

УДК 539.3

## ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2013 г.

Л.А. Игумнов, И.П. Марков, В.П. Пазин

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 30.11.2012

Рассматривается случай общей анизотропии. Применяется прямая формулировка метода граничных элементов. Гранично-элементная модель использует согласованную поэлементную аппроксимацию границы и граничных функций. Численные примеры приведены для нескольких видов анизотропии. Даны сравнения с аналитическим решением и результатами других авторов.

*Ключевые слова:* анизотропия, трехмерные задачи, граничный элемент, упругость.

### Введение

В основе успеха применения метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) лежат достижения в теории многомерных сингулярных интегральных уравнений и в теории потенциала, связанные с работами советских ученых: С.Г. Михлина [1], В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелиа, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе [2] и других. Вопросам построения граничных интегральных уравнений статических задач теории упругости и разработке численных методик их решения посвящены работы А.Я. Александрова [3], Ю.Л. Бормота [4], Ю.В. Верюжского [5], С.П. Гавели [6], Р.В. Гольдштейна [7], Б.М. Зиновьева [8], Ю.Д. Копейкина [9], М.И. Лазарева [10], В.М. Лиховцева [11], Ю.А. Мельникова [12], О.П. Николаева [13], В.З. Партон и П.И. Перлина [14], А.Г. Угодчикова и Н.М. Хуторянского [15], Г.И. Яха [16], Т.А. Cruse [17], J.C. Lachat и J.O. Watson [18, 19], F.J. Rizzo и D.J. Shippy [20] и других авторов.

В первых работах [3, 17, 21] по решению трехмерных статических задач теории упругости с помощью метода граничных элементов (МГЭ) применялась аппроксимация поверхности тела с помощью плоских треугольных элементов, кусочно-постоянная аппроксимация граничных перемещений и поверхностных сил, а также аналитическое интегрирование по элементам при вычислении коэффициентов дискретного аналога ГИУ. В дальнейшем было предложено [16, 18] использовать для аппроксимации поверхности тела и граничных функций элементы более высоких порядков и вы-

числять коэффициенты дискретного аналога ГИУ с помощью формул численного интегрирования Гаусса, а проблему вычисления сингулярных интегралов решать путем сведения к несобственным интегралам, применяя метод понижения особенности [15, 20]. Так как ядра ГИУ в случае общей анизотропии представляют собой двумерные интегралы, то для успешной численной реализации решения ГИУ было предложено использовать их представления в сферической системе координат и интерполяционные процедуры вычисления [22, 23]. Сами представления ядер ГИУ претерпели значительные изменения, о чем свидетельствуют работы [24, 25].

На основе современных представлений матриц Грина, Неймана с применением интерполяционных схем их вычисления в работе строится гранично-элементная модель решения трехмерной краевой задачи упругой статики для случая общей анизотропии.

### 1. Математическая модель

Система уравнений трехмерной статической теории упругости для анизотропного упругого тела имеет вид [26]:

$$\begin{aligned} L_{ik}^0 u_k + f_i &= 0 \text{ в } \Omega \subset R^3, \quad i, k = \overline{1,3}, \\ u(x) &= \tilde{u} \text{ на } S^u, \\ t_n(x) &= \tilde{t}_n \text{ на } S^\sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $L_{ik}^0 = C_{ijkl} \partial_i \partial_j$ ,  $i, j, k, l = \overline{1,3}$  – эллиптический оператор анизотропной упругой статики; плотность объемной силы  $f_i$ ;  $C_{ijkl}$  – тензор упругих модулей;  $u_i$  – компоненты вектора перемеще-

ний;  $S^u$  – граница Дирихле и  $S^\sigma$  – граница Неймана.

Граничное интегральное уравнение при отсутствии объемных сил можно записать в следующей форме:

$$c_{ij}u_j(x) = \int_{\Gamma} (U_{ij}(x, \xi)p_j(\xi) - T_{ij}(x, \xi)u_j(\xi))dS(\xi), i, j = \overline{1,3} \quad (2)$$

$$c_{ij} = \delta_{ij} + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} T_{ij}dS,$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $S = \partial\Omega$  – граница области  $\Omega$ ;  $p_j$  – компоненты вектора поверхностных сил;  $U_{ij}$  и  $T_{ij}$  – фундаментальное и сингулярное решения (1).

