УДК 539.1:533.601:534

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ГИДРО-ГАЗОДИНАМИКЕ И АКУСТИКЕ

В.И. Ерофеев [1], А.И. Землянухин [2], О.С. Федорова [2]

[1] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2] Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

azemlyanukhin@mail.ru

Поступила в редакцию 30.11.2012

С использованием асимптотического метода многих масштабов выведено уравнение, моделирующее распространение нелинейных возмущений в упругости, газовой динамике и акустике. Проведен групповой анализ кубически нелинейного эволюционного уравнения, моделирующего распространение сдвиговых волн в сплошных средах.

Ключевые слова: волновая динамика, нелинейные волны, групповой анализ, асимптотические методы.

Выявление аналогий между различными областями естественно-научных дисциплин всегда было важным стимулом для получения новых знаний о природе. В настоящее время, когда «разделение труда» в научных исследованиях фактически является необходимым, роль аналогий еще более возрастает. Не является исключением механика сплошной среды, разделы которой развиваются, во многом, автономно.

Большое практическое значение имеют аналогии между задачами о кручении в теории упругости и гидродинамическими задачами о движении жидкости в трубах [1]. Кельвин заметил, что функция напряжений, используемая в задачах о кручении, совпадает с функцией тока для некоторого безвихревого движения идеальной жидкости в трубе того же поперечного сечения, что и скручиваемый стержень. Буссинеск показал, что дифференциальное уравнение и граничное условие для определения функции напряжений тождественно совпадают с теми, которые служат для определения скоростей в ламинарном потоке вязкой жидкости по трубе того же сечения, что и скручиваемый стержень. Гринхилл указал на то, что функция напряжений математически тождественна функции тока при движения идеальной жидкости, циркулирующей с постоянной интенсивностью вихря в трубе того же сечения, что и стержень.

Для получения простейшего нелинейного уравнения движения в теории упругости необходимо использовать выражение для упругой энергии изотропного тела в третьем приближении. Наиболее общий вид скалярного выражения, содержащего члены второй и третьей степеней по компонентам деформации, есть [2]

$$F = \mu\varepsilon_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\varepsilon_{ll}^2 + \frac{A}{3}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{il}\varepsilon_{kl} + $$
$$+ B\varepsilon_{ik}^2\varepsilon_{ll} + \frac{C}{3}\varepsilon_{ll}^3,$$

где μ, K – модули сдвига и сжатия; A, B, C – новые постоянные.

Уравнения движения записываются в виде

$$\rho_0 U_{tt} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

где ρ_0 – плотность недеформированного тела, а компоненты тензора напряжений σ_{ik} определяются как частные производные F по соответствующим компонентам деформаций, причем F записывается с желаемой точностью. Запишем, используя постоянные Ламе λ и μ, выражение для единственной ненулевой компоненты напряжений σ_x (одномерный случай):

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)U_x + (3/2\,\lambda + 3\mu + A + 3B + C)U_x^2.$$

Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$(\lambda + 2\mu)U_{xx} + (3\lambda + 6\mu + 2A)U_x U_{xx} +$$
$$+ (6B + 2C)U_x U_{xx} = \rho_0 U_{tt}$$

или $\alpha\, U_{xx} + \beta\, U_x U_{xx} = \gamma U_{tt}$. В безразмерных переменных последнее уравнение при помощи

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2013 «Математические модели и методы нелинейной динамики в задачах механики и экономики».

масштабных преобразований приводится к виду (1), когда $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Итак, рассмотрим безразмерное уравнение одномерной нелинейной динамической теории упругости

$$U_{tt} - U_{xx} - U_x U_{xx} = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению стационарного околозвукового течения газа [3]

$$V_{tt} + V_x V_{xx} = 0. \qquad (2)$$

В самом деле, если положить $V = -(V + x)$, то (1) точно переходит в (2).

Главным математическим достоинством уравнения стационарного околозвукового течения газа (2) является возможность его линеаризации методом годографа [4]. Метод годографа осуществляет преобразования, при которых зависимые и независимые переменные в рассматриваемом уравнении меняются ролями. Рассмотрим этот метод применительно к уравнению одномерной теории упругости (1).

