УДК 330.4, 338.24, 517.929

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Л. Чадов[1,2], А.В. Семенов[3]

[1]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Пермь
[2] Автономная некоммерческая образовательная организации «Учебный центр «Прогноз», Пермь
[3] Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

alchadov20@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2012

Динамические модели, рассматриваемые в этой работе, содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для указанного класса систем даются постановки краевых задач о достижимости заданных значений показателей в форме, допускающей эффективное исследование с использованием современных компьютерных технологий. Исследуется разрешимость переопределенных краевых задач в случае, когда допускается приближенное выполнение краевых условий.

Ключевые слова: непрерывно-дискретные модели, гибридные модели, краевые задачи; вычислительный эксперимент.

Введение

Рассматриваются системы непрерывно-дискретных функционально-дифференциальных уравнений, которые являются конкретной реализацией так называемого абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ). Теория АФДУ систематически рассматривается в [1, 2]. Рассматриваемые системы часто возникают при математическом моделировании динамики экономических процессов и охватывают широкий класс динамических моделей с последействием (с интегро-дифференциальным или с сосредоточенным запаздыванием, дифференциально-разностные и разностные модели) и системы с импульсными воздействиями, приводящими к скачкообразному изменению траектории в заданные моменты времени [3–6].

Наиболее популярным в теоретических и прикладных исследованиях является класс моделей динамики с дискретным временем и постоянными параметрами (коэффициентами). В линейном случае такая модель имеет вид системы разностных уравнений:

$$z(t_i) = \sum_{j=1}^{i-1} B_j\, z(t_j) + \sum_{k=1}^{i} F_k\, u(t_k) + f(t_i), \qquad i = 0,1,\ldots,\mu, \tag{1}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu = T$, векторная переменная $z = \mathrm{col}(z_1,\ldots,z_n)$ (набор эндогенных переменных) описывает состояние моделируемой системы в моменты времени t_i; $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_r)$ – набор экзогенных (в том числе управляющих) переменных, предыстория всех переменных считается заданной:

$$z(\xi) = \varphi(\xi),\ \ u(\xi) = \psi(\xi)\text{, если } \xi < 0 .$$

Основная причина наибольшей распространенности моделей (1) – детально разработанная теория идентификации таких моделей – эконометрика. Модели вида (1) составляют основу инструментария информационно-аналитических систем (ИАС), разрабатываемых компанией «Прогноз» (г. Пермь) [5, с.60–164; 7].

Задача построения моделей с непрерывным временем при условии непрерывных наблюдений может решаться на основе идеи операторной интерполяции, высказанной Н.В. Азбелевым в 1988 г. Таким задачам в рамках функционально-дифференциальных моделей с последействием посвящен цикл работ С.Ю. Култышева и Л.М. Култышевой [8–10]. Отметим также новый подход к построению дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов, предлагаемый в работе [11].

Остановимся подробнее на проблеме синтеза моделей с дискретным временем и функционально-дифференциальных моделей с непрерывным временем. Один из основных аспектов этой проблемы – возможность использовать в полной мере отдельно полученные к настояще-

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.2013 «Математические модели и методы нелинейной динамики в задачах механики и экономики».

му времени теоретические результаты для функционально-дифференциальных моделей [1–3, 12–14] и для моделей в форме разностных уравнений [4, 15, 16]. Термин «гибридные» по отношению к системам уравнений и моделям используется достаточно широко и нередко в различных смыслах (см., напр.: [6, 17–20]). В нашем случае он кажется вполне уместным. Напомним, что «гибрид» (от лат. hibrida – помесь) – организм, полученный в результате скрещивания генетически различающихся родительских форм (видов, линий и др.)» [21]. Однако в целях предупреждения путаницы в терминологии представляется более удобным термин непрерывно-дискретная система. В завершении обсуждения терминологии отметим, что академик В.И. Арнольд предлагал называть такие системы «конкретными» (от англ. «concrete», полученного в результате сокращения «*con*(tinuous-dis)*crete*»).

