

УДК 539.374

## МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

© 2013 г.

Л.А. Игумнов<sup>1</sup>, Т.Д. Каримбаев<sup>2</sup>, Ш. Мамаев<sup>3</sup><sup>1</sup>НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского<sup>2</sup>Центральный институт авиационного моторостроения, Москва<sup>3</sup>Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 30.11.2012

Многочисленные экспериментальные исследования свидетельствуют о заметном влиянии скорости деформации на пределы текучести, прочности, законы упрочнения и другие параметры процессов деформирования в различных материалах. Аналитические подходы, учитывающие указанные эффекты скорости деформаций, представлены в большом числе работ и продолжают разрабатываться. Однако, инженерные подходы, позволяющие в рамках экспериментальных и аналитических достижений описать сложные явления при переменных скоростях деформации, недостаточно развиты. Модель упруго-пластического течения при переменной скорости деформирования, разработанный в предположении, что скорость деформации является параметром, может в некоторой мере восполнить этот пробел. Он построен на совокупности экспериментальных зависимостей напряжений от деформаций, полученных при различных значениях скорости деформации.

*Ключевые слова:* упругость, пластичность, вязкость, текучесть, скорость деформации.

### Наиболее значимые эффекты скорости деформаций

Влияние скорости деформации на механические характеристики материалов было установлено испытаниями на удар еще в конце XIX и в начале XX веков [1]. Изучению свойств материалов при динамических нагрузках посвящено большое число экспериментальных работ. Обзор экспериментальных исследований с анализом результатов испытаний и способов их проведения выполнен в работах [1–6].

На основании изучения опубликованных экспериментальных исследований, выполненных при различных скоростях деформирования, установлено, что наиболее чувствительными параметрами материалов к их изменению являются пределы текучести, прочности, а также характеристики упрочнения. Результаты испытаний труб из мягкой стали, приведенные в [7], характеризуют влияние скорости деформаций на пределы текучести и прочности (рис. 1). Пределы текучести  $\sigma_s^d$  и прочности  $\sigma_b^d$  возрастают с увеличением скорости деформации  $\zeta$ . Динамический предел текучести  $\sigma_s^d$  растет быстрее, чем предел прочности  $\sigma_b^d$ , и с некоторых значений скоростей  $\zeta$  он ( $\sigma_s^d$ ) практически достигает значений предела прочности  $\sigma_b^d$ . Эффект межзеренного скольжения сменяется

эффектом разрыва зерен. Для формирования скольжения необходим большой промежуток времени, чего нет при высоких скоростях деформирования и материал проявляет псевдохрупкие свойства. В [8] установлено, что динамический предел текучести  $\sigma_s^d$  мягкой стали в области скоростей деформации  $\zeta$  порядка  $10^2 \div 10^3 \text{ c}^{-1}$  достигает величины, в 2.5–3 раза превышающей статический предел текучести  $\sigma_s^d$ . Зонай повышенной чувствительности предела текучести  $\sigma_s^d$  к изменению скоростей деформации  $\zeta$  является диапазон скоростей от 1 до  $10^2 \text{ c}^{-1}$ .

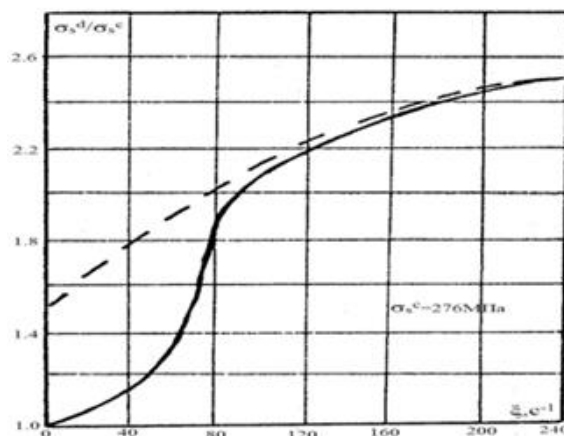


Рис.1. Зависимость пределов текучести и прочности (штриховая линия) для мягкой стали

В опытах [9] с чистым алюминием изучалось влияние на кривые деформирования  $\sigma \sim \varepsilon$  и упрочнение материала  $d\sigma/d\varepsilon$  изменений скорости деформации  $\xi$  в диапазоне от  $10^{-3}$  до  $10^4 \text{ c}^{-1}$ . Эксперименты [10, 11] показали, что упрочнение материалов  $d\sigma/d\varepsilon$  при фиксированном значении деформации  $\varepsilon$  существенно зависит от скорости деформации  $\xi$ . На рис. 2 приведены диаграммы растяжения стали 45, полученные при различных скоростях нагружения  $9.8 \cdot 10^{12}$  и  $9.8 \cdot 10^6 \text{ Н/(м}^2 \cdot \text{с)}$  [12]. С повышением скорости нагружения предел текучести  $\sigma_s^d$  возрастает почти вдвое. Также существенно возрастает касательный модуль «упругости»  $d\sigma/d\varepsilon$  характеризующий степень упрочнения материала. В [13] построены кривые деформирования  $\sigma \sim \varepsilon$  для алюминиевых сплавов А7, АД0 и АД1 в состоянии поставки и после отжига (рис. 3). Упрочнения  $d\sigma/d\varepsilon$  при деформациях  $\varepsilon$ , превышающих 3%, на всех кривых практически одинаковы и не зависят от скорости деформации  $\xi$ .