Введем в рассмотрение деформацию $\phi = U_x$ и перепишем (1) в виде

$$\phi_{tt} - (\phi\phi_x + \phi_x)_x = 0. \qquad (3)$$

Для дальнейших преобразований удобно заменить уравнение (3) равносильной системой уравнений первого порядка

$$\phi_t = V_x,\ (\phi_x + 1)\phi_x = V_t. \qquad (4)$$

Считая x, t функциями ϕ и *V*, получим следующие дифференциальные операторы:

$$\partial_\phi = X_\phi \partial_X + t_\phi \partial_t,\ \partial_v = X_v \partial_x + t_v \partial_t. \qquad (5)$$

Якобиан D преобразования координат равен

$$D = x_\phi t_v + x_v t_\phi.$$

В соответствии с правилом Крамера из (5) сразу определяются операторы ∂_X и ∂_t:

$$\partial_X = D_1 D^{-1}, \quad \partial_t = D_2 D^{-1}, \qquad (6)$$

где $D_1 = t_v \partial_\phi - t_\phi \partial_v, D_2 = x_\phi \partial_v - x_v \partial_\phi$.

Действуя операторами (6) на систему (4), получаем новую систему уравнений

$$x_v = t_\phi,\ \ x_\phi = (\phi + 1)t_v. \qquad (7)$$

Из последней системы с использованием преобразования Лежандра $F_\phi = x, F_v = t$, получается линейное уравнение второго порядка для функции *F*:

$$(\phi + 1)F_{vv} - F_{\phi\phi} = 0\ . \qquad (8)$$

Заметим, что такому же уравнению удовлетворяет функция *T*.

Уравнение (8), называемое уравнением Трикоми, досконально изучено в газовой динамике. Это классическое уравнение смешанного типа. Принадлежность к области эллиптичности или гиперболичности определяется знаком выражения $(\phi + 1)$. Большинство прикладных задач теории упругости решено в предположении о малости деформаций U_x (малость $\phi, \phi \le 1$). В этом случае $\phi + 1$ всегда положительно, и уравнение (8) является строго гиперболическим.

При решении задач физически нелинейной теории упругости часто постулируется степенная зависимость между напряжениями и деформациями [5]. Например, в случае кубической зависимости ($\sigma = \varepsilon + k\varepsilon^3, k = const$), получается следующее одномерное уравнение движения в перемещениях

$$U_{tt} - U_{xx} - U_x^2 U_{xx} = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) также линеаризуется методом годографа. Вместо уравнения (8) здесь получается уравнение

$$(\phi^2 + 1)F_{vv} - F_{\phi\phi} = 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь линейную неоднородную теорию упругости. Будем считать упругие свойства среды переменными по пространственной координате: $G(x) = G_0 f(x),\ f(x)$ – некоторая функция, G_0 отождествляется с $\lambda + 2\mu$ или с μ для моделирования распространения соответственно продольных или сдвиговых волн. Тогда безразмерное уравнение движения будет иметь вид

$$[f(x)U_x]_x = U_{tt}. \qquad (11)$$

Заменим (11) равносильной системой уравнений первого порядка

$$f(x)U_x = W_t,\ U_t = W_x \qquad (12)$$

Второе уравнение системы (12) тождественно удовлетворяется, если положить

$$U = L_x, \quad W = L_t.$$

Тогда первое уравнение (12) принимает вид линейного уравнения второго порядка для функции *L*:

$$f(x)L_{xx} = L_{tt} \text{ или } g(x)L_{tt} = L_{xx}, \qquad (13)$$

где $g(x) = f(x)^{-1}$.

Уравнение (13) называют уравнением Чаплыгина. Оно часто встречается в задачах газовой динамики. Заметим, если $g(x) = 1 + x$ (неоднородность имеет вид $f(x) = (1 + x)^{-1}$), то (13) совпадает с уравнением (8), полученным из квадратичного варианта теории упругости. Выбор $g(x)$ в виде $g(x) = 1 + x^2$ (неоднородность вида $f(x)=(1+x^2)^{-1}$) приводит (13) к форме, совпадающей с (10), полученной для кубического варианта зависимости напряжений от деформаций. Неоднородности указанных выше видов часто встречаются в задачах теории упругости неоднородных тел [6]. Заметим, что уравнение (13) получено на физической плоскости, в то время как (8) и (10) соответствуют плоскости годографа.