Динамические модели, рассматриваемые в настоящей работе, с одной стороны, представляют собой конкретную реализацию абстрактных функционально-дифференциальных уравнений. С другой стороны, они охватывают широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последействия (запаздывания). Рассматриваемые модели содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для указанного класса систем исследуется разрешимость краевых задач, достижимость заданных значений показателей и приводятся условия разрешимости этих задач в форме, допускающей эффективное исследование с использованием современных компьютерных технологий.

1. Предварительные сведения о непрерывно-дискретных функционально-дифференциальных системах

Приведем основные сведения из теории непрерывно-дискретных функционально-дифференциальных (НДФД) уравнений [2, 12, 13, 22].

Определим банаховы пространства, в которых будем рассматривать НДФД систему.

Обозначим через $L^n = L^n[0,T]$ пространство суммируемых функций $v:[0,T]\to R^n$ с нормой $\| v\|_{L^n} = \int\limits_0^T |v(s)|_n ds$, где $|\cdot|_n$ – норма в R^n (далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать).

Зафиксируем отрезок $[0,T]\subset R$ и конечное множество точек $\{\tau_1,\ldots,\tau_m\}$, $0<\tau_1<\ldots<\tau_m<T$, и, следуя А.В. Анохину [23], введем пространство $DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных функций $y:[0,T]\to R^n$, представимых в виде

$$y(t) = \int_0^t v(s)ds + y(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[\tau_k,T]}(t)\Delta y(\tau_k),$$

где $v\in L^n$, $\Delta y(\tau_k) = y(\tau_k) - y(\tau_k - 0)$, $\chi_{[\tau_k,T]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[\tau_k,T]$.

Элементы пространства $DS^n(m)$ — это функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0,\tau_1),[\tau_1,\tau_2),\ldots,[\tau_m,T]$ и непрерывные справа в точках $\tau_1,\ldots,\tau_m$.

Если норма в $DS^n(m)$ определяется равенством

$$\| y\|_{DS^n(m)} = \|\dot y\|_{L^n} + |y(0)|_n + \sum_{k=1}^m |\Delta y(\tau_k)|_n,$$

то $DS^n(m)$ — банахово пространство.

Зафиксируем множество $J=\{t_0,t_1,\ldots,t_\mu\}$, $0<t_1<\ldots<t_\mu=T$. Через $FD^\nu(\mu)$ обозначим пространство функций $z:J\to R^\nu$ с нормой:

$$\| z\|_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} |z(t_i)|_\nu .$$

Рассмотрим непрерывно-дискретную функционально-дифференциальную систему [24, 25]:

$$\begin{aligned} \dot y &= \mathcal{T}_{11}y + \mathcal{T}_{12}z + f,\\ z &= \mathcal{T}_{21}y + \mathcal{T}_{22}z + g, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mathcal{T}_{11}: D^n \to L^n;$$
$$\mathcal{T}_{12}: FD^\nu(\mu) \to L^n;$$
$$\mathcal{T}_{21}: D^n \to FD^\nu(\mu);$$
$$\mathcal{T}_{22}: FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$$

– линейные ограниченные операторы:

$$(\mathcal{T}_{11}y)(t) = \int_0^t K^1(t,s)\dot y(s)ds + A_0^1(t)y(0) + \sum_{k=1}^m A_k^1(t)\Delta y(\tau_k),\ t\in[0,T].$$

Здесь элементы $k_{ij}^1(t,s)$ ядра $K^1(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s): 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$ и имеют общую, суммируемую на $[0,T]$, мажоранту: $\left|k_{ij}^1(t,s)\right|\leqslant \kappa(t)$ $i,j=1,\ldots,n,\ t\in[0,T]$, а $(n\times n)$-матрицы $A_0^1,\ldots,A_m^1$ имеют суммируемые на

$[0, T]$ элементы.

$$(\mathcal{T}_{22}z)(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} B_{ij}^2 z(t_j),\ i = 1,\dots,\mu,$$

где B_{ij}^2 — постоянные $(\nu \times \nu)$-матрицы;

$$(\mathcal{T}_{12}z)(t) = \sum_{\{j: t_j \leq t - \Delta_1\}} B_j^1(t) z(t_j),\ t \in [0,T],$$

