

УДК 531/534:534.1

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ НАГРУЖЕННОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ШИНЫ

© 2013 г.

И.Ф. Кожевников

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

kogevnik@ccas.ru

Поступила в редакцию 10.12.2012

Исследуются малые колебания вращающейся с постоянной угловой скоростью ненагруженной и нагруженной шины в окрестности стационарного режима качения. За основу взята аналитическая модель армированной шины, предложенная ранее. Определяются собственные частоты (СЧ) и собственные формы колебаний. Для нагруженной шины увеличение угловой скорости вращения приводит к уменьшению собственных частот. Изучен эффект «взаимного разбегания» частот.

Ключевые слова: радиальная шина, аналитическая модель, вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, малые колебания, собственные частоты, собственные формы.

Введение

Малые колебания шин исследовались многими авторами. Явление прецессии стоячих волн в тонком упругом кольце, вращающемся с постоянной угловой скоростью, впервые было отмечено в работе [1]. Было показано, что если в кольце возбуждены стоячие волны, то на вращение кольца с постоянной угловой скоростью волна отвечает поворотом на некоторый другой угол, зависящий от номера собственной формы (СФ), относительно инерциального пространства. Инертные свойства упругих волн обсуждались в [2] при вращении нерастяжимого кольца с переменной угловой скоростью и в [3] при вращении осесимметричной оболочки с постоянной угловой скоростью. Колебания гибкого растяжимого вращающегося кольца рассматривались в [4] с учётом геометрической нелинейности. Влияние вращения на собственные частоты (СЧ) нагруженной шины изучались в [5] с использованием конечно-элементной модели армированной шины, состоящей из бандажа без протектора и двух боковых поверхностей. В частности, рассматривался эффект «взаимного разбегания» частот, вызванный аперiodичностью формы нагруженной шины. Модель армированной шины была предложена в работе [6]. В случае качения колеса без проскальзывания в заранее неизвестной зоне контакта была получена полная система уравнений движения. Был изучен стационарный режим качения по прямой с постоянной скоростью. В настоящей работе изучаются малые колебания ненагруженной и нагруженной шины, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Предложенная

модель использовалась при изучении малых колебаний невращающейся ненагруженной или нагруженной шины в окрестности положения равновесия [7].

1. Моделирование колеса с армированной шиной

Предположим, что колесо с армированной шиной состоит из диска 0, сочленённого с боковыми поверхностями шины 1, 2, и бандажа 3 (рис. 1а). Диск колеса представляется абсолютно твёрдым телом. Боковые поверхности шины представлены в недеформированном состоянии частями двух торов. Боковины обладают упругими свойствами, их материал описывается в рамках модели несжимаемой резины Муни-Ривлина [8]. Бандаж шины, армированный нерастяжимыми нитями (кордом), в недеформированном состоянии представлен круговым цилиндром радиусом r и высотой $2l$ (ширина бандажа).

Введём неподвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что шина контактирует по части бандажа с опорной плоскостью Ox_1x_2 , и подвижную систему координат $Sx_1x_2x_3$ с началом в центре масс диска точке C (рис. 1б). Обозначим через (X_1, X_2, X_3) координаты точки C в неподвижной системе координат. Положение бандажа определяется двумя углами поворотов β_0, θ относительно осей Ox_3 и Sx_2 соответственно. Радиус-вектор точки бандажа для фиксированных β_0 и θ

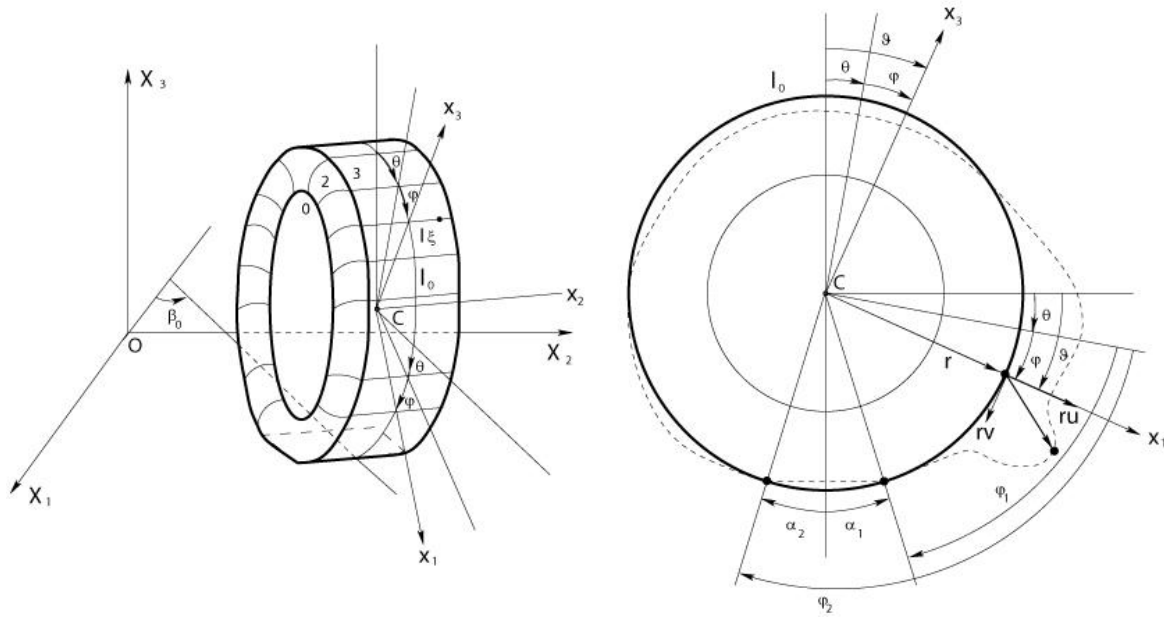


Рис. 1. Модель колеса с армированной шиной

определяется в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3(\phi, \xi, t) &= \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{l}_i + \Gamma_3(\beta_0) \Gamma_2(\vartheta) \times \\ &\times \left(r \mathbf{e}_1 + l \xi \mathbf{e}_2 + r \sum_{i=1}^3 U_i(\phi, \xi, t) \mathbf{e}_i \right), \\ &\phi \bmod 2\pi, \\ &\xi \in [-1; 1], \\ \Gamma_2(\vartheta) &= \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}, \\ \Gamma_3(\beta_0) &= \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & -\sin \beta_0 & 0 \\ \sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \theta + \phi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{l}_i, \mathbf{e}_i$ – орты осей OX_i и Cx_i соответственно; значение параметра $\xi = 1$ ($\xi = -1$) соответствует линии сопряжения бандажа и первой (второй) боковины, значение $\xi = 0$ соответствует срединной линии бандажа l_0 ; $rU_i(\phi, \xi, t)$ – компоненты вектора перемещения точки бандажа в подвижной цилиндрической системе координат. Деформации бандажа рассматриваются с учетом точных нелинейных условий нерастяжимости армирующих волокон [6]:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \xi} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \phi} \right| = 1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_3}{\partial \phi} = 0. \quad (1.2)$$

