому

$$\left|\tilde{\gamma}^1\right| - \left|\tilde{\gamma}^2\right| = \left(s + \sum_{\substack{k:1\le k\le n,\\ \beta_k^1 = 1}} q_k \right) - \left(s + \sum_{\substack{k:1\le k\le n,\\ \beta_k^2 = 1}} q_k \right) = q_i - q_j.$$

Следовательно, $|q_i - q_j| = lr$.

Утверждение 4. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n) \in PS^t$, $t>1$, *и существует набор* $\tilde{\alpha} \in N_f$, *такой, что* $0 < |\tilde{\alpha}| < n$; Φ *— формула над* R, *реализующая функцию* f, Φ_1 *— подформула формулы* Φ, *имеющая вид* $g(B_1,\ldots,B_m)$, *где* $g \in PS^r$, $r \in N$, $B_1,\ldots,B_m$ *— формулы над* R. *Если существуют такие* i, k, $1 \le i \le n$, $k \in Z^+$, *что среди формул* $B_1,\ldots,B_m$ *переменная* x_i *встречается* kr *раз, то формула* Φ_1 *эквивалентна формуле* $i_m(B_1,\ldots,B_m)$.

Доказательство. Пусть для некоторых i, k, $1 \le i \le n$, $k \in Z^+$, среди формул $B_1,\ldots,B_m$ переменная x_i встречается kr раз, т.е. $q_i = kr$. Из утверждения 3 следует, что для каждого j, $1 \le j \le n$, существует $l \in Z^+$, такое, что выполняется равенство $|q_i - q_j| = lr$. Так как $q_i = kr$, то для каждого j, $1 \le j \le n$, существует $k_j \in Z^+$, такое, что $q_j = k_j r$.

Для произвольного набора $\tilde{\alpha}$ из N_f определим набор $\tilde{\beta} = (\beta_1,\ldots,\beta_m)$. Положим

$$\beta_i = B_i(\tilde{\alpha}),\quad i = 1,\ldots,m.$$

Из условия $\tilde{\alpha} \in N_f$ с использованием утверждения 1 получаем, что $\tilde{\beta} \in N_g$. Кроме того, для любой нетривиальной формулы B_k, $1 \le k \le m$, в силу утверждения 1 выполняется равенство

$B_k(\tilde{\beta})=1$. Пусть среди формул $B_1,\ldots, B_m$ нетривиальные формулы встречаются s раз. Тогда выполняются равенства

$$\left|\tilde{\beta}\right| = s + \sum_{\substack{j:1\le j\le n,\\ \alpha_j=1}} q_j = s + r\sum_{\substack{j:1\le j\le n,\\ \alpha_j=1}} k_j.$$

Поскольку $g \in PS^r$, то для любого k, $0 \le k \le \dfrac{m-s}{r}$, выполняется включение

$$L(rk+s, m-(rk+s)) \subseteq N_g.$$

Обозначим формулу $i_m(B_1,\ldots,B_m)$ через Ψ. Покажем, что формулы Φ_1 и Ψ эквивалентны. Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\gamma}$ из E^n. Так как $N_g \subseteq N_{i_m}$, $B_1,\ldots,B_m$ – формулы над R, то в силу утверждения 1 из равенства $\Phi_1(\tilde{\gamma})=1$ следует равенство $\Psi(\tilde{\gamma})=1$.

Пусть теперь $\Psi(\tilde{\gamma})=1$. Покажем, что в этом случае $\Phi_1(\tilde{\gamma})=1$. В силу утверждения 1 для любой нетривиальной формулы B_i, $1\le i\le m$, выполняется равенство $B_i(\tilde{\gamma})=1$. Определим набор $\tilde{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ следующим образом. Положим $\delta_i = B_i(\tilde{\gamma})$, $i=1,\ldots,m$. Очевидно, что

$$\left|\tilde{\delta}\right| = s + \sum_{\substack{j:1\le j\le n,\\ \gamma_j=1}} q_j = s + r\sum_{\substack{j:1\le j\le n,\\ \gamma_j=1}} k_j.$$

Положим

$$k = \sum_{\substack{j:1\le j\le n,\\ \gamma_j=1}} k_j.$$

Поскольку $s \le \left|\tilde{\gamma}\right| \le m$ и $k = \dfrac{\left|\tilde{\delta}\right|-s}{r}$, то $0 \le k \le \dfrac{m-s}{r}$. Поэтому выполняется включение

$$L(rk+s, m-(rk+s)) \subseteq N_g.$$

Следовательно, $\Phi_1(\tilde{\gamma}) = g(\tilde{\delta}) = 1$.