### 2. Фундаментальные решения упругой статики

Математически матрица Грина может быть определена следующим образом:

$$C_{ijkl}G_{km,li}^u(x) = -\delta_{jm}\delta(x), i, j, k, l, m = \overline{1,3}. \quad (3)$$

Рассмотрим интегральный метод. Матрица  $G_{jk}^u$  с использованием обратного преобразования Радона может быть записана следующим образом [26]:

$$G_{jk}^u = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} (M_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i) ds(z_i) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{S^2} (M_{jk}^{zz}(z_i))^{-1} \delta(z_i r_i^0) ds(z_i),$$

$$r_i^0 = \frac{r_i}{r}, \delta(z_i r_i) = \delta(rz_i r_i^0) = \frac{1}{r} \delta(z_i r_i^0), M_{jk}^{zz} = C_{ijkl} z_i z_l.$$

Интеграл по сфере  $S^2 : z_i z_i = 1$  преобразуется к интегралу по окружности:

$$G_{jk}^u = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} (M_{jk}^{zz}(z_i(\varphi)))^{-1} d\varphi. \quad (4)$$

Единичная окружность является пересечением единичной сферы с плоскостью  $z_i r_i^0 = 0$  (рис. 1).

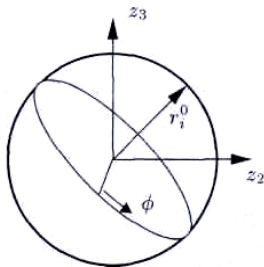


Рис. 1. Пересечение единичной сферы с плоскостью  $z_i r_i^0 = 0$

Если ввести сферические координаты

$(r, \theta_1, \theta_2)$   $0 \leq \theta_1 \leq \pi$  и  $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ , то можно записать фундаментальное решение, его производную и сингулярное решение следующим образом:

$$r_i(r, \theta_1, \theta_2) = r r_i^0(\theta_1, \theta_2),$$

$$U_{mk}(r, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{r} G_{mk}^u(\theta_1, \theta_2), \quad (5)$$

$$U_{mk,l} = \frac{1}{r^2} G_{mkl}^u(\theta_1, \theta_2), \quad (6)$$

$$T_{mi}(r, \theta_1, \theta_2) = C_{ijkl} U_{mk,l}(r, \theta_1, \theta_2) n_j = \frac{1}{r^2} G_{mij}^t(\theta_1, \theta_2) n_j, \quad (7)$$

$$G_{ijk}^t = C_{ijml} G_{mkl}^u(\theta_1, \theta_2). \quad (8)$$

Разобьем область изменения углов  $\theta_1, \theta_2$  правильной прямоугольной сеткой и вычислим значения  $G_{mk..}^u$  в соответствующих точках этой сетки. Таким образом, используя найденные значения, можно получить значение  $G_{mk..}^u$  в произвольных точках  $\theta_1$  и  $\theta_2$  с помощью интерполяции Лагранжа. Применение формул (5)-(8) позволяет найти фундаментальное решение  $U_{mk}$ , его производную  $U_{mk,l}$  и, соответственно, сингулярное решение. На рис. 2, 3 для примера представлены компоненты анизотропной матрицы Грина для моноклинного материала, параметры материала приведены в таблице 1.

Более детальное численное исследование компонент матриц Грина и Неймана можно найти в [24, 25].

Таблица 1.