Из этих связей получаются формулы

$$U_1 = u(\phi, t), \quad U_2 = w(t), \quad U_3 = -v(\phi, t),$$

выражающие зависимость функций U_k от ра-

диальной ru , касательной rv и боковой rw компонент вектора перемещений

$$ru(\phi, t) \mathbf{e}_1 + rv(t) \mathbf{e}_2 - rw(\phi, t) \mathbf{e}_3$$

точек l_0 в подвижной системе координат $Cx_1x_2x_3$ (см. рис. 1б). Полученный результат выражает тот факт, что цилиндрическая поверхность при условии нерастяжимости и ортогональности волокон, соответствующих изменению координат ξ и ϕ , изометрична цилиндрической поверхности с образующей, заданной деформированной плоской срединной линией l_0 бандажа, и семейством ортогональных к ней прямых. Из уравнений (1.2) следует условие нерастяжимости l_0 :

$$\begin{aligned} 2Z_6 &= (1 + u + v')^2 + (v - u')^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(u + v') + (u + v')^2 + (v - u')^2 = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \phi}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \phi}.$$

Предполагалось [6], что площадка контакта шины с плоскостью OX_1X_2 представляется прямоугольником постоянной ширины $2l$, равной ширине бандажа, и переменной длины $r(\phi_2(t) - \phi_1(t))$, определяемой двумя функциями времени $\phi_1(t), \phi_2(t)$ (рис. 1б), которые заранее неизвестны и находятся из уравнений движения. При этом значения угла из промежутка $\phi \in L_1 = [\phi_1(t), \phi_2(t)]$ соответствуют зоне контакта, а значения из промежутка $\phi \in L_2 = [\phi_2(t), 2\pi + \phi_1(t)]$ соответствуют свободной поверхности шины. В зоне контакта L_1 спра-

ведлива голономная связь

$$\mathbf{r}_3 = -r \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{1}_1 + l \xi \mathbf{1}_2, \quad \phi \in L_1. \quad (1.4)$$

Не нарушая общности, примем соглашение о качении колеса вдоль оси OX_1 , когда срединная линия l_0 банджа совпадает с этой осью (угол $\beta_0 = 0$). Условия (1.1) и (1.4) позволяют определить перемещения точек l_0 в зоне контакта:

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\pi}{2} - \phi - \frac{X_1}{r} \right) \cos \vartheta + \frac{X_3}{r} \sin \vartheta - 1, \\ v &= - \left(\frac{\pi}{2} - \phi - \frac{X_1}{r} \right) \sin \vartheta + \frac{X_3}{r} \cos \vartheta, \\ w &= - \frac{X_2}{r}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Будем считать, что $X_2 = 0$ и, следовательно, согласно последнему соотношению (1.5) $w = 0$, т.е. центр масс диска не смещается в боковом направлении.

2. Уравнения движения

Спроектируем поле скоростей точек банджа $\dot{\mathbf{r}}_3$ на первую и третью оси неподвижной системы координат. Его проекции $(\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3)^T = \dot{\mathbf{r}}_3$ представляются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \dot{X}_1 - r\dot{\theta}[(1+u)\sin\vartheta + v\cos\vartheta] + \\ &\quad + r\dot{u}\cos\vartheta - r\dot{v}\sin\vartheta, \\ \dot{Z}_3 &= \dot{X}_3 - r\dot{\theta}[(1+u)\cos\vartheta - v\sin\vartheta] - \\ &\quad - r\dot{u}\sin\vartheta - r\dot{v}\cos\vartheta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть колесо катится без проскальзывания и без подпрыгивания. Это означает, что скорости точек l_0 в зоне контакта L_1 равны нулю, т.е. $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_3 = 0$. Возможные перемещения удовлетворяют равенствам $\delta Z_1 = \delta Z_3 = 0$, полученным из (2.1) путём замены производных по времени на вариации соответствующих функций.

Уравнения движения, описывающие поведение механической системы, и условия на границе заранее неизвестной зоны контакта были получены [6] из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского для неконсервативных систем

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A) dt = 0.$$

Кинетическая энергия колеса T складывается из кинетической энергии диска и кинетической энергии шины в предположении, что вся масса шины равномерно распределена по l_0 с линейной плотностью ρ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_d (\dot{X}_1^2 + \dot{X}_3^2) + \frac{1}{2} J_{2d} \dot{\theta}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho r \int_0^{2\pi} (\dot{Z}_1^2 + \dot{Z}_3^2) d\phi, \end{aligned}$$

где m_d и J_{2d} – масса и момент инерции диска относительно оси Cx_2 . Работа сил δA на возможных перемещениях имеет следующую структуру

$$\delta A = \delta A_F + \delta A_P + \delta N_1 + \delta N_3 + \delta N_6.$$

Здесь δA_F – работа продольной силы F_1 , вертикальной нагрузки P и крутящего момента M_2 , приложенных к диску колеса,

$$\delta A_F = F_1 \delta X_1 - P \delta X_3 + M_2 \delta \theta.$$

δA_P – работа потенциальных сил, состоящая из работы давления на возможных перемещениях и вариации потенциальной энергии растяжения резины согласно модели Муни–Ривлина при деформациях боковых поверхностей шины и банджа,

$$\begin{aligned} \delta A_P &= - \int_0^{2\pi} \left[n_0 \delta u + n_{01} \delta u^2 / 2 + n_{11} \delta u'^2 / 2 + \right. \\ &\quad \left. + n_{02} \delta v^2 / 2 + n_{12} \delta v'^2 / 2 + m_{21} v' \delta u + \right. \\ &\quad \left. + m_{12} u' \delta v + m_{20} v \delta u' + m_{02} u \delta v' \right] d\phi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Замечание 1. Постоянные коэффициенты n_0 , n_{01} , n_{11} , n_{02} , n_{12} , m_{21} , m_{12} , m_{20} , m_{02} определяются аналитически в элементарных функциях в результате вычислений определенных интегралов (интегрирование проводится по боковинам и банджу шины) и зависят от геометрических параметров шины и величины внутреннего давления в шине p (выражения для коэффициентов не приводятся ввиду их громоздкости). Обычно при феноменологическом подходе коэффициенты неизвестны и определяются из эксперимента.

δN_1 , δN_3 , δN_6 – работа реакций связей:

$$\begin{aligned} \delta N_1 &= \int_{L_1} \mu_1(\phi, t) \delta Z_1 d\phi + \mu_{11} \delta Z_{11} + \mu_{12} \delta Z_{12}, \\ \delta N_3 &= \int_{L_1} \mu_3(\phi, t) \delta Z_3 d\phi, \\ \delta N_6 &= \int_{L_2} \lambda(\phi, t) \delta Z_6 d\phi. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Неопределённый множитель Лагранжа

$\mu_4 = \mu_4(\phi, t)$ описывает продольную компоненту реакции, а $\mu_{11}, \mu_{12}, \delta Z_{11}, \delta Z_{12}$ – продольные компоненты реакций связей и возможные перемещения в граничных точках (при $\phi = \phi_1, \phi = \phi_2$) зоны контакта. Множитель Лагранжа $\mu_3 = \mu_3(\phi, t)$ представляет собой нормальную компоненту реакции связей, приведённую к единице длины бандажа в зоне контакта. Во втором соотношении в (2.3) отсутствуют члены, содержащие μ_{31}, μ_{32} , так как предполагается, что в граничных точках зоны контакта составляющие реакций связей по оси OX_3 равны нулю. Множитель Лагранжа $\lambda = \lambda(\phi, t)$ определяет натяжение l_0 ; Z_6 было определено в (1.3).