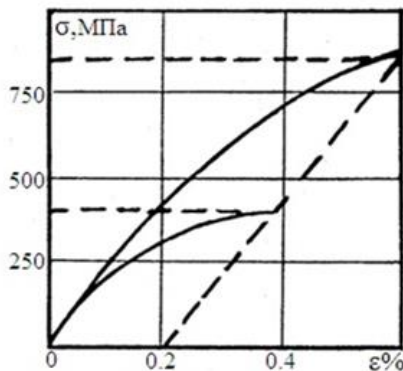


Рис. 2. Кривые деформирования стали 45 при скорости нагружения  $9.8 \cdot 10^{12} \text{ Н/(м}^2 \cdot \text{с)}$  (верхняя кривая) и  $9.8 \cdot 10^6 \text{ Н/(м}^2 \cdot \text{с)}$  (нижняя кривая)



Рис. 3. Кривые деформирования сплава АД1

В экспериментах [14], а также в [9, 15] было установлено влияние истории изменения скорости деформации  $\xi$  на кривую деформирования материала  $d\sigma/d\varepsilon$ . Существенно, что в работах

[9, 15] это влияние обнаружено при изменении скорости деформации  $\xi$  всего на два порядка. На рис. 4 воспроизведены результаты испытаний [15] по растяжению алюминиевой проволоки с комбинациями двух скоростей деформации:  $\xi_1 = 5.5 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$  (нижняя кривая) и  $\xi_2 = 4.5 \cdot 10^{-1} \text{ c}^{-1}$  (верхняя кривая).

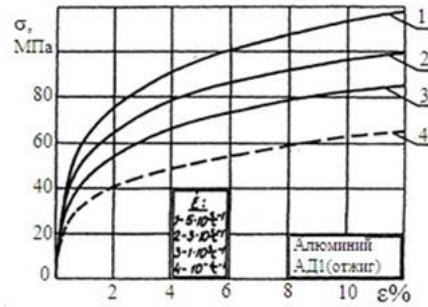


Рис. 4. Экспериментальные зависимости при скоростях деформирования:  $\xi = 5 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$  (1), перехода с кривой на кривую  $\xi = 10^3 \text{ c}^{-1}$  (2),  $\xi = 3 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$  (3),  $\xi = 5 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$  (4)

В точке А при  $\varepsilon = 3.6\%$  скорость растяжения была быстро снижена с  $\xi_2$  до  $\xi_1$ . Пунктирная линия показывает, что в последующем процессе деформирования при  $\xi = \xi_1$  кривая  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  стремится к кривой  $\sigma(\varepsilon)$ , соответствующей скорости  $\xi = \xi_1$ , и практически совпадает с ней через небольшой участок запаздывания  $\Delta\varepsilon = 0.8\%$ . Аналогичный переход был выполнен на другом образце в точке В при большей предварительной деформации ( $\varepsilon = 19.5\%$ ). В этом случае стремление к кривой  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  при  $\xi = \xi_1$  происходит несколько медленнее. В точках С ( $\varepsilon = 3.6\%$ ) и D ( $\varepsilon = 19.5\%$ ) совершен переход от меньшего значения скорости деформации  $\xi = \xi_1$  к большему —  $\xi = \xi_2$ . В этих случаях также наблюдался переход от кривой  $\sigma(\varepsilon)$ , соответствующей скорости деформации  $\xi_1$ , к кривой  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , соответствующей  $\xi_2$ . Эти испытания показывают, что кривые  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  построенные в опытах с постоянной, но изменяющейся от эксперимента к эксперименту скоростью деформации  $\xi$ , могут играть роль опорных кривых  $\sigma \sim \varepsilon$  при построении математической модели динамического деформирования материалов. Начальный этап деформирования при изменении скорости деформации  $\xi$ , как следует из испытаний, проведенных в [16], осуществляется упруго. Только затем наблюдается нелинейное приближение к соответствующей кривой деформирования  $\sigma = \sigma(\xi; \xi + \Delta\xi)$ . Накопленная на первом этапе нагружения необратимая пластическая деформация  $\varepsilon^p$  полностью сохраняется при любых изменениях скорости деформа-

ции  $\zeta$ . Однако, момент появления нелинейных деформаций при изменении скорости деформации  $\dot{\zeta}$  недостаточно экспериментально изучен. Неопределенность предела пропорциональности в зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  приводит к определенным трудностям при моделировании процесса перехода с кривой, соответствующей одной скорости деформации  $\dot{\zeta}$ , на другую.

Проведенный краткий анализ результатов экспериментальных исследований о распространении механических возмущений подтверждает зависимость сопротивления материала от скорости деформации и проявление эффекта вязкости, что отражается в различных реологических моделях поведения материалов под нагрузкой [17–19]. Разработанные математические модели, описывающие явления при высокоскоростных нагружениях, обычно учитывают влияние скорости деформации на характер нелинейного деформирования. Работы Л. Малверна [20], В.В. Соколовского [21], П. Пэжина [3], В.Н. Кукуджанова [22, 23], С. Калиского [24], Р.М. Нагди и С.А. Мерч [25] и многих других внесли существенный вклад в развитие теории упруго-вязко-пластического деформирования. Используемые обобщенные на упруго-вязко-пластические среды модели деформирования предоставляют широкие возможности для исследований [3, 19–24]. Однако обобщения, как правило, в меньшей мере охватывают отдельные экспериментально наблюдаемые явления и зачастую приводят к заметным осложнениям при решении конкретных инженерных задач. Это обстоятельство, быть может, является одной из причин относительно узкого применения указанных моделей деформирования в практике проектирования изделий. В связи со сказанным, продолжаются попытки создания математических моделей неупругого поведения материалов, чувствительных к изменениям скорости деформации [25–27]. Далее описана модель упругопластического течения при переменной скорости деформирования, которая, являясь развитием работы [25], позволяет на основе экспериментально полученных для различных скоростей деформации  $\dot{\zeta}$  зависимостей  $\sigma \sim \varepsilon$  предложить алгоритм решения конкретных задач.