где элементы матриц $B_j^1, j = 0,,\dots,\mu,$ суммируемы на $[0,T]$, $\Delta_1 \geq 0$;

$$(\mathcal{T}_{21}y)(t_i) = \int_0^{t_i - \Delta_2} K_i^2(s)\dot{y}(s)ds +$$

$$+ A_{10}^2 y(0) + \sum_{k=1}^{m} A_{ik}^2(t)\Delta y(\tau_k),\ i = 0,1,\dots,\mu,$$

где элементы матриц K_i^2 измеримы и ограничены в существенном на $[0,T]$, и A_{10}^2 – постоянные $(\nu \times n)$-матрицы, $i = 0,1,\dots,\mu,$ $\Delta_2 \geq 0$.

Операторы $\mathcal{T}_{12}$ и $\mathcal{T}_{21}$ будем называть связывающими операторами. Их присутствие в системе не позволяет разделить ее на две независимые подсистемы: систему, содержащую в себе только слагаемые с непрерывным временем, и систему со слагаемыми только с дискретным временем. Если бы этих операторов не было, то каждую из подсистем можно было бы рассматривать отдельно.

Известно [2, 12–17], что общее решение уравнения $\dot{y} = \mathcal{T}_{11}y$ может быть представлено в виде

$$y(t) = Y(t)\alpha + \int_0^t C_1(t,s) f(s)ds, \tag{3}$$

где $\alpha \in R^{n+mn}$ – произвольный вектор, $C_1(t,s)$ — матрица Коши [14, 26]. Эта матрица является решением матричного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}C_1(t,s) = \int_s^t K^1(t,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}C_1(\tau,s)d\tau +$$

$$+K^1(t,s),\quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$$

с условием $C_1(s,s) = E_n$.

Представление (3) позволяет свести исследование краевых задач и задач управления к исследованию систем линейных алгебраических уравнений.

Известно [4], что общее решение уравнения $z = \mathcal{T}_{22}z$ может быть представлено в виде

$$z(t_i) = Z(t_i)\beta + \left(C_2 g\right)(t_i),\quad i = 0,\dots,\mu, \tag{4}$$

где $\beta \in R^\nu$ – произвольный вектор, $C_2(i,j)$ – матрица Коши [4] разностного уравнения, которая определяется рекуррентными соотношениями

$$C_2(i,j) = E_\nu + \sum_{k=j}^{i-1} B_{ik}^2 C_2(k,j),\quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant \mu,$$

и дает представление решения уравнения $z = \mathcal{T}_{22}z$ при условии $z(t_0) = 0$:

$$z(t_i) = (C_2 g)(t) = \sum_{j=1}^{i} C_2(i,j) g(t_j),\ j = 1,\dots,\mu.$$

Здесь и далее будем считать, что $\sum_{i=k}^{l} F_i = 0$ для любых F_i, если $l < k$.

Применим представления (3) и (4) к первому и второму уравнениям системы (2) соответственно:

$$y = Y\alpha + C_1\mathcal{T}_{12}z + C_1 f,$$

$$z = Z\beta + C_2\mathcal{T}_{21}y + C_2 g,$$

или

$$\begin{pmatrix} I & -C_1\mathcal{T}_{12} \\ -C_2\mathcal{T}_{21} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где I – единичный оператор в соответствующем пространстве.

Для получения представления общего решения системы (2) и записи равенств, определяющих фундаментальную матрицу и оператор Коши системы (2), решим (5) относительно вектора $x = \operatorname{col}(y,z)$. Для этого воспользуемся следующей леммой [27].

Лемма. Пусть Δ_1 и Δ_2 в определении операторов $\mathcal{T}_{12}$ и $\mathcal{T}_{21}$ таковы, что

$$\Delta_1 + \Delta_2 \neq 0. \tag{6}$$

Тогда оператор

$$P = \begin{pmatrix} I & -C_1\mathcal{T}_{12} \\ -C_2\mathcal{T}_{21} & I \end{pmatrix} : D^n \times$$

$$\times FD^\nu(\mu) \to D^n \times FD^\nu(\mu)$$

обратим.