Полная система четырнадцати уравнений относительно четырнадцати неизвестных имеет следующую структуру: три уравнения Лагранжа второго рода с неопределёнными множителями Лагранжа (особенность этих уравнений – наличие интегральных членов от функций u, v и их производных)

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \nabla_{x_1} T + F_1 + \int_{L_1} \mu_1 d\phi + \mu_{11} + \mu_{12} &= 0, \\ -\frac{d}{dt} \nabla_{x_3} T - P + \int_{L_1} \mu_3 d\phi &= 0, \\ \nabla_{\theta} T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\theta}} T + M_2 + & \\ + \int_{L_1} \left(\mu_1 \frac{\partial \dot{Z}_1}{\partial \dot{\theta}} + \mu_3 \frac{\partial \dot{Z}_3}{\partial \dot{\theta}} \right) d\phi + & \\ + \mu_{11} \frac{\partial \dot{Z}_{11}}{\partial \dot{\theta}} + \mu_{12} \frac{\partial \dot{Z}_{12}}{\partial \dot{\theta}} &= 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

четыре уравнения движения в частных производных

$$\begin{aligned} N_1(u, v) + \mu_1 r \cos \vartheta - \mu_3 r \sin \vartheta &= 0, \\ N_2(u, v) - \mu_1 r \sin \vartheta - \mu_3 r \cos \vartheta &= 0, \phi \in L_1, \\ \nabla_u T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{u}} T + N_1(u, v) + & \\ + \lambda(1 + u + v') - [\lambda(u' - v)]' &= 0, \phi \in L_2, \\ \nabla_v T - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{v}} T + N_2(u, v) - & \\ - [\lambda(1 + u + v')] - \lambda(u' - v) &= 0, \phi \in L_2, \\ N_1(u, v) = -n_0 - n_{01}u + n_{11}u'' - (m_{21} - m_{20})v' & \\ N_2(u, v) = -n_{02}v + n_{12}v'' - (m_{12} - m_{02})u' & \end{aligned} \quad (2.5)$$

три уравнения связей: (1.3) для $\phi \in L_2$ и первые два уравнения из (1.5) для $\phi \in L_1$, и четыре

условия, налагаемые на скачки функций в концевых точках зоны контакта (динамические граничные условия)

$$\begin{aligned} \rho r^3 [\dot{u}]_k \dot{\phi}_k - (-1)^k [\lambda(u' - v)]_{l(k)} + n_{11} [u']_k + & \\ + r \mu_{1k} \cos \vartheta_k = 0, \quad \vartheta_k = \theta + \phi_k, & \\ \rho r^3 [\dot{v}]_k \dot{\phi}_k - (-1)^k [\lambda(1 + u + v')]_{l(k)} + & \\ + n_{12} [v']_k - r \mu_{1k} \sin \vartheta_k = 0, \quad k = 1, 2. & \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $[h(\vartheta)]_k = h(\vartheta_k + 0) - h(\vartheta_k - 0)$ – скачок функции в концевой точке зоны контакта. Индекс $l(k)$ понимается следующим образом:

$$[h(\vartheta)]_{l(1)} = h(\vartheta_1 - 0), [h(\vartheta)]_{l(2)} = h(\vartheta_2 + 0).$$

Замечание 2. При определении функций u, v следует также учитывать условия их непрерывности в граничных точках зоны контакта (кинематические граничные условия) $[u]_k = [v]_k = 0, k = 1, 2$, вытекающие из условия существования функционала потенциальной энергии давления.

3. Ненагруженная вращающаяся шина

Пусть колесо не нагружено и вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Тогда

$$X_1 = \text{const}, \quad X_3 = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \Omega.$$

Уравнения движения (третье и четвёртое уравнения системы (2.5)) и условие нерастяжимости l_0 (1.3) имеют вид

$$\begin{aligned} -\rho r^3 (\ddot{u} - \Omega^2(1 + u) - 2\Omega \dot{v}) + n_{11}u'' - n_{01}u + & \\ + (m_{20} - m_{21})v' - n_0 + \lambda(1 + u + v') - [\lambda(u' - v)]' &= 0 \\ -\rho r^3 (\ddot{v} - \Omega^2v + 2\Omega \dot{u}) + (m_{02} - m_{12})u' + & \\ + n_{12}v'' - n_{02}v - [\lambda(1 + u + v')] - \lambda(u' - v) &= 0, \\ 2(u + v') + (u + v')^2 + (v - u')^2 = 0 &\Rightarrow u \cong -v'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В случае ненагруженной шины граничные условия для функций $u(\phi, t), v(\phi, t), \lambda(\phi, t)$ переходят в условия периодичности этих функций:

$$u(0) = u(2\pi), \quad v(0) = v(2\pi), \quad \lambda(0) = \lambda(2\pi)$$

Представим множитель Лагранжа в виде

$$\lambda(\phi, t) = n_0 - g_0 + \lambda_1(\phi, t), \quad g_0 = \rho r^3 \Omega^2,$$

где λ_1 – величина первого порядка малости. Заметим, что натяжение вращающегося бандажа увеличивается (по сравнению со статическим случаем) за счёт центробежных сил инерции, добавляемых к внутреннему давлению. Взяв производную от обеих частей первого уравнения (3.1) и складывая его со вторым, используя линеаризованное условие нерастяжимости l_0 , приходим к уравнению относительно функции $v(\phi, t)$ и условию её

периодичности:

$$\begin{aligned} \rho r^3 \ddot{v}'' + 4\rho r^3 \Omega \dot{v}' - \rho r^3 \ddot{v} + (a_0 - g_0)v^{(4)} + \\ + (a_1 - 3g_0)v'' + a_2 v = 0, \quad v(0) = v(2\pi), \quad (3.2) \\ a_0 = n_0 - n_{11}, \quad a_1 = 2n_0 + n_{01} + n_{12} + \\ + m_{20} - m_{21} - m_{02} + m_{12}, \quad a_2 = n_0 - n_{02}. \end{aligned}$$

Собственные колебания шины, описываемые уравнением (3.2), найдём в виде

$$v = e^{i\omega\phi} X(\phi), \quad u = -v' = -e^{i\omega\phi} X'(\phi),$$

где ω – циклическая частота. Тогда

$$\begin{aligned} (a_0 - g_0)X^{(4)} + (a_1 - 3g_0 - \rho r^3 \omega^2)X'' + \\ + 4\rho r^3 \Omega \omega X' + (a_2 + \rho r^3 \omega^2)X = 0. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения представим в форме

$$X(\phi) = G_1 e^{p_1 \phi} + G_2 e^{p_2 \phi} + G_3 e^{p_3 \phi} + G_4 e^{p_4 \phi}, \quad (3.3)$$