## 2. Вариант модели пластически деформируемых материалов, чувствительных к скоростям деформации $\dot{\zeta}$

Экспериментальные данные показывают, что пластическое состояние при динамическом нагружении достигается при более высоких уровнях нагрузок, чем при статическом нагру-

жении. Уровни пластических деформаций могут заметно зависеть от истории нагружения, в том числе, и от истории изменения скоростей деформации  $\dot{\zeta}$ . Последние эффекты проявляются особенно четко для материалов с хорошо выраженными пределами текучести  $\sigma_s$ . Отдельные аспекты влияния скорости деформации  $\dot{\zeta}$  на состояние тела могут быть учтены, если поверхность нагружения [25] записать в виде

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \dot{\zeta}_{ij}, \chi_i) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $\dot{\zeta}_{ij}$  являются компонентами тензоров напряжений, пластических деформаций и скоростей деформации, а  $\chi_i$  – скалярный параметр упрочнения, зависящий от истории изменения пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^p$ . Параметр упрочнения  $\chi_i$  является постоянным при фиксированных значениях  $\varepsilon_{ij}^p$ , и остаточные деформации определяются его величиной. В качестве величины  $\chi_i$  обычно принимают параметр Одквиста [28]:

$$\chi_i = \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_i^p}{\partial t} dt = \int_0^t \left( \frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2} dt, \quad (2)$$

определяющий уровень накопленной пластической деформации  $\varepsilon_i^p$  за всю историю нагружения (от 0 до  $t$ ). Влияние параметров вязкости на упругое и пластическое деформирование можно связать с зависящими от них изменениями характеристик упругости, а также поверхности нагружения (1). Указанные эффекты вслед за [25] можно аналитически записать, используя известные подходы теории пластического течения (см. [29]). В соответствии с экспериментальными выводами о незначительном влиянии скоростей деформаций  $\dot{\zeta}$  на характеристики упругости принимается линейная зависимость шаровых составляющих тензоров напряжений  $\sigma = \sigma_{ij} \delta_{ij}$  и деформаций  $e = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ ,

$$e = \sigma/K \quad (\text{в дифференциальной форме}) \\ de = d\sigma/K; \quad (3) \\ \varepsilon_{ij} = e\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + s_{ij},$$

где  $K$  – объемный модуль упругости,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Далее предполагается возможность представления компонент девиатора деформации в  $\varepsilon_{ij}$  виде суперпозиции упругой  $\varepsilon_{ij}^e$  и пластической составляющих  $\varepsilon_{ij}^p$ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (4)$$

и линейная зависимость упругих  $\varepsilon_{ij}^e$  составляющих девиатора  $\varepsilon_{ij}$  деформации от соответству-

ющих составляющих девиатора напряжений  $s_{ij}$ :

$$\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} / 2\mu \quad (\text{в дифференциальной форме } d\varepsilon_{ij}^p = ds_{ij} / 2\mu). \quad (5)$$

Появление приращений пластических составляющих девиатора деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  связывают (см. [29, 30]) с поверхностью  $f$  нагружения (1), полагая их ортогональность к поверхности нагружения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} d\lambda. \quad (6)$$

Здесь параметр  $\lambda$  размерности напряжения пока неизвестен. Изменения пластических составляющих  $d\varepsilon_{ij}^p$  девиатора деформаций связаны с изменениями поверхности нагружения (1):

$$df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \xi_{ij}} d\xi_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} d\chi_i. \quad (7)$$

Условия дальнейшего активного нагружения или разгрузки следуют из определения поверхности нагружения (1) и характера ее изменения (7). В процессе разгрузки и нейтрального нагружения поверхность  $f=0$  не изменяется, нет пластических деформаций ( $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) и их накоплений ( $d\chi_i = 0$ ). Условие разгрузки и нейтрального нагружения в соответствии с (7) можно записать в виде

$$df \leq 0 \quad \text{или} \quad df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{ij}} d\xi_{ij} \leq 0. \quad (8)$$

Рост пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$  и появление вклада  $d\chi_i = 0$  для упрочняющегося тела связаны с расширением поверхности нагружения

$$df = 0 \quad \text{и} \quad df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{ij}} d\xi_{ij} > 0. \quad (9)$$

Ассоциированный с поверхностью нагружения  $f=0$  (1) закон пластического течения (6) с учетом влияния скорости деформации  $\dot{\xi}$  принимает вид:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \begin{cases} 0, & df \leq 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial s_{pq}} ds_{pq} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{pq}} d\xi_{pq} \leq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} d\lambda, & df = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial s_{pq}} ds_{pq} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{pq}} d\xi_{pq} > 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $d\lambda$  – по-прежнему неизвестный параметр. По форме соотношения (10) не отличаются от традиционного ассоциированного закона пластического течения. Однако функция нагружения (1) является более сложной, чем в теории пластичности [28]. Фактическое содержание выражения  $(\partial f / \partial s_{ij}) d\lambda$ , одновременно увязыва-

ющего поля девиаторов напряжений  $s_{ij}$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и их скоростей  $\dot{\xi}$ , является более глубоким и сложным. Принятая поверхность нагружения (1) зависит от скорости деформации  $\dot{\xi}_{ij}$ , её форма и размеры изменяются в зависимости от скорости деформации  $\dot{\xi}$ . Скорость деформации  $\dot{\xi}_{ij}$  хотя присутствует в (1) как независимый параметр, тем не менее, она дифференциально связана с деформацией  $\varepsilon_{ij}$ . В соответствии с определением (2) и зависимостями (6) имеют место соотношения

$$d\chi_i = d\varepsilon_j^p = (0.5 d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{0.5}, \quad (11)$$

$$d\chi_i = [0.5 (\partial f / \partial s_{ij}) (\partial f / \partial s_{ij})]^{0.5} d\lambda,$$

где

$$\varepsilon_j^p = (0.5 \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p)^{0.5}, \quad s_i = (0.5 s_{ij} s_{ij})^{0.5}. \quad (12)$$

Скалярный множитель  $d\lambda$ , определяющий линейную зависимость между компонентами приращения девиаторов пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  и напряжений  $s_{ij}$ , находится из равенства  $df = 0$ . Подставляя в соотношение (7) выражение приращения девиатора пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^p$  (6) и приращения накопленной пластической деформации  $d\chi_i$  (11), можно получить коэффициент  $d\lambda$ :

$$d\lambda = -\Phi \left[ \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{ij}} d\xi_{ij} \right]. \quad (13)$$

Здесь введен новый скалярный параметр

$$\Phi^{-1} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \chi_i} \left[ 0.5 \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \right]^{0.5}. \quad (14)$$

Если использовать выражение (6), то приращение девиатора пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^p$  на активном участке нагружения можно представить в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = -\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \Phi \left[ \frac{\partial f}{\partial s_{mn}} ds_{mn} + \frac{\partial f}{\partial \xi_{mn}} d\xi_{mn} \right]. \quad (15)$$