В дальнейшем будем предполагать, что условие (6) выполнено. Тогда из (5) получаем

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},$$

где

$$H_{11} = (I - C_1\mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21})^{-1};$$

$$H_{12} = -(I - C_1\mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21})^{-1}C_1\mathcal{T}_{12};$$

$$H_{21} = C_2\mathcal{T}_{21}(I - C_1\mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21})^{-1};$$

$$H_{22} = (I - C_2\mathcal{T}_{21}C_1\mathcal{T}_{12})^{-1}.$$

Таким образом, общее решение $x=\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}\in$ $\in D^n \times FD^\nu(\mu)$ системы (2) имеет вид:

$$x=\mathcal{X}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}+\mathcal{C}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

фундаментальная матрица $\mathcal{X}$ связана с фундаментальными матрицами Y и Z уравнений $\dot{y}=\mathcal{T}_{11}y$ и $z=\mathcal{T}_{22}y$ соответственно равенством

$$\mathcal{X}=\begin{pmatrix} H_{11}Y & H_{12}Z \\ H_{21}Y & H_{22}Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{11} & \mathcal{X}_{12} \\ \mathcal{X}_{21} & \mathcal{X}_{22} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Оператор Коши $\mathcal{C}$ выражается через операторы Коши C_1 и C_2 равенством

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix} H_{11}C_1 & H_{12}C_2 \\ H_{21}C_1 & H_{22}C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

2. Общая линейная краевая задача для непрерывно-дискретной функционально-дифференциальной системы

Общей линейной краевой задачей называется система (2) вместе с линейными ограничениями

$$\ell x=\ell\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\gamma,\ \gamma\in R^N, \qquad (10)$$

где $\ell: D^n\times FD^\nu(\mu)\to R^N$ – линейный ограниченный вектор-функционал, имеющий представление:

$$\ell\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\int_0^T \Phi(s)\dot{y}(s)ds+\Psi_0 y(0)+ \\ +\sum_{k=1}^{m}\Psi_k\Delta y(\tau_k)+\sum_{j=0}^{\mu}\Gamma_j z(t_j). \qquad (11)$$

Здесь Ψ_0 – постоянная $(N\times n)$-матрица; Γ_j, $j=0,1,\ldots,\mu$, – постоянные $(N\times\nu)$-матрицы; Φ – $(N\times n)$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,T]$ элементами. Предполагается, что компоненты $\ell_i: D^n\times FD^\nu(\mu)\to R$, $i=1,\ldots,N$, вектор-функционала $\ell=\mathrm{col}(\ell_1,\ldots,\ell_N)$ линейно независимы.

Сформулируем теорему о разрешимости краевой задачи [27]. При условии $N=n+mn+\nu$ краевая задача (2), (11) однозначно разрешима при любых f,g тогда и только тогда, когда $(N\times N)$-матрица $\ell\mathcal{X}=\left(\ell\mathcal{X}^1,\ldots,\ell\mathcal{X}^{n+mn+\nu}\right)$, где $\mathcal{X}^j$ – j-й столбец $\mathcal{X}$, невырождена, то есть

$$\det \ell\mathcal{X}\neq 0. \qquad (12)$$

3. Доказательный вычислительный эксперимент для проверки разрешимости краевых задач

Конструктивное исследование краевых задач сводится к исследованию специальных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), коэффициенты которых могут быть найдены только приближенно. Поэтому исследование разрешимости краевых задач требует использования специальной техники вычислений в рамках теории так называемого доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ) [2, 12, 13, 27, 29]. Как теоретические основы, так и практическая реализация ДВЭ требуют разработки специальных конструктивных методов, основанных на фундаментальных утверждениях общей теории и современном программном обеспечении. Основная задача таких методов – установить факт разрешимости задачи. Затем, если это удалось, требуется построить приближенное решение с гарантированной оценкой погрешности. ДВЭ, как инструмент исследования дифференциальных и интегральных моделей, активно разрабатывается в течение последних двадцати лет.