Уравнение специальной нелинейной одномерной теории упругости имеет вид [7]:

$$[f(U)U_x]_x = U_{tt}, \tag{14}$$

где $f(U)$ – произвольная функция.

Уравнение (14) эквивалентно системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} f(U)U_x &= V_t, \\ U_t &= V_x. \end{aligned} \tag{15}$$

Стандартное преобразование Лежандра $U=L_x$, $V=L_t$ позволяет получить уравнение для функции L:

$$f(L_x)L_{xx} = L_{tt}. \tag{16}$$

Аналогия уравнения (16) с уравнениями (1) и (9) очевидна. Принимая f в виде $f(L_x)=1+\alpha L_x+\beta L_x^2, (\alpha,\beta\in R),$ получаем (1), (9) или их комбинацию.

Рассмотрим теперь простейший нелинейный вариант плоской динамической теории упругости. Исследуем случай, когда вектор перемещения лежит в плоскости xOy. Проанализируем эволюцию пучка продольных волн, распространяющегося вдоль оси x. Уравнения движения в перемещениях в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} &\rho U_{tt}-(\lambda+\mu)(U_{XX}+V_{XY})- \\ &-\mu(U_{XX}+U_{YY})-\alpha U_X U_{XX}=0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\rho V_{tt}-(\lambda+\mu)(V_{YY}+U_{XY})- \\ &-\mu(V_{XX}+V_{YY})=0, \end{aligned} \tag{18}$$

где ρ – плотность среды, α – коэффициент нелинейности, $\alpha=3\lambda+6\mu+2A+6B+2C$ (λ,μ – постоянные Ламе; A,B,C – константы Ландау). Для простоты в (17) удержано лишь нелинейное слагаемое, определяющее эффекты вдоль распространения пучка.

Введем в рассмотрение новые независимые переменные и разложения зависимых переменных по степеням малого параметра ε, характеризующего отношение максимальной амплитуды A перемещения U к длине волны l:

$$\xi = X-Ct,\ \ \eta=\varepsilon Y,\ \tau=\varepsilon t, \tag{19}$$

$$U=U_0+\varepsilon U_1+...,\ \ V=\varepsilon(V_0+\varepsilon V_1+...). \tag{20}$$

Выбранная асимптотика (19), (20) соответствует случаю, когда возмущение распространяется в постоянной скоростью C вдоль оси X, медленно изменяясь в направлении оси Y и во времени.

Введение тем или иным способом новых переменных (19), (20) является основой метода многих масштабов [8], используемого для вывода модельных уравнений. На этом этапе отделяются главные эффекты от второстепенных при волновом движении. Подставляя (19), (20) в (17), (18), получим в низшем по ε порядке

$$\rho C^2 U_{0\xi\xi}-(\lambda+2\mu)U_{0\xi\xi}=0, \tag{21}$$

$$(\rho C^2-\mu)V_{0\xi\xi}-\mu U_{0\xi\eta}=0. \tag{22}$$

Из (21) определяется скорость C, а из (22) – связь между сдвиговыми деформациями в пучке:

$$C^2=\left(\lambda+2\mu\right)/\rho, \tag{23}$$

$$U_{0\eta}=\frac{\lambda+\mu}{\mu}V_{0\xi}. \tag{24}$$

Из соотношения (23) видно, что возмущение распространяется со скоростью, равной скорости продольных волн в неограниченной упругой среде.

В первом нелинейном по ε приближении уравнение (17) имеет вид:

$$\begin{aligned} &(\rho C^2-\lambda-2\mu)U_{1\xi\xi}-(\lambda+\mu)V_{0\xi\eta}- \\ &-\mu U_{0\eta\eta}-\alpha U_{0\xi}U_{0\xi\xi}-2\rho C U_{0\xi\tau}=0. \end{aligned}$$

С использованием (23), (24) последнее уравнение запишется в виде:

$$U_{0\xi\tau}+\beta U_{0\xi}U_{0\xi\xi}+\gamma U_{0\eta\eta}=0, \tag{25}$$

где $\beta=\alpha/\left(2\rho C\right),\ \ \gamma=\mu/\left(\rho C\right)$.