Из выражений (14) и (15) следует, что изменения девиатора пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^p$  могут происходить только на активном участке деформирования и они осуществляются как за счет изменения компонентов девиатора напряжений  $ds_{ij}$  и изменения скоростей деформаций  $d\xi_{ij}$ , так и в силу изменения поверхности нагружения  $f=0$  от этих параметров. Вводя обозначения

$$F_{mn}^s = -\Phi^{-1} (\partial f / \partial s_{mn}), \quad F_{mn}^\xi = -\Phi^{-1} (\partial f / \partial \xi_{mn}), \quad (16)$$

выражения (15) для приращений пластических

деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  можем записать в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = (\partial f / \partial s_{ij}) (F_{mn}^s ds_{mn} + F_{mn}^\varepsilon d\xi_{mn}). \quad (17)$$

В выражении (17) составляющая  $F_{mn}^s(s_{pq}, \xi_{pq}, \chi_i)$  приращения пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  обусловлена изменениями девиатора напряжения  $s_{mn}$  при постоянных значениях компонент тензора скоростей деформации  $\xi_{mn}$ , а составляющая  $F_{mn}^\varepsilon(s_{pq}, \xi_{pq}, \chi_i)$  вызвана изменениями тензора скоростей деформаций  $\xi_{mn}$  при постоянных значениях компонент девиатора напряжения  $s_{mn}$ . Все эти изменения рассматриваются при постоянной величине накопленной пластической деформации  $\chi_i = \varepsilon_i^p = \text{const}$ . Выражение (17) для приращений компонент девиатора пластических деформаций  $d\varepsilon_{ij}^p$  по форме подобно соотношениям неизотермической теории пластичности [31, 32]. Однако в отличие от зависимостей неизотермической теории пластичности, здесь переменные компоненты девиаторов напряжений  $s_{ij}$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и компоненты скоростей деформации  $\xi_{ij}$  являются взаимно связанными величинами. В несвязанной неизотермической теории пластичности температура  $t$  является не зависящей от  $s_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  переменной. Влияние на поверхность нагружения  $f$  таких параметров, как переменная скорость деформации  $\xi_{ij}$  в соотношении (17) и температура  $t$  в несвязанной неизотермической теории пластичности определяется внутренним их качественным отличием. Несмотря на эти отличия, в [25] удалось показать нормальность вектора мгновенных приращений  $d\varepsilon_{ij}^p$  компонент девиатора пластических деформаций поверхности нагружения  $f=0$  в форме (1).

Функция нагружения  $f=0$  (1) записана в достаточно общем виде, что является причиной неопределенности модели. Кроме того, в совокупности принятых условий не выяснено каким образом меняются форма и размеры поверхности нагружения  $f=0$  при изменении этих условий. Построение определяющих соотношений упруго-вязко-пластического деформирования исследуемой среды и разработки соотношений, пригодных для проведения непосредственных вычислений, завершается установлением конкретного вида функций  $f$ , а также  $F_{mn}^s$  и  $F_{mn}^\varepsilon$ , являющихся следствием принятой функциональной формы поверхности нагружения  $f$ .

Кроме того, необходимо установить способы экспериментального определения введенных функций. С целью конкретизации формы поверхности нагружения  $f=0$  ниже используется один из частных случаев, соответствующий обобщенному на вязкое пластическое деформирование условию текучести Мизеса

$$f(s_i, \chi_i, \xi_i) = s_i^2 - \sigma_s^2(\chi_i, \xi_i) = 0. \quad (18)$$

Здесь  $s_i, \xi_i$  – интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации, которые определяются соотношениями (11) и

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}}. \quad (19)$$

В (18) функция  $\sigma_s(\chi_i, \xi_i)$  является мгновенным пределом текучести, равным значению интенсивности девиатора напряжения  $s_i$  при определенной интенсивности скорости деформации  $\xi_i$ , и накопленной пластической деформации  $\chi_i$  в текущий момент времени  $t$ . Начальная поверхность нагружения  $\sigma_s(\xi_i) = \sigma_s(0, \xi_i)$  совпадает с обычным пределом текучести, зависящим от скорости деформирования  $\xi_i$  (рис. 5). Последнее обстоятельство непосредственно охватывает экспериментальные результаты зависимости предела текучести материалов от скорости деформирования  $\xi$ . Геометрически зависимость (18) изображает в пространстве  $(s_i, \varepsilon_i, \xi_i)$  поверхность деформирования образца (см. рис. 5) с отдельными кривыми деформирования, соответствующими различным скоростям деформации  $\xi$ . Процесс деформирования образца при заданной переменной скорости деформации  $\xi_i = \text{const}$  можно изобразить в виде кривой  $s_i = g(\varepsilon_i)$  на этой поверхности. Совокупность кривых  $s_i = g(\varepsilon_i)$  до предела текучести  $\sigma_s(0, \xi_i)$  образует линейчатую поверхность упругого деформирования. В сечениях  $\varepsilon_i = \text{const}$  изображается зависимость интенсивностей напряжений  $s_i$ , в том числе, пределов текучести  $\sigma_s$  от интенсивности скорости деформаций  $\xi_i$ . Сечения  $s_i = \text{const}$  определяют зависимость интенсивности сдвиговых деформаций  $\varepsilon_i$  от скорости деформаций  $\xi_i$ . Следует заметить, что модель построена в девиаторном пространстве напряжений и деформаций  $(s_i, \varepsilon_i)$ , а используемый параметр  $\xi_i$  в пространстве начальных деформаций. Обоснованием этому является то, что функция  $f=0$  (18) при заданном  $\xi_i$  не зависит [33] от гидростатического давления  $\sigma_0$ .