где $p_j, j=1, \dots, 4$, – корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned} (a_0 - g_0)p^4 + (a_1 - 3g_0 - \rho r^3 \omega^2)p^2 + \\ + 4\rho r^3 \Omega \omega ip + (a_2 + \rho r^3 \omega^2) = 0. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Так как функция $X(\phi)$ должна быть 2π -периодической, в соотношении (3.3) следует оставить только экспоненты с чисто мнимыми показателями, т.е. $p = in$, $n \in Z$. Характеристическое уравнение (3.4) представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(\omega) = A(n^2)\omega^2 + B(n, \Omega)\omega + C(n^2, \Omega^2) = 0, \\ A(n^2) = \rho r^3(1+n^2), \quad B(n, \Omega) = -4\rho r^3 n \Omega, \quad (3.5) \\ C(n^2, \Omega^2) = (a_0 - g_0)n^4 - (a_1 - 3g_0)n^2 + a_2. \end{aligned}$$

Бесконечный спектр частот находится аналитически из характеристического уравнения (3.5). Таким образом, СЧ ненагруженной вращающейся шины ω_n выражаются через СЧ ненагруженной невращающейся шины ω_n^0

$$\begin{aligned} \omega_n = \frac{2n}{1+n^2} \Omega \pm \sqrt{\left(\omega_n^0\right)^2 + \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2} \Omega^2}, \quad (3.6) \\ \omega_n^0 = \pm \sqrt{\frac{-a_0 n^4 + a_1 n^2 - a_2}{\rho r^3(1+n^2)}}, \quad n \in Z, \end{aligned}$$

что совпадает с результатами работ [9, 10], где шина моделировалась нерастяжимым кольцом.

График зависимости СЧ $\nu_n = \omega_n / (2\pi)$ от угловой скорости вращения колеса представлен на рис. 2а для Входных I¹ (табл.).

¹ 205 / 55R16 : первое число означает ширину профиля, т.е. выраженное в миллиметрах линейное расстояние между наружными сторонами боковин накачанной шины; второе число означает отношение высоты профиля к его ширине, выраженное в процентах; буква R означает радиальную (RADIAL) конструкцию шины; третье число соответствует диаметру диска в дюймах.

Таблица 1

Входные данные модели

	Размер шины	m (кг)	p (МПа)
Входные I	205 / 55R16	9.37	0.25
Входные II	205 / 60R15	8.5	0.16

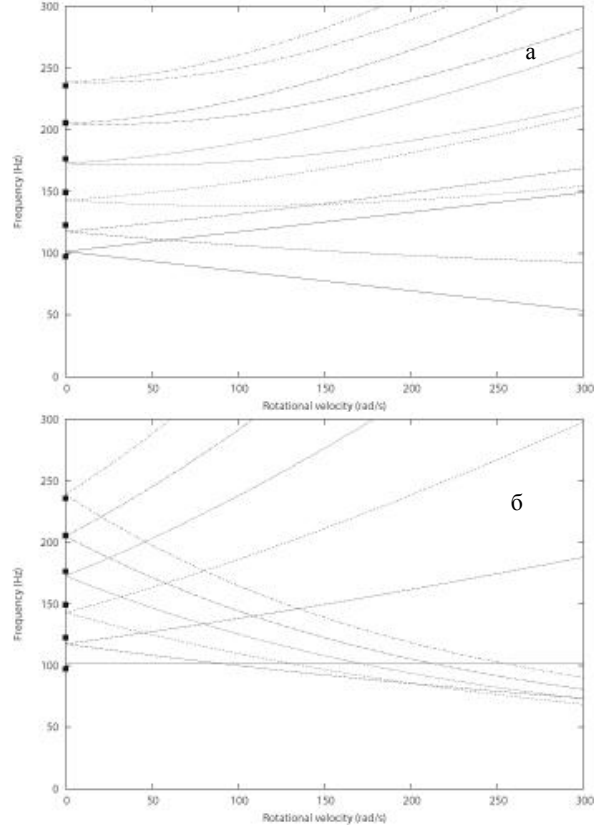


Рис. 2. СЧ ненагруженной вращающейся шины (Входные I), как функции угловой скорости вращения: (а) лагранжево описание, (б) эйлерово описание.

Экспериментальные СЧ [11], соответствующие ненагруженной невращающейся шине, нанесены в виде чёрных квадратов. На оси ординат из каждой точки, соответствующей СЧ ненагруженной невращающейся шины, выходит две ветви (для верхней ветви $\omega_n > 0$, для нижней ветви $\omega_{-n} > 0$, где $n > 0$), т.е. каждой СЧ невращающейся шины соответствуют две СЧ вращающейся шины. Заметим, что если $n = 1$, то верхней ветви соответствует $\omega_1 = \Omega + \omega_1^0$, а нижней – $\omega_{-1} = -\Omega + \omega_1^0$. При этом ω_{-1} обращается в ноль при $\Omega = \omega_1^0 = 2\pi\nu_1 = 637.74$ рад·с⁻¹.

Если перейти от переменной ϕ к переменной $\alpha = \phi + \Omega t - \pi/2$, что означает переход от лагранжева описания к эйлерову, то вместо характеристического уравнения (3.4) следует использовать уравнение (4.3) (в этом мы убедимся

в дальнейшем). В этом случае бесконечный спектр СЧ представляется в виде

$$\omega_n = \frac{-n(n^2 - 1)}{1 + n^2} \Omega \pm \sqrt{\left(\omega_n^0\right)^2 + \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2} \Omega^2}, n \in Z.$$

График зависимости СЧ от угловой скорости вращения колеса представлен на рис. 2б. Для верхней ветви $\omega_{-n} > 0$, для нижней ветви $\omega_n > 0$, где $n > 0$. Заметим, что если $n = 1$, то $\omega_1^2 = \left(\omega_1^0\right)^2$ и не зависит от угловой скорости вращения колеса. Ни одна из частот не обращается в ноль, что согласуется с работой [12], где изучались свободные нелинейные колебания тонкого вращающегося кольца, и с работой [13], где с помощью теоретических и экспериментальных исследований было установлено, что для плоских изгибных колебаний вращающегося кольца ни одна из частот не обращается в ноль во всем диапазоне угловых скоростей вращения.