Существует несколько основных направлений исследования в этой области: изучение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и для некоторых классов уравнений в частных производных (УЧП) (H. Bauch, M. Berz, G. Corliss, Б.С. Добронец, E. Kaucher, W. Miranker); изучение краевых задач для ОДУ и УЧП (С.К. Годунов, Н.А. Ронто, А.М. Самойленко, M. Plum); изучение интегральных уравнений (С.А. Колмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев, R. Moor). Общая идея, лежащая в основе этих исследований, заключается в выполнении интервальных вычислений в конечномерных и функциональных пространствах и применении специальной техники округления в ходе вычислений. Мы используем иной подход, который позволяет рассматривать существенно более широкий класс задач, имеющих такие особенности, как нелокальность операторов, наличие разрывных решений, наличие оператора внутренней суперпозиции, краевые условия общего вида (см. [12, 29]). Кроме того, при таком подходе не используются интервальные вычисления, для которых характерен быстрый рост длины результирующего интервала. Вместо этого используется арифметика рациональных чисел со специальной техникой направленного округления.

Основная идея конструктивного подхода заключается в том, что для исходной задачи строится аппроксимирующая задача с точно известными параметрами, которые позволяют провести доказательную вычислительную проверку условий разрешимости.

Если аппроксимирующая задача разрешима, итоговый результат зависит от близости к ней исходной задачи. Тогда выполнение неравенства

$$\| \ell\mathcal{X} - \tilde{\ell}\tilde{\mathcal{X}} \| < 1/\| [\tilde{\ell}\tilde{\mathcal{X}}]^{-1} \| \tag{13}$$

для приближений $\tilde{\ell}$, $\tilde{\mathcal{X}}$ к ℓ, $\mathcal{X}$ означает, что матрица $\ell\mathcal{X}$ обратима.

Теоремы, лежащие в основе ДВЭ, допускают эффективную компьютерную проверку условий разрешимости исходной задачи. Если эти условия не выполняются, приходится строить новое, более точное приближение исходной задачи и снова проверять эти условия. Реализация конструктивных методов в виде компьютерной программы (разумеется, такая программа ориентирована на строго определенный класс задач) позволяет изучать конкретную задачу, многократно повторяя ДВЭ. Теоретическое обоснование и детали практической реализации ДВЭ для изучения функционально-дифференциальных систем представлены в [29]. Ясно, что ДВЭ подразумевает построение и достаточно точную аппроксимацию основных параметров СЛАУ с гарантированными оценками погрешностей. Эффективная доказательная (компьютерно-ориентированная) техника таких построений для определенных классов функционально-дифференциальных уравнений предложена в [30] (см. также [2]).

4. Иллюстрирующий пример

Приведем пример непрерывно-дискретной функционально-дифференциальной системы (2). Рассмотрим эколого-экономическую систему уравнений, описывающую динамику двух экономических показателей, влияющих друг на друга. Первое уравнение системы описывает динамику показателя в непрерывном времени на конечном промежутке. Вторая часть системы – уравнение с дискретным временем, часто возникающее в результате эконометрического моделирования. Оба уравнения дополняются связывающими операторами, описывающими взаимное влияние показателей в непрерывном и дискретном времени:

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = ay(t) + c\sum_{t_j \le t} z(t_j) + f(t), \quad t \in [0,T]; \\ &z(t_{i+1}) = by(t_i) + dz(t_i) + g(t_i), \quad i = 0,\ldots,\mu-1. \end{aligned} \tag{14}$$

Подчеркнем, что отражение специфики экономических показателей, моделируемых системой (14), проявляется, в том числе, в знаках коэффициентов a,b,c,d. Заметим также, что в более общем случае коэффициенты b и c могут зависеть от времени.

В нашем примере примем для параметров системы следующие значения: $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/3$, $d = -1/5$.

Зададим для системы (14) краевое условие

$$y(T) = 5, \ z(T) = 1. \tag{15}$$

Выберем горизонт планирования $T = 3$. Левые части краевых условий (14) могут быть представлены в виде общего линейного ограниченного вектор-функционала (11).

Для конструктивной проверки условий разрешимости краевой задачи (14), (15) нами разработана программа в среде Maple. С ее помощью проведена доказательная проверка условия (13) и установлен факт разрешимости краевой задачи (14),(15).