Всякая точка, изображающая пластически деформированное состояние материала, в любой

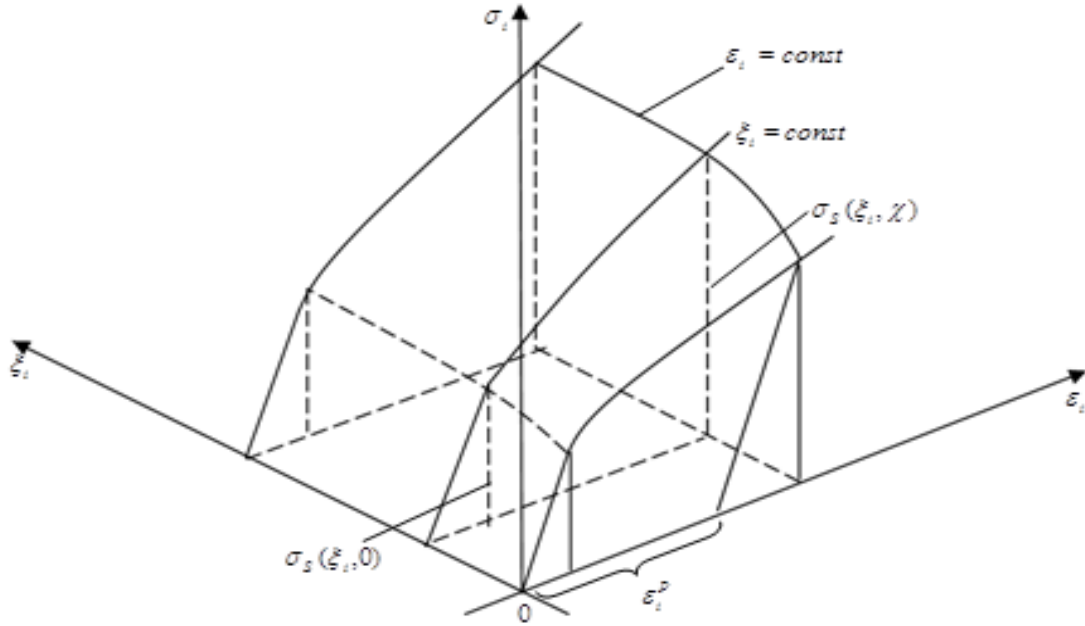


Рис. 5. Совокупность кривых деформирования и окаймляющая их поверхность

момент времени должна находиться на поверхности  $s_i = \sigma_s(\xi_i, \chi_i)$ , которая зависит от накопленной необратимой пластической деформации  $\chi_i$  и текущего значения интенсивности скорости деформации  $\xi_i$  (вязкость). С учетом принятой формы поверхности нагружения (18) основное соотношение (15) при продолжающемся нагружении можно записать так:

$$d\varepsilon_{ij}^p = (s_{ij})[ds_i - (\partial\sigma_s / \partial\xi_i)d\xi_i] / [s_i(\partial\sigma_s / \partial\chi_i)]. \quad (20)$$

В (20) были учтены равенства, вытекающие из (18):

$$\begin{aligned} \partial f / \partial s_{ij} &= s_{ij}; \quad \partial f / \partial \xi_i = -2\sigma_s \partial \sigma_s / \partial \xi_i = \\ &= -2s_i \partial \sigma_s / \partial \xi_i; \quad s_{mn} ds_{mn} = 2s_i ds_i, \quad (21) \\ \partial f / \partial \chi_i &= -2\sigma_s \partial \sigma_s / \partial \chi_i = -2s_i \partial \sigma_s / \partial \chi_i. \end{aligned}$$

Соотношения (21) позволяют записать

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} &= -(2\sigma_s \partial \sigma_s / \partial \chi_i) \{0.5s_{ij}s_{ij}\}^{0.5} = \\ &= -2s_i^2 (\partial \sigma_s / \partial \chi_i). \end{aligned} \quad (22)$$

Если ввести обозначения

$$F^s = 1 / [(\partial \sigma_s / \partial \chi_i)], \quad F^\xi = F^s (\partial \sigma_s / \partial \xi_i), \quad (23)$$

то ассоциированный с обобщенной поверхностью Мизеса (18) закон течения (20) с учетом влияния скорости деформации  $\xi_i$  можно записать в виде

$$d\varepsilon_{ij}^p = (s_{ij} / s_i) [F^s ds_i - F^\xi d\xi_i]. \quad (24)$$

Соотношения (24) имеют место только на активном участке нагружения, когда в соответствии с (10) и (21) выполняется условие

$$ds_i - (\partial \sigma_s / \partial \xi_i) d\xi_i > 0, \quad (25)$$

в противном случае  $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ . Соотношения (24) дают возможность учесть известные экспериментальные факты [1]. Из выражения (24), (25) видно, что для предложенного соотношения условие активного нагружения и разгрузки, отличаются от существующих подходов. Способ получения соотношений (24) принципиально не отличается от того, что было использовано в [25]. Точно так же, как и в аналогичных соотношениях работы [25], зависимости (24) продолжают содержать неопределенности, которые не позволяют их использовать в конкретных расчетах. Указанные неопределенности связаны с нерегламентированным (общим) характером изменения поверхности текучести  $\sigma_s(\chi_i, \xi_i)$  от параметров  $\chi_i$  и  $\xi_i$ . Представляется, что конкретизация способов получения введенных соотношениями (23) функций  $F^s$  и  $F^\xi$  выполнено впервые.

В соответствии с основными предположениями и соотношениями (2)–(5) и (24) на активном участке деформирования имеют место определяющие соотношения в форме

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d\sigma \delta_{ij} / K + ds_{ij} / 2\mu + \\ &+ (s_{ij} / s_i) (F^s ds_i - F^\xi d\xi_i). \end{aligned} \quad (26)$$

Далее предполагается, что поверхность пределов текучести  $s_i = \sigma_s(\xi_i, \chi_i)$  не зависит от вида напряженного состояния и её можно построить на основе результатов испытаний на одноосное растяжение, выполненных при различных, но постоянных скоростях деформации  $\xi = \text{const}$ . В