4. Нагруженная вращающаяся шина

Рассмотрим задачу о малых колебаниях шины в окрестности стационарного режима качения без проскальзывания с постоянной угловой скоростью. Стационарный режим качения нагруженной шины был изучен в работе [6]. Предположим, что

$$\dot{X}_1 = r\Omega, \quad X_3 = \text{const}, \quad \dot{\theta} = \Omega.$$

Перейдём от переменной ϕ к переменной $\alpha = \phi + \Omega t - \pi/2$, то есть от лагранжева описания к эйлерову. Представим функции, определяющие деформации срединной линии бандажа, функции, определяющие зону контакта, и множители Лагранжа в следующем виде:

$$u(\phi, t) = U(\alpha) + U_{\text{vib}}(\alpha, t),$$

$$v(\phi, t) = V(\alpha) + V_{\text{vib}}(\alpha, t),$$

$$\lambda(\phi, t) = \lambda^\circ(\alpha) + \lambda_{\text{vib}}(\alpha, t),$$

$$\mu_{1k}(t) = \mu_{1k}^\circ + \mu_{\text{vib}1k}(t),$$

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^\circ + \alpha_{\text{vib}k}(t),$$

$$\alpha_k^\circ = \phi_k^\circ(t) + \Omega t - \frac{\pi}{2} = \text{const},$$

$$\dot{\phi}_k^\circ(t) = -\Omega.$$

Границы зоны контакта теперь описываются двумя функциями $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ (см. рис. 1б), которые заранее неизвестны. Учтём правила дифференцирования

$$\dot{u}(\phi, t) = U'(\alpha)\Omega + U'_{\text{vib}}(\alpha, t)\Omega + \dot{U}_{\text{vib}}(\alpha, t)$$

$$\ddot{u}(\phi, t) = U''(\alpha)\Omega^2 + U''_{\text{vib}}(\alpha, t)\Omega^2 +$$

$$+ 2\dot{U}'_{\text{vib}}(\alpha, t)\Omega + \ddot{U}_{\text{vib}}(\alpha, t),$$

$$\cdot = \frac{\partial}{\partial t}, \quad ' = \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Тогда решение, описывающее стационарный режим качения $U(\alpha)$, $V(\alpha)$, $\lambda^\circ(\alpha)$, μ_{1k}° , α_k° и удовлетворяющее уравнениям и граничным условиям, находится [6] из следующей системы:

$$\begin{aligned} g_0(1 + U - U'' + 2V') - n_0 - n_{01}U + n_{11}U'' - \\ -(m_{21} - m_{20})V' + \lambda^\circ - [\lambda^\circ(U' - V)]' = 0, \\ g_0(V - V'' - 2U') - n_{02}V + n_{12}V'' - \\ -(m_{12} - m_{02})U' - (\lambda^\circ)' - \lambda^\circ(U' - V) = 0, \\ 2(U + V') + (U + V'')^2 + (V - U')^2 = 0 \Rightarrow U = -V', \\ g_0[U']_k + (-1)^k [\lambda^\circ(U' - V)]_{l(k)} - \\ -n_{11}[U']_k + r\mu_{1k}^\circ \alpha_k^\circ = 0, \\ g_0[V']_k + (-1)^k [\lambda^\circ]_{l(k)} - n_{12}[V']_k + r\mu_{1k}^\circ = 0, \\ [U]_k = [V]_k = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda^\circ = n_0 - g_0 + \lambda_1^\circ$, где λ_1° – член первого порядка малости. Переменные $U_{\text{vib}}, V_{\text{vib}}$, определяющие малые колебания шины в окрестности стационарного режима, удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} -2\rho r^3 \Omega \dot{U}'_{\text{vib}} + 2\rho r^3 \Omega \dot{V}'_{\text{vib}} - \rho r^3 \ddot{U}_{\text{vib}} + \\ + g_0(U_{\text{vib}} + V'_{\text{vib}}) + (n_{11} - n_0)U''_{\text{vib}} - \\ -n_{01}U_{\text{vib}} + (m_{20} - m_{21} + n_0)V'_{\text{vib}} + \lambda_{\text{vib}} = 0, \\ -2\rho r^3 \Omega \dot{V}'_{\text{vib}} - 2\rho r^3 \Omega \dot{U}'_{\text{vib}} - \rho r^3 \ddot{V}_{\text{vib}} - \\ -g_0(V''_{\text{vib}} + U'_{\text{vib}}) + (m_{02} - m_{12} - n_0)U'_{\text{vib}} + \\ + n_{12}V''_{\text{vib}} + (n_0 - n_{02})V_{\text{vib}} - \lambda'_{\text{vib}} = 0, \\ 2(U_{\text{vib}} + V'_{\text{vib}}) + (U_{\text{vib}} + V'_{\text{vib}})^2 + \\ + (V_{\text{vib}} - U'_{\text{vib}})^2 = 0 \Rightarrow U_{\text{vib}} = -V'_{\text{vib}}, \\ (-1)^k [\rho r^3 \Omega \dot{U}'_{\text{vib}} - (n_0 - g_0)V_{\text{vib}} + \\ + (n_0 - n_{11})U'_{\text{vib}}]_{l(k)} + r\mu_{1k}^\circ \alpha_{\text{vib}k} = 0, \\ (-1)^k [\rho r^3 \Omega \dot{V}'_{\text{vib}} - (n_{12} - g_0)V'_{\text{vib}} + \\ + \lambda_{\text{vib}}]_{l(k)} + r\mu_{\text{vib}1k} = 0, \\ [U_{\text{vib}}]_k = [V_{\text{vib}}]_k = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Необходимо учитывать, что множители Лагранжа λ_{vib} , $\mu_{\text{vib}1k}$, а также $\alpha_{\text{vib}k}$, имеют первый порядок малости. Также было использовано свойство $[U'_{\text{vib}}]_k = (-1)^k [U'_{\text{vib}}]_{l(k)}$, связанное с тем, что функции, определяющие малые колебания в зоне контакта, равны нулю. Взяв производную от обеих частей первого

уравнения и складывая его со вторым, используя линейризованное условие нерастяжимости l_0 , получим уравнение и граничные условия:

$$\begin{aligned} & \rho r^3 \ddot{V}_{\text{vib}}'' - \rho r^3 \ddot{V}_{\text{vib}} + 2\rho r^3 \Omega \dot{V}_{\text{vib}}^{(3)} + \\ & + 2\rho r^3 \Omega \dot{V}_{\text{vib}}' + a_0 V_{\text{vib}}^{(4)} + a_1 V_{\text{vib}}'' + a_2 V_{\text{vib}} = 0, \\ & V_{\text{vib}}(\alpha_1^\circ + 2\pi + \alpha_{\text{vib}1}) = 0, V_{\text{vib}}'(\alpha_1^\circ + 2\pi + \alpha_{\text{vib}1}) = 0, \\ & V_{\text{vib}}(\alpha_2^\circ + \alpha_{\text{vib}2}) = 0, V_{\text{vib}}'(\alpha_2^\circ + \alpha_{\text{vib}2}) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из динамических граничных условий (четвёртое соотношение в (4.1)) можно определить $\alpha_{\text{vib}k}$:

$$\alpha_{\text{vib}k} = \frac{(-1)^k}{r\mu_{1k}^\circ} (n_0 - n_{11}) [V_{\text{vib}}'']_{l(k)}.$$