Моноклинный материал					
95.5	28.9	4.03	0	0	44.7
28.9	25.9	4.65	0	0	15.6
4.03	4.65	16.3	0	0	0.54
0	0	0	4.4	-1.78	0
0	0	0	-1.78	6.45	0
44.7	15.6	0.54	0	0	32.7

ГПа

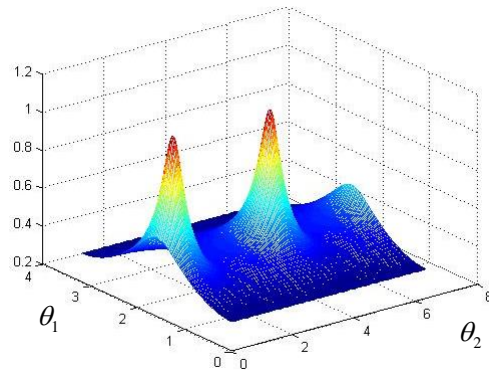


Рис. 2. Компонента  $G_{11}$

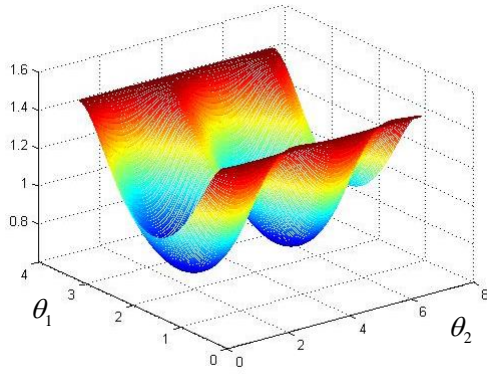


Рис. 3. Компонента  $G_{33}$

### 3. Гранично-элементная дискретизация и численные эксперименты

Описание гранично-элементной модели можно найти в [26]. Граница  $S$  области аппроксимируется совокупностью четырехугольных восьмиузловых биквадратичных элементов  $S_k (k=1, \dots, N)$ . Декартовы координаты произвольной точки  $y = (y_1, y_2, y_3)$  элемента  $S_k$  выражаются через координаты узловых точек этого элемента с помощью функции формы  $N^e (e=1, \dots, 8)$  от локальных координат  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ :

$$y_i(\xi) = \sum_{e=1}^8 N^e(\xi) y_i^{\beta(k,e)}, \quad i=1,2,3,$$

где  $\beta(k,e)$  – глобальный номер узла, имеющего в  $k$ -м элементе локальный номер  $e$ .

Граничные перемещения аппроксимируются билинейными элементами, а поверхностные силы – постоянными элементами.

Для получения дискретного аналога ГИУ в качестве проекционного метода используется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций.

Рассмотрим задачу о гидростатическом сжатии единичной интенсивности единичного куба. В случае изотропного материала с приведенным модулем Юнга  $E=1$  и коэффициентом Пуассона  $\nu=0.25$ :

$$u_i = -0.5x_i, \quad i=1,2,3$$

Результаты исследования перемещений  $u_i$  угловой точки с координатами  $(0.5, 0.5, 0.5)$  на трех различных ГЭ-сетках с количеством элементов 150, 600 и 2400 приведены в таблице 2.

Рассмотрим задачу о действии нагрузки, равномерно распределенной по части поверхности куба, закрепленного с одной стороны (рис. 4). Длина стороны куба равна 10 мм. Рас-

смотрены четыре различных материала: изотропный, трансверсально изотропный, ортотропный и моноклинный. Значения компонент тензора упругих модулей  $C_{ijkl}, i, j, k, l=1,3$  приведены, соответственно, в таблицах 1,3,4,5.

Таблица 2

Количество элементов	$u_i (0.5, 0.5, 0.5)$
150	-0.25022254
600	-0.25006529
2400	-0.25003748

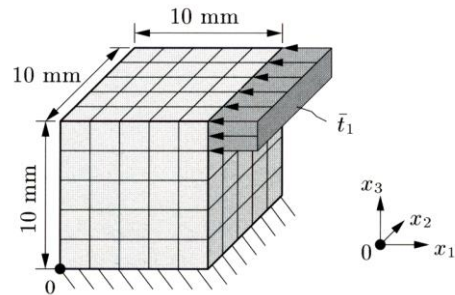


Рис. 4. Действие нагрузки на куб

Таблица 3

Изотропный материал						
282.7	121.2	121.2	0	0	0	ГПа
121.2	282.7	121.2	0	0	0	
121.2	121.2	282.7	0	0	0	
0	0	0	80.8	0	0	
0	0	0	0	80.8	0	
0	0	0	0	0	80.8	