Следствие 1. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in PS^t$, $t>1$, Φ – *формула над* PS, *реализующая функцию* f. *Тогда существует подформула* Ψ *формулы* Φ, *имеющая вид* $g(B_1,\ldots,B_m)$, *где* $g\in PS^r$, $r>1$, $B_1,\ldots,B_m$ – *формулы над* R, *среди которых символы переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *встречаются* $q_1,\ldots,q_n$ *раз соответственно*, $q_1,\ldots,q_n \in Z^+$, *такая, что для всех* $i=1,\ldots,n$ *справедливы неравенства* $q_i>0$ *и* q_i *не кратно* r.

В самом деле, если таких подформул нет, то в силу утверждения 4 получаем, что функция f реализуется формулой над PS^1. Из утверждения 2 следует, что $f \in PS^1$, а это противоречит условию.

Следствие 2. *Пусть* $f(x_1,\ldots,x_n)\in PS^t$, $t>1$, $G\subseteq PS^t$, $f\in[G]$. *Тогда* $f\in[G^+\cup I]$ *и* $f\notin[G^-\cup I]$, *где* $G^+=\{g(x_1,\ldots,x_m)\in G \mid m\ge n\}$, $G^-=\{g(x_1,\ldots,x_m)\in G \mid m<n\}$.

Действительно, пусть формула Φ над множеством G реализует функцию f. В силу следствия 1 из утверждения 4 существует такая подформула Ψ, имеющая вид $g(B_1,\ldots,B_m)$, что функция g содержится в множестве G^+. Кроме того, в силу утверждения 4 любая подформула Ψ', имеющая вид $h(B_1,\ldots,B_s)$, где $h\in G^-$, эквивалентна подформуле $i_s(B_1,\ldots,B_s)$.

Следствие 3. *Пусть* G – *конечное множество функций из* PS^t. *Тогда множество* $[G]\cap(PS\backslash I)$ *содержит лишь конечное число попарно неконгруэнтных функций.*

В самом деле, если обозначить через n максимальное число переменных у функций из множества G, то для любой функции $g(x_1,\ldots,x_m)$ из множества $[G]\cap(PS\backslash I)$ в силу следствия 2 из утверждения 4 выполняется неравенство $m\le n$.

Утверждение 5. *Пусть* $t>1$, $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)\in PS^t$, $d_f=d_g$, *и существует такое* $k\in Z^+$, *что* $m-n=kt$. *Тогда* $f\in[\{g\}]$.

Доказательство. Покажем, что выполняется равенство

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_{n-1},\underbrace{x_n,\ldots,x_n}_{kt+1}).$$

Поскольку $m-n=kt$ и $d_f=d_g$, то выполняется равенство $e_f+kt=e_g$. Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – произвольный набор из N_f. Тогда для некоторого l, $0\le l\le \left]\dfrac{n-d_f}{t}\right[$, выполняется соотношение

$$\tilde{\alpha}\in L(e_f-lt, d_f+lt).$$

Определим набор $\tilde{\beta}$ из множества E^m. Положим

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\underbrace{\alpha_n,\ldots,\alpha_n}_{kt+1}).$$

Если $\alpha_n=1$, то

$$\tilde{\beta}\in L(e_f+kt-lt, d_f+lt).$$

Поскольку $e_f+kt=e_g$, $d_f=d_g$, то

$$\tilde{\beta}\in L(e_g-lt, d_g+lt)\subseteq N_g.$$

Если $\alpha_n=2$, то

$$\tilde{\beta} \in L(e_f - lt, d_f + lt + kt).$$

Поскольку $e_f+kt=e_g$, $d_f=d_g$, то

$$\tilde{\beta} \in L(e_g - lt - kt, d_g + lt + kt) \subseteq N_g.$$

Аналогичным образом можно показать, что если набор $\tilde{\beta}$ содержится в множестве N_g, то набор $\tilde{\alpha}$ принадлежит множеству N_f.

Следствие 1. *Пусть* $t \in N$, G – *множество попарно неконгруэнтных функций из* PS^t, $|G| > t^2$. *Тогда существуют функции* $f, g \in G$, *такие, что* $f \in [\{g\}]$.

В самом деле, поскольку множество G содержит более чем t^2 попарно неконгруэнтных функций, то для некоторого d, $0 \le d < t$, множество $G_d = \{g \in G | d_g = d\}$ содержит более t функций. Поскольку $|G_d| > t$, то для некоторого $k \in N$ существуют функции $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_m)$ из множества G_d, такие, что $m-n=kt$. В силу утверждения 5 функция f содержится в классе $[\{g\}]$.