виртуальном испытании образца на растяжение начальное состояние определяется достигнутым уровнем растягивающих напряжений  $\sigma_{11}$  и скоростей деформаций  $\dot{\xi}$ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{11}/3; \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (\text{при } i \text{ и } j \text{ не равном } 1 \text{ од-} \\ &\quad \text{новременнo}), \\ s_{11} &= 2\sigma_{11}/3, \quad s_{22} = s_{33} = -\sigma_{11}/3, \\ s_{12} &= s_{13} = s_{23} = 0, \quad s_i = \sigma_{11}/\sqrt{3}, \\ s_{11}/s_i &= 2/\sqrt{3}, \quad s_{22}/s_i = s_{33}/s_i = -1/\sqrt{3}, \\ s_{12}/s_i &= s_{13}/s_i = s_{23}/s_i = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Если достигнутое равновесное состояние (27) приведено к новому равновесному состоянию с помощью дополнительного растягивающего напряжения  $d\sigma_{11} \neq 0$ , то

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma_{11}/3, \quad ds_{11} = 2d\sigma_{11}/3, \\ ds_{22} &= ds_{33} = -d\sigma_{11}/3, \\ ds_i &= d\sigma_{11}/\sqrt{3}; \quad d\xi_i = 0, \end{aligned}$$

и в соответствии с (26), (27) приращения компонент тензора полной деформации вычисляются из соотношений

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= [K + 1/\mu + 2F^s] ds_i / \sqrt{3}, \\ d\varepsilon_{12} &= d\varepsilon_{13} = d\varepsilon_{23} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{33} = [K - ds_{22}/2\mu - F^s] ds_i / \sqrt{3}.$$

При этом приращение интенсивности сдвиговых деформаций находится из

$$d\varepsilon_i = (1/2\mu + F^s) ds_i. \quad (29)$$

Из (29) можно найти одну из искоемых функций

$$\begin{aligned} F^s &= 1/(ds_j/d\varepsilon_j) - 1/2\mu = \\ &= 1/2\mu' - 1/2\mu; \quad 2\mu' = ds_i/d\varepsilon_i. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $2\mu'$  – касательный модуль сдвига к экспериментальной кривой  $s_i \sim \varepsilon_i$ . Таким образом, для экспериментального определения функции  $F^s$  следует рассмотреть простое растяжение образца при  $\dot{\xi}_i = \text{const}$ . Из выражения (30) и условия  $\mu' < \mu$  видно, что функция  $F^s$  всегда является положительной и обуславливает возрастание пластической деформации  $\varepsilon_i^p > 0$  при  $ds_i > 0$  и отсутствие её приращения ( $d\varepsilon_i^p = 0$ ) при  $ds_i < 0$ . Если достигнутое начальное равновесное состояние (27) приведено к новому равновесному состоянию путем изменения интенсивности скорости деформации  $d\xi_i \neq 0$ , то приращения напряжений равны нулю  $d\sigma_{11} = 0$ ,  $d\sigma = ds_{11} = ds_{22} = ds_{33} = ds_i = 0$ , и в соответствии с (26) приращения компонент тен-

зора деформации и интенсивности сдвиговых деформаций вычисляются из соотношений

$$d\varepsilon_{11} = -(2/\sqrt{3})F^\xi d\xi_i; \quad (31)$$

$$d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{33} = (1/\sqrt{3})F^\xi d\xi_i; \quad d\varepsilon_i F^\xi d\xi_i.$$

В соответствии с (31) вторая неизвестная функция  $F^\xi$  определяется из выражения

$$F^\xi = d\varepsilon_i / d\xi_i. \quad (32)$$

По экспериментальным кривым деформирования  $s_i \sim \varepsilon_i$ , построенным при различных значениях скорости деформации  $\dot{\xi}_i$ , должны быть построены сечения  $\varepsilon_i \sim \xi_i$  поверхности текучести при постоянном уровне интенсивности напряжений  $s_i = \text{const}$ . Касательные к кривой  $\varepsilon_i \sim \xi_i$ , позволяющие определить экспериментальные выражения функции  $F^\xi$  (см.(31)) при текущем значении  $\xi_i$ . В соответствии с экспериментальными данными  $\partial\sigma_s/\partial\xi_i > 0$  и соотношением (24) функция  $F^\xi$  принимает только отрицательные значения. Поэтому согласно равенству (24), рост пластических деформаций ( $d\varepsilon_i^p > 0$ ) можно наблюдать только при уменьшении скорости деформации  $d\xi_i < 0$ . Этот эффект можно видеть и из соотношения (31) для основной компоненты деформации  $d\varepsilon_{11}$ . Таким образом, при возрастании скорости деформирования  $\dot{\xi}_i$  приращение пластических деформаций не наблюдается. Эти результаты качественно согласуются с экспериментальными наблюдениями. Подставляя выражения (30), (32) в соотношения (26), можно получить закон пластического течения с учетом влияния скорости деформации

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d\sigma\delta_{ij}/K + ds_{ij}/2\mu + \\ &+ (s_{ij}/s_i)H(F^s ds_i - F^\xi d\xi_i) = \\ &= d\sigma\delta_{ij}/K + ds_{ij}/2\mu + (s_{ij}/s_i)G. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G &= H(F^s ds_i - F^\xi d\xi_i); \\ H(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

Физические соотношения (33) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= [d\sigma_{11} - \nu(d\sigma_{22} + d\sigma_{33})]/E + (s_{11}/s_i)G, \\ d\varepsilon_{12} &= ds_{12}/2\mu + (s_{12}/s_i)G, \\ d\varepsilon_{22} &= [d\sigma_{22} - \nu(d\sigma_{11} + d\sigma_{33})]/E + (s_{22}/s_i)G, \\ d\varepsilon_{13} &= ds_{13}/2\mu + (s_{13}/s_i)G, \\ d\varepsilon_{33} &= [d\sigma_{33} - \nu(d\sigma_{22} + d\sigma_{11})]/E + (s_{33}/s_i)G, \\ d\varepsilon_{23} &= ds_{23}/2\mu + (s_{23}/s_i)G, \end{aligned} \quad (35)$$



в котором  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругости.