Таблица 4

Трансверсально изотропный материал						
107.6	63.1	63.9	0	0	0	ГПа
63.1	282.7	63.9	0	0	0	
63.9	63.9	100.4	0	0	0	
0	0	0	19.6	0	0	
0	0	0	0	19.6	0	
0	0	0	0	0	22.2	

Таблица 5

Ортотропный материал						
0.44	0.32	0.19	0	0	0	ГПа
0.32	16.27	0.45	0	0	0	
0.19	0.45	0.78	0	0	0	
0	0	0	0.61	0	0	
0	0	0	0	0.039	0	
0	0	0	0	0	0.76	

Анизотропные фундаментальные решения в точках интегрирования вычисляются при помощи линейной интерполяции Лагранжа на

сетках 100x100, 200x200, 400x400 и 800x800. Для изотропного случая используется аналитическое вычисление по формулам матрицы Кельвина. Исследовались перемещения  $u_i$  точки с координатами (10, 0, 10). Нагрузка  $\bar{t}_1$  в изотропном, трансверсально изотропном и моноклинном случаях равна  $100 \text{ Н/мм}^2$ , а в ортотропном случае равна  $1 \text{ Н/мм}^2$ . Расчеты проводились на трех различных ГЭ-сетках с количеством элементов 150, 600 и 2400. Полученные результаты и их сравнение с результатом из [27] приведены в таблице 6.

Представленное исследование продемонстрировало возможности гранично-элементной методики в решении краевых задач трехмерной анизотропной упругой статике. Апостериорный анализ свидетельствует о более высокой точности полученных результатов, чем имеющиеся в литературе примеры.

#### Список литературы

1. Михлин, С.Г. Метод граничных интегральных уравнений. Серия: Механика / С.Г. Михлин // Новое в зарубежной науке. М.: Мир, 1978. Вып. 15. 209 с.
2. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе [и др.]; ред. В.Д. Купрадзе. Изд. 2-е. М.: Наука, 1976. 664 с.
3. Александров А.Я. Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений / А.Я. Александров. – В кн.: Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 3–24.
4. Бормот, Ю.Л. Численный анализ методом потенциала пространственного напряженного состояния элементов конструкций // Известия АН СССР. М. 1977. №4. с. 203.
5. Верюжский, Ю.В. Метод потенциала в статических задачах строительной механики / Ю.В. Верюжский // М. 1981.
6. Гавеля С.П. О расчетных методах исследования проблем теории упругости с помощью метода потенциалов. Днепропетровск, 1978. С. 1–13. (Препринт/Днепропетр. ун-т)
7. Гольдштейн, Р.В. Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде / Р.В. Гольдштейн // Механика твердого тела. 1979. № 3. С. 111–126.
8. Зиновьев Б.М. Один приближенный метод расчета тел с разрезами // Тр. НИИЖТ. Вып. 137. 1972. С. 105–125
9. Копейкин Ю.Д. Прямое решение двух- и трехмерных краевых задач теории упругости и пластичности при помощи сингулярных интегральных уравнений метода потенциала // В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1974. т. 5. № 2. С. 46–56
10. Лазарев М.И. Метод граничных интегральных уравнений. Алгоритмы и их реализация // Информационный материал, НИВЦ АН СССР. Пущино-на-Оке. 1984. 54 с.
11. Лиховцев В.М., Перлин П.И. Применение обобщенного потенциала к решению пространственных контактных задач теории упругости // МТТ. 1978. № 1. с. 172–174.
12. Мельников Ю.А. Построение функций Грина

Таблица 6.