Таким образом, на первом этапе применения метода многих масштабов определяются скорость возмущения и соотношения между деформациями в волновом пучке. На втором этапе полученная информация позволяет получить эволюционное уравнение для главного члена разложения искомой зависимой переменной. В этом специфика данного метода применительно к задачам волновой динамики.

Уравнение (25) совпадает с уравнением Линя – Рейснера – Тзяна [9], описывающим нестационарное околозвуковое течение газа.

С другой стороны, уравнение (25) эквивалентно уравнению Заболотской – Хохлова [10], описывающему распространение «узких пучков» в акустике:

$$UU_{XX}+U_X^2-U_{XY}+U_{ZZ}=0\,.$$

Пусть $U=\phi_X$. Тогда

$$(\phi_X\phi_{XX}-\phi_{XY})_X+\phi_{XZZ}=0.$$

Интегрируя последнее уравнение по x, получаем уравнение, совпадающее с (25).

Итак, в рассматриваемом приближении одно и то же уравнение (25) моделирует эволюцию слаборасходящегося пучка продольных волн в упругой среде, нестационарное околозвуковое течение газа и распространение «узких пучков» в акустике. Эта аналогия отражает внутреннее единство задач нелинейной механики.

Рассмотрим теперь кубически-нелинейное эволюционное уравнение

$$V_{0\tau\chi}+\alpha V_{0\tau}^2V_{0\tau\tau}+\beta V_{0\eta\eta}=0, \qquad (26)$$

которое было получено для квазиплоской сдвиговой волны в среде с наследственностью [11], а также для сдвиговой волны в физически нелинейной цилиндрической оболочке Кирхгофа–Лява [12]. Обычно при его анализе исходят из того, что в системах с кубической нелинейностью эффект самовоздействия часто преобладает над эффектом генерации высших гармоник. Это позволяет искать решение уравнения в виде одной гармоники с медленно меняющейся комплексной амплитудой (B):

$$V_0=B(\chi,\eta)\exp(-i\omega\tau)+\text{к.с.} \qquad (27)$$

Подстановка (27) в (26) позволяет получить для амплитуды B нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$-i\omega B_\chi+\beta B_{\eta\eta}-\alpha\omega^4|B|^2=0. \qquad (28)$$

Получаемые методом обратной задачи рассеяния солитонные решения уравнения (28) хорошо известны. Однако переход от (26) к (28) через представление (27) не является единственно возможным. В действительности волновой процесс сложнее, и для его качественного анализа здесь уместно использовать теоретико-групповые методы. Ниже будет найдена группа классических симметрий уравнения (26) и обсуждены его некоторые редукции. Масштабными преобразованиями (26) приводится к виду (29), когда $\alpha=\beta=1$. В дальнейшем будем работать с уравнением (26) в форме

$$V_{tX}+V_X^2V_{XX}+V_{YY}=0\,. \qquad (29)$$

Искомый инфинитезимальный оператор группы симметрий имеет следующий вид:

$$X=\tau(t,x,y.v)\partial_t+\xi(t,x,y,v)\partial_X+$$
$$+\eta(t,x,y,v)\partial_Y+\phi(t,x,y,v)\partial_V\,,$$

где τ,ξ,η,ϕ – коэффициенты векторного поля X, являющиеся функциями независимых и зависимой переменных. Для их отыскания можно воспользоваться инфинитезимальным критерием инвариантности [12]. Нужно подействовать на уравнение (29) дважды продолженным оператором X и, сгруппировав члены при одинаковых степенях V, потребовать их одновременного обращения в нуль. Эти сгруппированные члены обычно имеют вид линейных уравнений в частных производных не выше второго порядка и образуют так называемую «определяющую» систему. Описанная процедура характеризуется механическими, но чрезвычайно громоздкими вычислениями, поэтому здесь целесообразно воспользоваться одной из систем аналитических вычислений для генерирования определяющей системы и проинтегрировать ее.