Заметим, что если бы условие (13) для данного приближения $\tilde{\ell}\tilde{\mathcal{X}}$ не было выполнено, то можно было бы построить более точное приближение. В [29] предложены алгоритмы, позволяющие итерационно строить все более точные приближения до тех пор, пока не будет доказана разрешимость задачи. Разумеется, даже такие алгоритмы не помогут в случае, когда задача действительно неразрешима. Такое возможно, например, для переопределенной краевой задачи, когда число краевых условий превышает размерность системы гибридных уравнений (сумму размерностей непрерывной компоненты $y(t)$ и дискретных компонент $z(t_i)$ системы).

При исследовании переопределенных краевых задач целесообразно использовать понятие эпсилон-приближенной разрешимости [31, 32], о которой пойдет речь в следующем параграфе.

5. Краевые задачи с приближенным выполнением краевых условий

Краевые задачи экономической динамики тесно связаны с реальными задачами экономики, в которых требуется дать ответ на вопрос о возможности достижения заданных значений некоторых целевых показателей развития экономической системы. При этом нередко число целевых условий, сформулированных на основе плановых или желаемых показателей, оказывается больше, чем это допускается математической теорией, требующей строгого согласования числа условий с размерностью соответствующей динамической модели.

Краевая задача с числом краевых условий, превышающим размерность пространства состояний системы без ограничений, называется переопределенной.

В этом случае краевая задача не может быть корректно разрешимой (т.е. всюду и однозначно разрешимой), необходимое и достаточное условие разрешимости такой задачи может быть записано как условие ортогональности правой части $\{f,\alpha\}$ пространству решений однородной сопряженной задачи [2, с. 11], ([13, с. 24]). Таким образом, свойство существования точного решения переопределенной задачи является «тонким» (не грубым) свойством, которое не может быть установлено в результате вычислительного эксперимента. Кроме того, в прикладных задачах, где краевая задача возникает как модель реальных изучаемых процессов, упомянутое тонкое свойство либо указывает на неадекватность модели, либо приводит к необходимости изменить постановку задачи. Подход к преодолению проблемы переопределенности, связанный с расширением основного пространства и обобщением понятия решения, был предложен в [23], его систематическое изложение можно найти в [12, 13, 33]. Конструктивная реализация этого подхода подробно описана в [6]. Здесь мы используем другой подход.

В основе другого подхода лежит понятие эпсилон-приближенной разрешимости краевых задач [31, 32]. Использование такого подхода оправдано в случае, когда допускается приближенное выполнение некоторых краевых условий. Приведем иллюстрирующий пример.

Пусть в краевую задачу (14), (15) добавлено дополнительное условие

$$y(1)+z(1)=1/2. \qquad (16)$$

Заметим, что для траектории системы (14), удовлетворяющей краевому условию (15) справедливо соотношение $y(1)+z(1)=1$, поэтому краевая задача (14)–(16) неразрешима, и в то же время, эпсилон-разрешима для $\varepsilon=\mathrm{col}(0,0,1/2)$. Очевидно, что векторов ε, для которых задача (14)–(16) эпсилон-разрешима, бесконечно много. Поэтому возникает задача поиска вектора ε, из множества эпсилон-разрешимости, оптимального в смысле некоторой нормы.

Список литературы

1. Azbelev N. V., Rakhmatullina L.F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1996. Vol. 8. P.1–102.

2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications Hindawi Publishing Corporation. New York – Cairo, 2007. 314 p.

3. Maksimov V.P. Theory of Functional Differential Equations and Some Problems in Economic Dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications Hindawi Publishing Corporation. New York; Cairo – 2006. P. 74–82.

4. Андрианов Д.Л. Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия вузов. Математика. 1993. №5. С.3–16.

5. Аналитика-капитал. Т. XI: Генезис информатики и аналитики в корпоративном и административном управлении / Под ред. Д.Л. Андрианова, С.Г. Тихомирова. М.: ВИНИТИ РАН, 2005. 350 с.

6. Максимов В.П., Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульского управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Известия вузов. Математика. 1993. №5. С.56–71.