Сетка интерполяции	Перемещения $u_i(10, 0, 10)10^{-6}$ м., при количестве элементов в ГЭ-сетке			
	150	600	2400	[27]
Изотропный материал				
100x100	-7.6236672	-7.5851436	-7.5518158	-7.489
200x200	-7.6429157	-7.6030952	-7.5704414	-7.506
400x400	-7.6474475	-7.6078679	-7.5750594	-7.511
Кельвин	-7.6463304	-7.6067718	-7.5740006	-7.512
Трансверсально изотропный материал				
100x100	-29.581400	-29.304642	-29.125155	-28.73
200x200	-29.669512	-29.385613	-29.208208	-28.81
400x400	-29.690395	-29.407195	-29.228815	-28.83
800x800	-29.695707	-29.412333	-29.233996	-28.83
Ортотропный материал				
100x100	-71.166244	-72.137557	-72.204864	-71.89
200x200	-71.664759	-72.590233	-72.650849	-72.33
400x400	-71.784415	-72.706013	-72.763367	-72.44
800x800	-71.816348	-72.736915	-72.793993	-72.47
Моноклинный материал				
100x100	-94.652350	-96.600135	-97.088874	-97.23
200x200	-95.148923	-97.134644	-97.629601	-97.79
400x400	-95.293107	-97.274310	-97.768453	-97.93
800x800	-95.330596	-97.310825	-97.805583	-97.96

некоторых граничных задач математической физики / Ю.А. Мельников, Р.Д. Красникова. Днепропетровск: ДГУ. 1981. 55 с.

13. Николаев О.П. Разработка и применение модифицированной методики граничных элементов для трехмерных смешанных задач упругого равновесия: автореф. канд. дисс. / Николаев Олег Петрович. – Горький: ГГУ. 1983.

14. Партон В.З. Интегральные уравнения теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. М.: Наука. 1977. 312 с.

15. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. Казань: Изд-во КГУ. 1986. 296 с.

16. Ях Г.И. Об одном алгоритме решения трехмерных задач упругого равновесия методом граничных интегральных уравнений / Г.И. Ях, В.Я. Адлуцкий // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. Днепропетровск: ДГУ. 1979. С. 218–224.

17. Cruse T.A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics // *Int. J. Solids and Structures*. 1969. № 6. P. 1259–1274.

18. Лаша Ж.К. Усовершенствованная программа для решения трехмерных задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений / Ж.К. Лаша, Дж.О. Уотсон // Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. М.: Мир. 1978. С. 111–128.

19. Lachat J.C. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics / J.C. Lachat, J.O. Watson // *Int. J. Numer. Mech. Eng.* 1976. № 10. P. 991–1005.

20. Rizzo F.J. An advanced boundary integral equa-

tion method for three-dimensional thermoelasticity / F.J. Rizzo, D.J. Shippy // *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1977. Vol. 11. № 11. P. 1753–1768.

21. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики / Ю.В. Верюжский. Киев: Вища школа. 1978. С. 183.

22. Bacon D. Anisotropic continuum theory of lattice defects / D. Bacon, D.M. Barnett, R.O. Scattergood // *Progress in Materials Science*. Vol 23. Oxford: Pergamon Press. 1980. Chap. 2. P. 51–262

23. Wilson R.B. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation / R.B. Wilson, T.A. Cruse // *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1987. № 12. P. 1383–1397

24. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Пазин В.П., Петров А.Н. Численно-аналитическое построение матриц Грина трехмерных теорий упругости и электроупругости // Вестник ННГУ. Сер. Механика. – Н.Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета. 2010. Вып. 3. С. 134–140.

25. Игумнов Л.А., Пазин В.П. Численно-аналитическое построение матриц Грина и Неймана трехмерной теории термоупругости // Вестник ННГУ. Сер. Механика. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета. 2012. Вып. 4. С. 159–165.

26. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит. 2008. 352 с.

27. Gaul L., Kogl M., Wagner M. Boundary element methods for engineers and scientists. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 2003. 488 p.

## BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF 3D ANISOTROPIC ELASTICITY

*L.A. Igumnov, I.P. Markov, V.P. Pazin*

A case of general anisotropy is considered. A direct formulation of the boundary-element method is applied. The BE model uses a coordinated element-by-element approximation of the boundary and boundary functions. Numerical examples are given for several types of anisotropy. The results are compared with an analytical solution and the results given by other authors.

*Keywords:* anisotropy, 3D problems, boundary element, elasticity.