Таким образом, границы зоны контакта колеблются на той же частоте, что и функция V_{vib}'' . Однако при определении частоты колебаний шины величину зоны контакта можно принять постоянной, поскольку её изменение определяет поправки в частоту второго порядка малости в рамках принятой модели. Таким образом, граничные условия в задаче (4.2) эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} & V_{\text{vib}}(\alpha_1^\circ + 2\pi) + V_{\text{vib}}'(\alpha_1^\circ + 2\pi)\alpha_{\text{vib}1} \approx \\ & \approx V_{\text{vib}}(\alpha_1^\circ + 2\pi) = 0, \\ & V_{\text{vib}}(\alpha_2^\circ) + V_{\text{vib}}'(\alpha_2^\circ)\alpha_{\text{vib}2} \approx V_{\text{vib}}(\alpha_2^\circ) = 0, \\ & V_{\text{vib}}'(\alpha_1^\circ + 2\pi) + V_{\text{vib}}''(\alpha_1^\circ + 2\pi)\alpha_{\text{vib}1} \approx \\ & \approx V_{\text{vib}}'(\alpha_1^\circ + 2\pi) = 0, \\ & V_{\text{vib}}'(\alpha_2^\circ) + V_{\text{vib}}''(\alpha_2^\circ)\alpha_{\text{vib}2} \approx V_{\text{vib}}'(\alpha_2^\circ) = 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем для простоты будем писать α_k вместо α_k° .

Множители Лагранжа λ_{vib} , $\mu_{\text{vib}1k}$, определяющие, соответственно, добавку к натяжению и добавки к реакциям в продольном направлении в граничных точках зоны контакта в процессе малых колебаний, выражаются из системы (4.1) через функцию V_{vib} :

$$\begin{aligned} & \lambda_{\text{vib}} = -\rho r^3 \ddot{V}_{\text{vib}}' - 2\rho r^3 \Omega \dot{V}_{\text{vib}}'' - 2\rho r^3 \Omega \dot{V}_{\text{vib}} + \\ & + (n_{11} - n_0) V_{\text{vib}}^{(3)} - (m_{20} - m_{21} + n_0 + n_{01}) V_{\text{vib}}', \\ & r\mu_{\text{vib}1k} = (-1)^k [2\rho r^3 \Omega \dot{V}_{\text{vib}}'' + (n_0 - n_{11}) V_{\text{vib}}^{(3)}]_{l(k)}. \end{aligned}$$

Представим функции, определяющие малые колебания, в виде

$$V_{\text{vib}} = e^{i\omega t} X(\alpha), \quad U_{\text{vib}} = -V_{\text{vib}}' = -e^{i\omega t} X'(\alpha).$$

Подставив выражение для функции V_{vib} в уравнение (4.2), получим уравнение

$$\begin{aligned} & a_0 X^{(4)} + 2\rho r^3 \Omega \dot{X}^{(3)} + (a_1 - \rho r^3 \omega^2) X'' + \\ & + 2\rho r^3 \Omega \dot{X}' + (a_2 + \rho r^3 \omega^2) X = 0 \end{aligned}$$

с решением, имеющим вид (3.3) (с заменой ϕ на α) и характеристическим уравнением

$$\begin{aligned} & a_0 p^4 + 2\rho r^3 \Omega \dot{p}^3 + (a_1 - \rho r^3 \omega^2) p^2 + \\ & + 2\rho r^3 \Omega \dot{p} + (a_2 + \rho r^3 \omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Коэффициенты G_i в решении (3.3) определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} & G_1 e^{p_1(\alpha_1 + 2\pi)} + G_2 e^{p_2(\alpha_1 + 2\pi)} + \\ & + G_3 e^{p_3(\alpha_1 + 2\pi)} + G_4 e^{p_4(\alpha_1 + 2\pi)} = 0, \\ & G_1 e^{p_1 \alpha_2} + G_2 e^{p_2 \alpha_2} + G_3 e^{p_3 \alpha_2} + G_4 e^{p_4 \alpha_2} = 0, \\ & G_1 p_1 e^{p_1(\alpha_1 + 2\pi)} + G_2 p_2 e^{p_2(\alpha_1 + 2\pi)} + \\ & + G_3 p_3 e^{p_3(\alpha_1 + 2\pi)} + G_4 p_4 e^{p_4(\alpha_1 + 2\pi)} = 0, \\ & G_1 p_1 e^{p_1 \alpha_2} + G_2 p_2 e^{p_2 \alpha_2} + \\ & + G_3 p_3 e^{p_3 \alpha_2} + G_4 p_4 e^{p_4 \alpha_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Однородная система (4.4) имеет ненулевое решение, если её определитель равен нулю:

$$\begin{aligned} & f(\omega) = e^{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)(\alpha_1 + 2\pi)} \times \\ & \times [(p_3 - p_1)(p_4 - p_2) \times \\ & \times (e^{(p_2 + p_4)(\Delta\alpha - 2\pi)} + e^{(p_1 + p_3)(\Delta\alpha - 2\pi)}) - \\ & - (p_3 - p_2)(p_4 - p_1) \times \\ & \times (e^{(p_1 + p_4)(\Delta\alpha - 2\pi)} + e^{(p_2 + p_3)(\Delta\alpha - 2\pi)}) - \\ & - (p_2 - p_1)(p_4 - p_3) \times \\ & \times (e^{(p_3 + p_4)(\Delta\alpha - 2\pi)} + e^{(p_1 + p_2)(\Delta\alpha - 2\pi)})] = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ определяет длину зоны контакта.

Бесконечный спектр СЧ определяется из уравнения (4.5), где p_1, p_2, p_3, p_4 – корни характеристического уравнения (4.3). Это алгебраическое уравнение четвёртой степени можно разрешить аналитическим методом Феррари:

$$\begin{aligned} & p_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2\gamma_0} \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{-2(\gamma_0 + A_1) - \frac{2A_2}{\sqrt{2\gamma_0}} - \frac{\rho r^3 \Omega \omega}{a_0} i} \right), \\ & p_{3,4}(\omega) = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2\gamma_0} \mp \right. \\ & \left. \mp \sqrt{-2(\gamma_0 + A_1) + \frac{2A_2}{\sqrt{2\gamma_0}} - \frac{\rho r^3 \Omega \omega}{a_0} i} \right), \\ & \gamma_0 = -\frac{A_1}{3} + C_1 + C_2, \\ & C_{1,2} = \sqrt[3]{-\frac{B_2}{2} \pm \sqrt{\frac{B_2^2}{4} + \frac{B_1^3}{27}}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$B_1 = -A_3 - \frac{A_1^2}{12}, \quad B_2 = \frac{A_1 A_3}{3} - \frac{A_2^2}{8} - \frac{A_1^3}{108},$$

$$A_1 = \frac{1}{2a_0^2} [2a_0(a_1 - \rho r^3 \omega^2) + 3g_0 \rho r^3 \omega^2],$$

$$A_2 = \frac{\rho r^3 \Omega \omega}{a_0^3} [2a_0^2 - a_0(a_1 - \rho r^3 \omega^2) - g_0 \rho r^3 \omega^2] i,$$

$$A_3 = \frac{1}{16a_0^4} [16a_0^3(a_2 + \rho r^3 \omega^2) + 4a_0 g_0 \rho r^3 \omega^2 (4a_0 - a_1 + \rho r^3 \omega^2) - 3g_0^2 (\rho r^3 \omega^2)^2].$$

Так как кубичный радикал имеет в поле комплексных чисел три значения, то третьё соотношение в (4.6) даёт три значения для γ_0 . Можно взять любое из этих трёх значений, однако нельзя комбинировать произвольное значение первого радикала третьей степени C_1 с произвольным значением второго радикала третьей степени C_2 . Если взято какое-то значение для первого радикала, то из трёх значений второго радикала выбирается то, которое удовлетворяет условию $C_1 C_2 = -B_1 / 3$.