Следствие 2. *Пусть* $t \in N$, G – *множество попарно неконгруэнтных функций из* $PS^{(t)}$, $|G| > \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}$. *Тогда существуют функции* $f, g \in G$, *такие, что* $f \in [\{g\}]$.

Действительно, поскольку

$$|G| > \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \ldots + t^2,$$

то существует s, $1 \le s \le t$, такое, что $|G \cap PS^s| > t^2$. В силу следствия 1 из утверждения 5 существуют функции $f, g \in (G \cap PS^s) \subseteq G$, такие, что f содержится в классе $[\{g\}]$.

Перейдем к доказательству основного результата.

Теорема. *Пусть* $t>1$, G – *множество попарно неконгруэнтных функций из* $PS^{(t)}$, $F=[G]$. *Следующие условия эквивалентны*:

1. Множество G конечно.

2. Класс F имеет конечный базис.

3. Класс F имеет базис.

Доказательство. Очевидно, что из условия 1 следует условие 2, а из условия 2 — условие 3. Покажем, что из условия 3 следует условие 1.

Пусть F имеет базис A. Покажем, что множество G конечно. Для каждой функции f из A зафиксируем некоторую формулу Ψ_f над G, реализующую функцию f. Обозначим через B множество всех таких функций g из множества G, что для любой функции h из множества $G \setminus \{g\}$ выполняется соотношение $g \notin [\{h\}]$. В силу следствия 2 из утверждения 5 множество B конечно. Тогда существует конечное множество $A_B \subseteq A$, такое, что $B \subseteq [A_B]$.

Рассмотрим множество $F \cap I$. В силу утверждения 2 существует конечное множество $A_I \subseteq A$, такое что $F \cap I \subseteq [A_i]$.

Положим

$$\hat{A} = A_B \cup A_I, \quad \hat{G} = \bigcup_{h \in \hat{A}} \Theta(\Psi_h).$$

Покажем, что множество A содержится в множестве $\hat{A}$. Предположим, что существует функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ из множества $A \setminus \hat{A}$. Обозначим через $\hat{n}$ максимальное число существенных переменных у функций из множества $\hat{G} \cup \Theta(\Psi_f)$. Пусть $g(x_1,\ldots,x_m)$ – функция из $\Theta(\Psi_f)$. Если существует функция g_1 из множества B, такая, что $g \in [\{g_1\}]$, то $g \in [\{g_1\}] \subseteq [A_B]$.

Пусть теперь для любой функции g_1 из множества B соотношение $g \in [\{g_1\}]$ не выполняется. Тогда существует функция $g_2(x_1,\ldots,x_s) \in G$, такая, что $g \in [\{g_2\}]$ и $s > \hat{n}$. В силу следствия 2 из утверждения 4 выполняется соотношение $g_2 \notin [\hat{G} \cup \Theta(\Psi_f)]$. Поскольку

$$\hat{A} \cup \{f\} \subseteq [\hat{G} \cup \Theta(\Psi_f)],$$

то $g_2 \notin [\hat{A} \cup \{f\}]$. Следовательно, $g_2 \in [A \setminus (\hat{A} \cup \cup \{f\})]$. А значит, $f \in [A \setminus \{f\}]$, что противоречит определению базиса. Поэтому $A \subseteq \hat{A}$ и множество A конечно. В силу следствия 3 из утверждения 4 множество G содержит лишь конечное число попарно неконгруэнтных функций.

Автор выражает благодарность проф. А.Б. Угольникову за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11–01–00508) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Список литературы

1. Post E.L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton Univ. Press, 1941. 122 p.
2. Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 44–46.
3. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. 668 p.
4. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.

5. Михайлович А.В. О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2008. № 4. С. 54–57.

6. Михайлович А.В. О классах трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 1. С. 33–37.

7. Михайлович А.В. О замкнутых классах функций трехзначной логики, порожденных периодическими симметрическими функциями // Материалы XVI Междунар. конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 319–323.

ON CLOSED CLASSES OF FUNCTIONS IN P_3 GENERATED BY PERIODIC SYMMETRIC FUNCTIONS

A.V. Mikhailovich

Closed classes are considered of three-valued logic functions generated by symmetric functions taking values in the set {0, 1}. Criteria for existence of bases and for existence of finite generating systems are obtained for some classes generated by elementary periodic symmetric functions.

Keywords: multi-valued logic functions, closed classes, generating system, basis.