Итак, определяющая система уравнений имеет вид:

$$\tau_X=\tau_Y=\tau_V=\tau_{tt}=0\,, \qquad (30)$$

$$\xi_t=\xi_V=\xi_{XX}=\xi_{Xt}=0\,, \qquad (31)$$

$$\eta_X=\eta_V=\eta_{tt}=0\,, \qquad (32)$$

$$\phi_X=\phi_{XY}=\phi_{YY}=0\,, \qquad (33)$$

$$\eta_t+2\xi_Y=0\,, \qquad (34)$$

$$2\eta_Y-\xi_X-\tau_t=0\,, \qquad (35)$$

$$2\phi_V-3\xi_X+\tau_t=0\,. \qquad (36)$$

Из (30) сразу следует линейность τ по t и независимость от остальных переменных. В соответствии с соотношениями (31), (32), (34), (35) ξ – линейна по x и y и не зависит от v и t, η – линейна по y и t и не зависит от x и v. Отсюда коэффициенты векторного поля X должны иметь следующий вид:

$$\tau=at+b\,,$$
$$\xi=cx+dy+e\,,$$
$$\eta=0.5(a+c)-2dt+f\,,$$
$$\phi=1.5(c-a)+g(t)y+h(t)\,,$$

где a, b, c, d, e, f – вещественные постоянные, $g(t)$, $h(t)$ – произвольные функции t. Таким образом, алгебра Ли операторов симметрии уравнения (29) восьмимерна и порождается операторами

$$X_1=\partial_t\,,\ X_2=\partial_X\,,\ X_3=\partial_Y\,,\ X_4=h(t)\partial_V\,,$$
$$X_5=g(t)y\partial_V\,,\ X_6=y\partial_X-2t\partial_Y\,,$$
$$X_7=t\partial_t+0.5y\partial_Y-0.5v\partial_V\,,$$
$$X_8=x\partial_X+0.5y\partial_Y+1.5v\partial_V\,.$$

Теперь, имея явный вид операторов симметрии, можно обсудить некоторые редукции уравнения (29).

Инвариантное решение на подгруппе $X_2 + X_3$ ищем в виде $V = V(t,z)$, $z = y + x$. В этом случае (29) принимает вид

$$V_{tZ} + V_Z^2 V_{ZZ} + V_{ZZ} = 0.$$

Вводя обозначение $V_Z = \phi^{1/2}$, получаем для ϕ уравнение

$$\phi_t + \phi_Z + \phi\phi_Z = 0. \quad (37)$$

При переходе к координатам $\tau = t$, $\xi = t - z$ уравнение (37) принимает вид уравнения волны Римана

$$\phi_\tau - \phi\phi_\xi = 0.$$

Единственным физическим эффектом волны Римана является ее опрокидывание. Для нас это означает, что при распространении сдвиговых волн в тонкостенных конструкциях возможно образование ударных волн деформации.

Инвариантное решение на подгруппе $X_1 + X_3$ будем искать в виде $V = V(x,z)$, $z = y + t$. Уравнение (29) принимает вид:

$$V_{XZ} + V_X^2 V_{XX} + V_{ZZ} = 0. \quad (38)$$

Введем новую переменную $\phi = V_X$ и перепишем (38):

$$(\phi_Z + \phi^2 \phi_X)_X + \phi_{ZZ} = 0.$$

Последнее уравнение представимо в виде равносильной системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \phi_Z + \phi^2 \phi_X = \psi_Z, \\ \phi_Z = -\psi_X. \end{cases} \quad (39)$$

Меняя в системе (39) местами зависимые и независимые переменные ($X = X(\phi,\psi)$, $Z = Z(\phi,\psi)$ – преобразование годографа), получаем систему

$$\begin{cases} -X_\psi + \phi^2 Z_\psi = X_\phi, \\ -X_\psi = Z_\phi. \end{cases} \quad (40)$$

Из (40) получается линейное уравнение

$$\phi^2 Z_{\psi\psi} + Z_{\psi\phi} + Z_{\phi\phi} = 0. \quad (41)$$

Уравнение (41) является гиперболическим, параболическим или эллиптическим в зависимости от знака дискриминанта Δ, который в данном случае равен

$$\Delta = 1/4 - \phi^2 = 1/4 - V_X^2.$$

Таким образом, при достижении безразмерной сдвиговой деформацией значения $1/2$, происходит смена типа уравнения. В отличие от околозвуковой газовой динамики, где подобные явления хорошо изучены, уравнения теории упругости, эллиптические в статических задачах и гиперболические в динамике, до сих пор практически не исследовались. По-видимому, только численный эксперимент позволит судить о том, что происходит с решением, когда сдвиговая деформация близка к $1/2$. Попутно заметим, что линеаризуемость уравнения (38) методом годографа равносильна его инвариантности относительно бесконечной группы Ли – Бэклунда, порожденной операторами

$$X = Z(V_X, V_Z)\partial_V + \ldots,$$

где Z – произвольное решение уравнения (41).