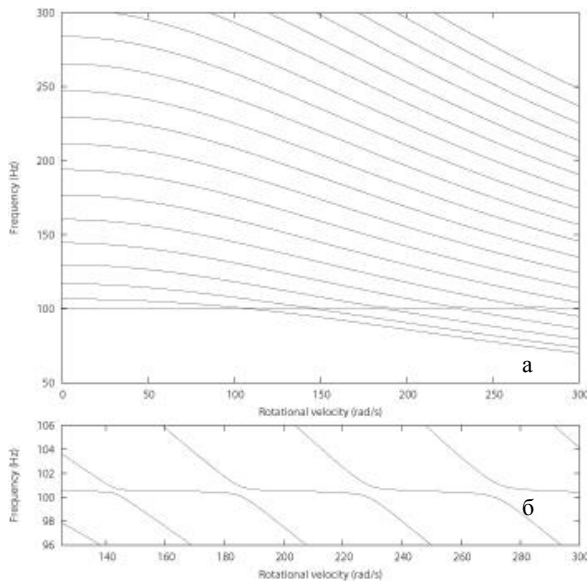


Рис. 3. Нагруженная вращающаяся шина (Входные I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад): СЧ, как функции угловой скорости вращения при эйлеровом описании

Зависимость первых двадцати СЧ от угловой скорости вращения для Входных I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад проиллюстрирована на рис. 3а. Из рисунка видно, что увеличение угловой скорости вращения приводит к уменьшению величин СЧ, что согласуется с результатами [14], где использовался конечно-элементный подход.

Ранее наблюдавшееся раздвоение СЧ ненагруженной вращающейся шины вследствие вращения в случае нагруженной вращающейся шины не наблюдается вследствие нарушения круговой симметрии, вызванной наличием зоны контакта, что также согласуется с результатами работы [14]. Помимо этого, наблюдается интересный эффект «взаимного разбегаия» частот (рис. 3б): СЧ, как функции угловой скорости вращения, приближаются друг к другу, а затем неожиданно «разбегаются», вместо того, чтобы пересечься [5].

Соответствующие СФ имеют вид

$$X(\alpha) = G_1 e^{p_1 \alpha} + G_2 e^{p_2 \alpha} + G_3 e^{p_3 \alpha} + G_4 e^{p_4 \alpha}$$

где постоянные G_i находятся из граничных условий (4.4):

$$G_1 = e^{-p_1(\alpha_1 + 2\pi)} \left((p_4 - p_3) e^{p_2(\Delta\alpha - 2\pi)} - (p_4 - p_2) e^{p_3(\Delta\alpha - 2\pi)} + (p_3 - p_2) e^{p_4(\Delta\alpha - 2\pi)} \right) G_5^*,$$

$$G_2 = e^{-p_2(\alpha_1 + 2\pi)} \left(-(p_4 - p_3) e^{p_1(\Delta\alpha - 2\pi)} + (p_4 - p_1) e^{p_3(\Delta\alpha - 2\pi)} - (p_3 - p_1) e^{p_4(\Delta\alpha - 2\pi)} \right) G_5^*,$$

$$G_3 = e^{-p_3(\alpha_1 + 2\pi)} \left((p_4 - p_2) e^{p_1(\Delta\alpha - 2\pi)} - (p_4 - p_1) e^{p_2(\Delta\alpha - 2\pi)} + (p_2 - p_1) e^{p_4(\Delta\alpha - 2\pi)} \right) G_5^*,$$

$$G_4 = e^{-p_4(\alpha_1 + 2\pi)} \left(-(p_3 - p_2) e^{p_1(\Delta\alpha - 2\pi)} + (p_3 - p_1) e^{p_2(\Delta\alpha - 2\pi)} - (p_2 - p_1) e^{p_3(\Delta\alpha - 2\pi)} \right) G_5^*, \quad \forall G_5^*.$$

Функция $V_{\text{vib}}(\alpha, t)$ представляется линейной комбинацией

$$V_{\text{vib}}(\alpha, t) = (\cos(\omega t) \Re(X(\alpha)) - \sin(\omega t) \Im(X(\alpha))) + i(\cos(\omega t) \Im(X(\alpha)) + \sin(\omega t) \Re(X(\alpha)))$$

действительной $\Re(X(\alpha))$ и мнимой $\Im(X(\alpha))$ СФ, соответствующих одной и той же СЧ. В конечном счёте, действительная СФ переходит в мнимую СФ и наоборот

$$V_{\text{vib}}(\alpha, 0) = \Re(X(\alpha)) + i\Im(X(\alpha)),$$

$$V_{\text{vib}}\left(\alpha, \frac{\pi}{2\omega}\right) = -\Im(X(\alpha)) + i\Re(X(\alpha))$$

Таким образом, речь идёт об одной и той же СФ, которая вращается на плоскости. Вращение диска колеса происходит по часовой стрелке. Действительные СФ представлены на рис. 4 для Входных I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад, $\Omega = 175$ рад·с⁻¹ (угловая скорость вращения до «области разбегаия» 180–190 рад·с⁻¹) и на рис. 5 для $\Omega = 200$ рад·с⁻¹ (угловая скорость вращения после «области разбегаия»). Можно заметить, что третья и четвёртая СФ взаимодействуют в «области разбегаия» и, в конечном итоге, меняются местами.

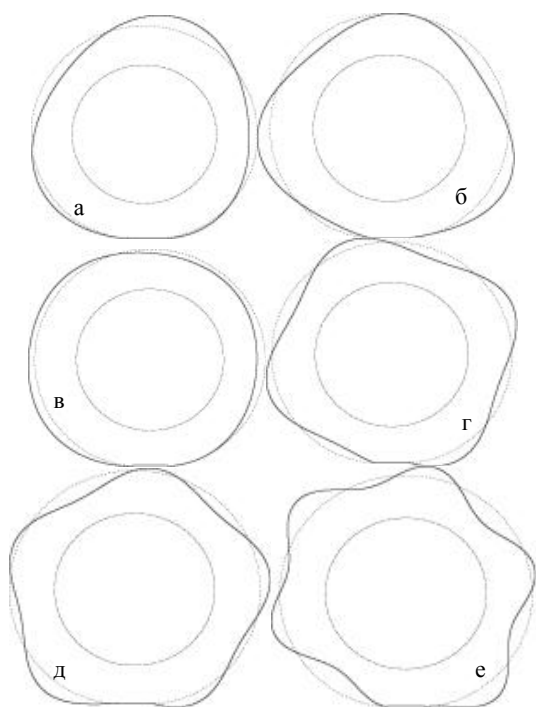


Рис. 4. Действительные СФ $\Re(X(\alpha))$ нагруженной вращающейся шины (Входные I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад,

$$\Omega = 175 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}):$$

а) $\nu_1 = 90.13$ Гц, б) $\nu_2 = 94.93$ Гц, в) $\nu_3 = 100.46$ Гц,

г) $\nu_4 = 102.72$ Гц, д) $\nu_5 = 112.78$ Гц,

е) $\nu_6 = 124.47$ Гц.