7. Андрианов Д.Л. и др. Целевое управление процессами социально-экономического развития субъектов Российской Федерации: моделирование, информационное, математическое и инструментальное обеспечение / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2008. 240 с.

8. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. К вопросу об идентификации функционально–дифференциальных систем с последействием // Известия вузов. Математика. 1998. №3. С. 16–27.

9. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Об идентификации некоторых классов операторных моделей эволюционного типа // Известия вузов. Математика. 2004. №6. С. 30–40.

10. Култышев С. Ю., Култышева Л. М. Идентификация линейных стохастических моделей реальных объектов // Вестник Перм. гос. техн. ун-та. Прикладная математика и механика. 2008. №7. С. 114–119.

11. Смольяков Э.Р. Методы поиска дифференциальных уравнений произвольных динамических процессов // Дифференциальные уравнения. 2009. Вып. 45, № 12. С. 1704–1715.

12. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

13. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.

14. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2003. 306 с.

15. Максимов В.П. Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вест. Перм. ун-та. Экономика. 2009. № 1. С. 91–95.

16. Максимов В.П., Чадов А.Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной модели // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72–76.

17. Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л. Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вест. Перм. ун-та. Экономика. 2010.

№ 2. С. 45 50.

18. Андрианов Д.Л., Симонов П.М. Краевые задачи для нелинейных разностных уравнений // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2008. №4. С. 55–69.

19. Andrianov D.L. Difference equations and the elaboration of computer systems for monitoring and forecasting socioeconomic development of the country and territories // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Hindawi Publishing Corporation. New York–Cairo, 2006. P. 1231–1237.

20. Agranovich G.A. Some problems of discrete/continuous systems stabilization // Functional Differential Equations. 2003. Vol. 10, 1–2. P. 5–17.

21. Agranovich G.A. Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16, 1. P. 35–51.

22. Марченко В. М., Поддубная О.Н. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем с многими запаздываниями // Докл. РАН. 2005. Вып. 404б, № 4. С. 465–469.

23. Анохин А. В. О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1986. Вып. 286, № 5. С. 1037–1040.

24. Марченко В. М., Зачкевич З. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных импульсных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Вып. 45, № 12. С. 1775–1786.

25. Советский энциклопедический словарь. М.: Большая советская энциклопедия, 1982. 1600 с.

26. Максимов В.П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Вып. 13, №4. С.601–606, 770–771.

27. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вест. Перм. ун-та. Экономика. 2011. № 2. С. 13–23.

28. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional differentional equations. 2012. Vol. 19, 1–2. P.49–62.

29. Румянцев А.Н. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач / Перм. гос. ун-т. Пермь, 1999. 174 с.

30. Maksimov V.P., Rumyantsev A.N. Reliable computing experiment in the study of generalized controllability of linear functional differential systems // Mathematical modelling. Problems, methods, applications Ed. by L.Uvarova, A.Latyshev Kluwer Academic: Plenum Publishers. 2002. P.91–98.

31. Максимов В.П., Чадов А.Л. О конструктивном исследовании краевых задач с приближенным выполнением краевых условий // Известия вузов. Математика. 2010. № 10. С. 82–86.

32. Максимов В.П., Чадов А.Л. Краевые задачи экономической динамики с приближенным выполенением краевых условий. Конструктивное исследование // Вест. Перм. ун-та. Экономика. 2012. № 3. С. 12–17.

33. Максимов В.П. Арифметика рациональных чисел и компьютерное исследование интегральных уравнений // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 3. С. 121–126.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR CONTINUOUS AND DISCRETE FUNCTIONAL AND DIFFERENTIAL SYSTEMS

A.L. Chadov, A.V. Semenov

The dynamic models considered in this work, contain at the same time as the equations describing dynamics of indicators in continuous time on a final interval, and the equations with discrete time, characteristic for econometric models. For the specified class of systems statements of tasks as tasks about approachibility of preset values of indicators, in a form allowing effective research with use of modern computer technologies are given. Resolvability of the redefined of tasks in a case when approximate performance of boundary conditions is allowed is investigated.

Keywords: continuous and discrete models, hybrid models, boundary value problems, computing experiment.