При решении конкретных задач в каждый момент времени в каждой точке необходимо уточнить условия нагружения и разгрузки, которые связаны с переменными значениями скоростей деформации  $\dot{\xi}_i$  и уровнями интенсивностей напряжений  $s_i$ . Условия нагружения и разгрузки при простом растяжении и сжатии отличаются от исследованного в [31] варианта теории неизотермического течения. Ниже приводятся различные случаи нагружения и разгрузки. Для многих материалов с увеличением скорости деформации  $\dot{\xi}$  кривые деформирования повышаются [13, 34, 35]. Вследствие этого и соотношений (20), (24), (25) при  $ds_i > 0$  и  $d\dot{\xi}_i < 0$  обязательно происходит нагружение (рис. 6а), так как согласно (25)  $ds_i - (\partial\sigma_s / \partial\dot{\xi}_i)d\dot{\xi}_i > 0$ . При  $ds_i < 0$  и  $d\dot{\xi}_i > 0$  наблюдается процесс разгрузки (рис. 6б) и  $ds_i \leq (\partial\sigma_s / \partial\dot{\xi}_i)d\dot{\xi}_i$ . На этих рисунках точка  $A$  обозначает начало рассматриваемого процесса нагружения, а точка  $B$  соответствует состоянию материала в его конце. Стрелка указывает направление протекания процесса для следующего этапа нагружения, соответствующего возрастанию напряжений.

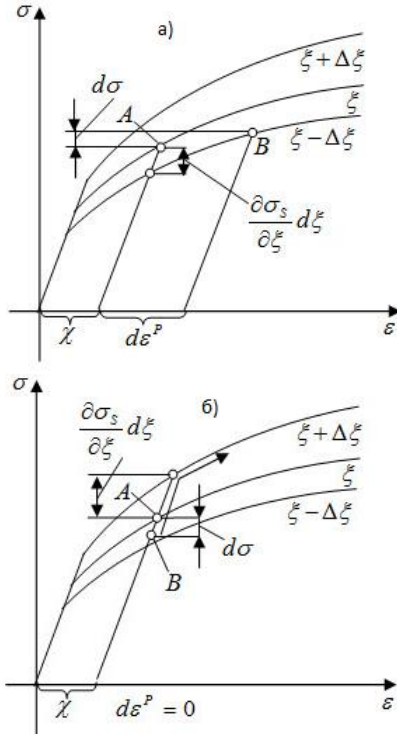


Рис. 6. Зависимость кривых деформирования от скорости деформации:  
 а – процесс нагружения (при  $d\sigma > 0, d\dot{\xi} < 0$ );  
 б – процесс разгрузки (при  $d\sigma < 0, d\dot{\xi} > 0$ )

Более сложные варианты нагружения показаны на рис. 7:

1.  $ds_i > 0, d\dot{\xi}_i > 0, ds > (\partial\sigma_s / \partial\dot{\xi}_i)d\dot{\xi}_i$  (нагрузка) (рис. 7а);
2.  $ds_i > 0, d\dot{\xi}_i > 0, ds < (\partial\sigma_s / \partial\dot{\xi}_i)d\dot{\xi}_i$  (разгрузка) (рис. 7б);
3.  $ds_i < 0, d\dot{\xi}_i < 0, ds > (\partial\sigma_s / \partial\dot{\xi}_i)d\dot{\xi}_i$  (нагрузка) (рис. 7в);
4.  $ds_i < 0, d\dot{\xi}_i < 0, ds < (\partial\sigma_s / \partial\dot{\xi}_i)d\dot{\xi}_i$  (разгрузка) (рис. 7г).

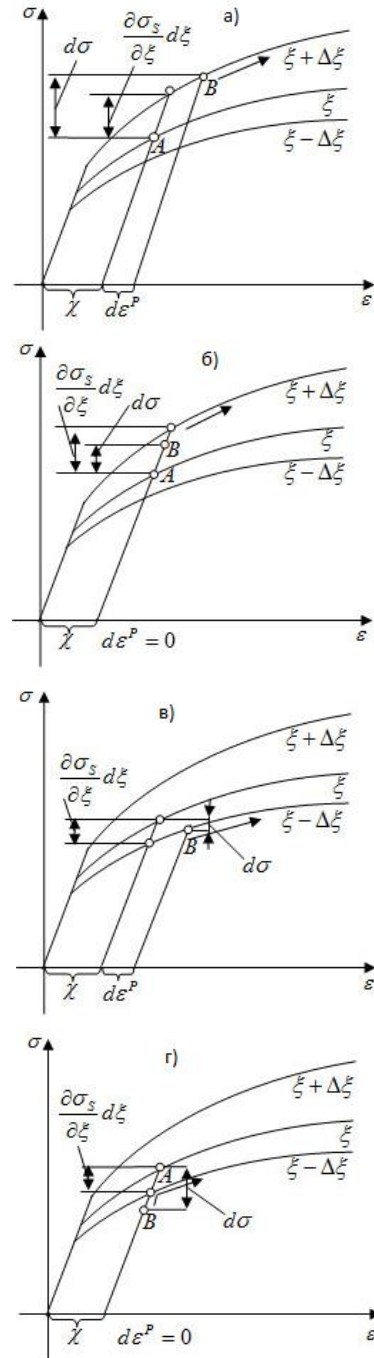


Рис. 7. Сложные варианты нагружения



На рисунке  $ds_i, d\xi_i$  – соответственно изменения напряжений и скоростей деформации,  $(\partial\sigma_s / \partial\xi_i)d\xi_i$  – изменение пределов текучести. Из условия (21) вытекает, что можно выбрать такие изменения скоростей напряжений  $ds_i$  и деформаций  $d\varepsilon_i^p$ , при которых процесс при переменной скорости деформирования в определенном диапазоне будет все время упругим или, наоборот, непрерывно сопровождается накоплением пластических деформаций.