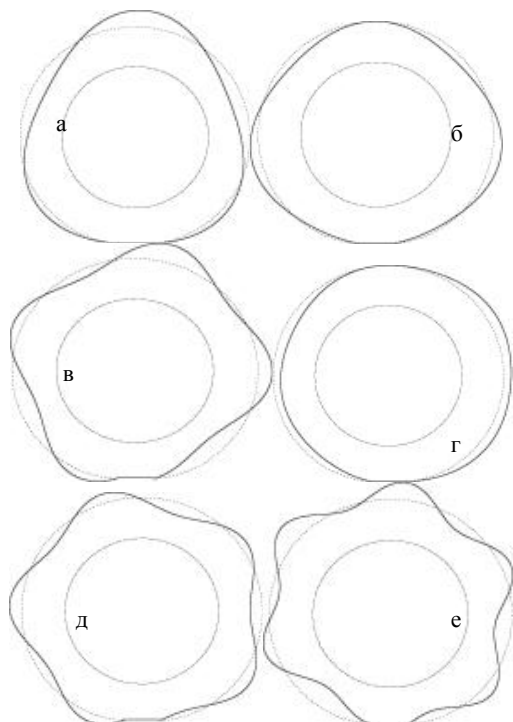


Рис. 5. Действительные СФ $\Re(X(\alpha))$ нагруженной вращающейся шины (Входные I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад,

$$\Omega = 200 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}):$$

а) $\nu_1 = 85.89$ Гц, б) $\nu_2 = 90.49$ Гц, в) $\nu_3 = 97.53$ Гц,

г) $\nu_4 = 100.54$ Гц, д) $\nu_5 = 106.92$ Гц,

е) $\nu_6 = 117.77$ Гц.

За эволюцией третьей действительной СФ нагруженной вращающейся шины (Входные I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад) можно проследить на рис. 6. Для $\Omega = 3, 100, 130$ рад \cdot с $^{-1}$ третья СФ нагруженной вращающейся шины имеет, соответственно, три, четыре, пять узлов и подобна третьей, четвертой, пятой СФ нагруженной невращающейся шины. Таким образом, третья СФ эволюционирует из трёхузловой в пятиузловую форму, в то время как СЧ уменьшается с 116.91 Гц до 102.81 Гц.

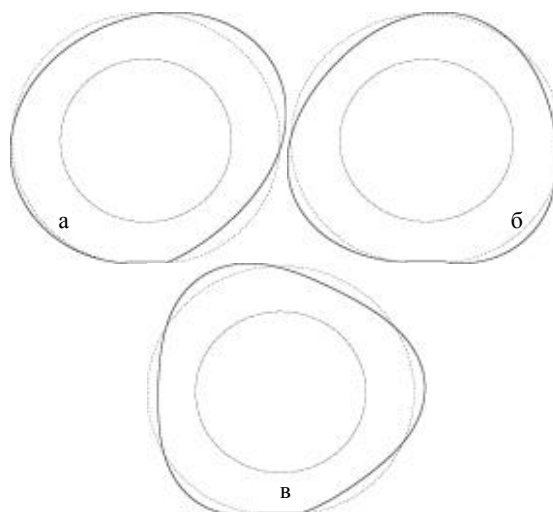


Рис. 6. Эволюция третьей действительной СФ $\Re(X(\alpha))$ нагруженной вращающейся шины (Входные I, $\Delta\alpha = 0.3$ рад):

а) $\Omega = 3$ рад \cdot с $^{-1}$, $\nu_3 = 116.91$ Гц,

б) $\Omega = 100$ рад \cdot с $^{-1}$, $\nu_3 = 107.71$ Гц,

в) $\Omega = 130$ рад \cdot с $^{-1}$, $\nu_3 = 102.81$ Гц.

Список литературы

1. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Mathematical and Physical Sciences. 1890. V. 7. P. 101–111.
2. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. Мех. твёрд. тела. 1983. № 5. С. 17–23.
3. Егармин Н.Е. О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесимметричной оболочки // Изв. АН СССР. Мех. твёрд. тела. 1986. № 1. С. 142–148.
4. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 2. М.: Изд-во Мех.-мат. факультета МГУ, 1997. 160 с.
5. Lopez I., van Doorn R.R.J.J., van der Steen R., Roozen N.B., Nijmeijer H. Frequency loci veering due to deformation in rotating tyres // Journal of Sound and Vibration. 2009. V. 324, № 3–5. P. 622–639.

6. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Об одной модели колеса с армированной шиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2004. № 4. С. 37–45.
7. Кожевников И.Ф. Колебания свободной и нагруженной шины // ПММ. 2006. Т. 70, № 2. С. 250–256. = Kozhevnikov I.F. The vibrations of a free and loaded tyre // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2006. V. 70, № 2. P. 223–228.
8. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
9. Huang S.C., Soedel W. Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem // Journal of Sound and Vibration. 1987. V. 118, № 2. P. 253–270.
10. Huang S.C., Soedel W. Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation // Journal of Sound and Vibration. 1987. V. 115, № 2. P. 253–274.
11. <http://tmpt.tuwien.ac.at/m-docu-1.pdf>; <http://tmpt.tuwien.ac.at/m-docu-2.pdf> (дата обращения: 09.06.2011)
12. Kim W., Chung J. Free non-linear vibration of a rotating thin ring with the in-plane and out-of-plane motions // Journal of Sound and Vibration. 2002. V. 258, № 1. P. 167–178.
13. Endo M., Hatamura K., Sakata M., Taniguchi O. Flexural vibration of a thin rotating ring // Journal of Sound and Vibration. 1984. V. 92, № 2. P. 261–272.
14. Brinkmeier M., Nackenhorst U. An approach for large-scale gyroscopic eigenvalue problems with application to high-frequency response of rolling tyres // Computational Mechanics. 2008. V. 41, № 4. P. 503–515.

VIBRATIONS OF A LOADED ROTATING TYRE

I.F. Kozhevnikov

We investigate vibrations of an unloaded and loaded tyre rolling at constant speed. A previously proposed analytical model of a reinforced tyre is considered. The natural frequencies (NF) and mode shapes (MS) are determined. In the case of loaded rotating tyre, the increasing of the angular velocity of rotation implies that NF decrease. A phenomenon of frequency loci veering is investigated.

Keywords: radial tyre, analytical model, variational principle of Hamilton, modal analysis, vibrations.