Рассмотрим теперь автомодельное решение, т.е инвариантное решение, построенное на группе $X_7 + X_8$. Соответствующий инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X_7 + X_8 = t\partial_t + x\partial_X + y\partial_Y + v\partial_V.$$

Решение в данном случае можно искать в виде

$$V = x\phi(\xi,\eta),\ \xi = x^{-1}y,\ \eta = x^{-1}t.$$

Уравнение (29) в новых переменных записывается в виде

$$\begin{aligned} &\phi_{\xi\xi} - \xi\phi_{\xi\eta} - \eta\phi_{\eta\eta} - \xi^2\phi_{\xi\xi}(\phi - \xi\phi_\xi - \eta\phi_\eta) - \\ &-\eta^2\phi_{\eta\eta}(\phi - \xi\phi_\xi - \eta\phi_\eta) - \\ &-2\xi\eta\phi_{\xi\eta}(\phi - \xi\phi_\xi - \eta\phi_\eta) = 0. \end{aligned}$$

Введя в рассмотрение формальный малый параметр ε, представим ϕ в виде разложения по степеням ε:

$$\phi = \varepsilon\phi_0 + \varepsilon^2\phi_1 + \ldots$$

В низшем по ε порядке возникает уравнение смешанного типа

$$\phi_{0\xi\xi} - \xi\phi_{0\xi\eta} - \eta\phi_{0\eta\eta} = 0.$$

Дискриминант Δ в данном случае равен

$$\Delta = \frac{\xi^2}{4} + \eta = \frac{x^{-2}y^2}{4} + x^{-1}t.$$

Поверхность параболичности, соответствующая $\Delta = 0$, описывается уравнением $y^2 + 4xt = 0$. Заметим, что таким же уравнением описывается единственный инвариант оператора симметрии X_6. В самом деле, $X_6 = y\partial_X - 2t\partial_Y$, и из интегрирования характеристической системы $dx/y = -dy/(2t)$ имеем $y^2 + 2xt = \text{const}$.

Проведенный анализ показал, что уравнение (29) допускает существование таких режимов, при которых возможно образование солитонов НУШ и ударных волн деформаций. Оценка влияния смены типа уравнений на волновой процесс является самостоятельной задачей для дальнейших исследований.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
3. Фалькович С.В. К теории сопла Лаваля // ПММ. 1964. № 10. С. 503–512.
4. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961. 208 с.
5. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961. 768 с.
6. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.
7. Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of solids $U_{tt} = [f(U)U_x]_x$ // Int. J. Non-linear Mech. 1981. V. 16, № 5/6. P 439–447.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М: Мир, 1972.
9. Тзян Х.Ш., Лин Ц.Ц., Рейснер Е. О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости // Газовая динамика. М., 1950. С. 181-196.
10. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журнал. 1960. Т. 15. Вып. 1. С. 40–46.
11. Потапов А.И., Солдатов И.Н. Квазиоптическое приближение для пучка сдвиговых волн в наследственной среде // Прикл. мех. и техн. физика. 1986. №1. С. 144–147.
12. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов. 1999. 157 с.
13. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

QUALITATIVELY INVESTIGATING EQUATIONS OF NONLINEAR WAVE DYNAMICS IN THE THEORY OF ELASTICITY, HYDRO-GAS DYNAMICS AND ACOUSTICS

V.I. Yerofeyev, A.I. Zemlyanuhin, O.S. Fedorova

Using the multi-scale asymptotic method, an equation modeling the propagation of nonlinear excitations in elasticity, gas dynamics and acoustics is derived. Square nonlinear evolution equation modeling the propagation of shear waves in continua is investigated using group analysis.

Key words: wave dynamics, nonlinear waves, group analysis, asymptotic methods.