### Заключение

Разработан вариант модифицированной теории течения, связывающей дифференциал пластической деформации с дифференциалами интенсивностей напряжений и скоростей деформации. Введены функции  $F^s(s_i, \chi_i, \xi_i)$ ,  $F^\xi(s_i, \chi_i, \xi_i)$ , определяющие вклад изменений напряжений и скоростей деформации в аккумуляруемую пластическую деформацию. Функции  $F^s(s_i, \chi_i, \xi_i)$ ,  $F^\xi(s_i, \chi_i, \xi_i)$  определяются из экспериментальных кривых деформирования, построенных при различных скоростях деформации. В рамках одноосного нагружения проанализированы условия активного нагружения и разгрузки при изменении основных параметров состояния – напряжения, скорости деформации. Такие экспериментальные факты, как повышение предела текучести, упрочнения, влияние истории изменения скорости деформации, плато деформаций, охватываются предложенной моделью упруго-вязко-пластического деформирования.

### Список литературы

1. Бэлл Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. Конечные деформации. М.: Мир, 1984. 431 с.
2. Васин Р.А., Ленский В.С., Ленский Э.В. Динамические зависимости между напряжениями и деформациями // Механика. Новое в зарубежной науке, 5. Проблемы динамики упруго-пластических сред. М.: Мир, 1975. С. 7–38.
3. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 175 с.
4. Кэмпбелл Дж. Эксперименты при высоких скоростях деформации // Механика: Сб. перев. и обзоров. Иностран. период. лит. 1966. № 5.
5. Хольцер А.Дж. Обзор экспериментальных исследований в области динамической пластичности // Теоретические основы инженерных расчетов: Труды Америк. об-ва инж.-механиков. 1979. Т. 101, № 3. С. 56–67.
6. Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Параметры материалов, чувствительные к скоростям деформации // Новые технологические процессы и надежность ГТД: Научно-технический сборник статей. М.: ЦИАМ, 2008. Вып. 8. С. 7–37.
7. Clark D.S., Duwez P.E. The influence of strain rate on some tensile properties of steel // Proc. Amer. Soc. testing Materials. 1950. V. 50. P. 560–575.
8. Manjoine M. Influence of rate of strain and temperature on yield stresses of mild steel // J. Appl. Mech. 1944. V. 11. P. 211–218.
9. Васильев Л.И., Былина А.С., Загребенникова М.П. О влиянии перемены скорости деформирования на пластическое растяжение // ДАН СССР. 1953. Т. 90. №5. С. 767–769.
10. Schweinghofer A., March W. Phys. stat Solids. 1968. V. 25. 2.
11. Lindholm U.S., Yeakley L.M. Dynamic deformation of single polycrystalline aluminium // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13, 41. P. 41–53.
12. Орленко Л.П. Поведение материалов при интенсивных динамических нагрузках. М.: Машиностроение, 1964.
13. Брагов А.М., Ломунов А.К., Шахалов Г.И. Структура и механические свойства алюминия при высокоскоростной деформации // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения / Горьков. университет. Горький, 1988. С. 129–134.
14. Tietz T.E., Dorn J.E. // Trans. Amer. Soc. Metals. 1949. 41A, №2.
15. Васильев Л.И., Еремина Л.И. О некоторых особенностях пластического растяжения с переменной скоростью // ДАН СССР. 1953. 93, №6. С. 1019–1023.
16. Малышев Б.М. Распространение догрузочных импульсов по натянутой проволоке // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 2. С. 120–124.
17. Клепачко Я. Анализ распространения фронта упругопластической волны в металлическом стержне // Механика: Сб. перев. и обзоров. Иностран. период. лит. 1971. №6. С. 112–130.
18. Шемякин Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1968. 336 с.
19. Cristescu N. Dynamic plasticity. Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1967. P. 608.
20. Малверн Л. Распространение продольных пластических волн с учетом влияния скорости деформации // Механика: Сб. перев. и обзоров. Иностран. период. лит. 1952. Т. 11, № 1. С. 153–161.
21. Соколовский В.В. Распределение упруго-вязко-пластических волн в стержнях // ПММ. 1948. Т. 12, № 3. С. 261–280.
22. Кукуджанов В.Н. Одномерные задачи распространения волн напряжении в стержнях. М.: ВЦ АН СССР, 1977. 55 с.
23. Кукуджанов В.Н. Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 96–111.
24. Kaliski S. On certain equations of dynamics of an elastic/viscoplastic body. The strain hardening properties

and the influence of strain rate // Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 11, 7(1963).

25. Нагди Р.М., Мерч С.А. О механическом поведении вязко-упруго-пластических тел // Прикл. механика: Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер.Е. 1963. Т. 30, № 3. С. 3–12.

26. Эллин Ф., Ся З. Конститутивная модель неупругого поведения материала зависящего от скорости // Упругопластическое течение. Современное машиностроение. Сер. Б, 1991. № 8. С. 129–140.

27. Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. К исследованию поведения упруго-вязко-пластических тел при динамических нагрузках переменной скорости. В.кн: Актуальные проблемы механики деформируемого тела. Алма-Ата: Гылым, 1992. Ч. 2. С 53–68.

28. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

29. Качанов Л.М. Основы теории пластичности.

М.: Наука, 1969. 420 с.

30. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.

31. Биргер И.А., Демьянушко И.В. Теория пластичности при неизотермическом нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 70–77.

32. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наук. думка, 1978. 285 с.

33. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.

34. Lindholm U.S. Some experiment with the split Hopkinson pressure bar // J. Mech. and Phys. Solids. 1964. Vol. 12. №5. P. 317–335.

35. Викторов В.В., Шапиро Г.С. Об определении динамических диаграмм растяжения металлов при умеренно-высоких скоростях деформаций // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. №2. С. 184–187.

## THE MODEL OF ELASTIC-PLASTIC FLOW AT A STRAIN VARIABLE RATE

*L.A. Igumnov, T.D. Karimbayev, Sh. Mamayev*

Numerous experimental studies show a marked influence of strain rate on the yield stress, strength, hardening laws and other parameters of the deformation processes in various materials. Analytical approaches that take into account these effects of strain rate are presented in many researches, and continue to be developed. However, engineering approaches to within experimental and analytical advances describe complex phenomena at strain varying rates, are underdeveloped. Model of elastoplastic flow at strain variable speed, developed under the assumption that the deformation rate is a parameter, can fill this gap. It is built on a set of experimental stress-strain curves obtained at different strain rates.

*Keywords:* elasticity, plasticity, viscosity, fluidity, the strain rate.