

УДК 539.374

**ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ НАГРУЖЕНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ**

© 2013 г.

Л.А. Изумнов<sup>1</sup>, Т.Д. Каримбаев<sup>2</sup>, Ш. Мамаев<sup>3</sup><sup>1</sup>НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского<sup>2</sup>Центральный институт авиационного моторостроения, Москва<sup>3</sup>Московский физико-технический институт[sch\\_mamaev@mail.ru](mailto:sch_mamaev@mail.ru)

Поступила в редакцию 30.11.2012

Обратно-характеристическим методом численно исследуется распространение волны в пластически деформируемых тонких стержнях, чувствительных к изменению скорости деформации. При составлении системы уравнений использован разработанный вариант определяющих соотношений, учитывающий влияние скорости деформации и построенный на множестве экспериментально полученных при различных скоростях деформации кривых зависимостей напряжений от деформаций. В результате решения задачи о распространении упруго-вязко-пластических волн в полубесконечном стержне построена картина волновых полей в характеристической плоскости  $t \sim x$ . Анализ численных расчетов показывает, такие экспериментальные факты, как повышение предела текучести, упрочнения, влияние истории изменения скорости деформации, плато деформаций охватываются предложенной моделью упруго-вязко-пластического деформирования.

*Ключевые слова:* характеристика, дифференциальные соотношения, конечно-разностная схема, пластичность, вязкость, скорость деформации.

**1. Уравнения распространения плоской продольной волны в стержнях**

При исследовании продольного динамического деформирования длинных тонких стержней пренебрегают эффектами движения частиц стержня в направлениях, перпендикулярных к оси, силами инерции, соответствующими движению частиц в поперечном направлении, и предполагают, что поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к оси стержня в течение всего времени деформирования. Распределения напряжений  $\sigma(x, t)$ , скоростей частиц  $v(x, t)$  и деформации  $\varepsilon(x, t)$  являются однородными в каждом поперечном сечении. При этих допущениях уравнение движения стержня и кинематические соотношения принимают вид:

$$\rho \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x}; \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь постоянная  $\rho$  – плотность среды. Определяющее соотношение в форме разработанного в [1] варианта замыкает систему уравнений относительно переменных  $\sigma(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $\varepsilon(x, t)$ , сопровождающих распространение плос-

ких продольных упруго-вязко-пластических волн в тонких стержнях:

$$\frac{\partial \varepsilon(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} = F(\sigma, \xi, \chi). \quad (2)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости, а правая часть представляет собой функцию

$$F(\sigma, \xi, \chi) = \begin{cases} 0, & ds_i \leq \frac{\partial \sigma_s}{\partial \xi_i} d\xi_i, \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (F^s ds_i - F^\xi d\xi_i) \times \\ \times \left( ds_i - \frac{\partial \sigma_s}{\partial \xi_i} d\xi_i \right), & ds_i > \frac{\partial \sigma_s}{\partial \xi_i} d\xi_i. \end{cases} \quad (3)$$

Приведенные уравнения решаются при однородных начальных условиях

$$\sigma(x, 0) = v(x, 0) = \varepsilon(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq 0 \text{ и } t = 0 \quad (4)$$

и граничных условиях, которые в общем виде можно записать в форме

$$A_1 \cdot \sigma(0, t) + B_1 \cdot v(0, t) = Q_1(t) \text{ при } x = 0, \quad (5a)$$

$$A_2 \cdot \sigma(L, t) + B_2 \cdot v(L, t) = Q_2(t) \text{ при } x = L. \quad (5b)$$

Здесь  $A_1, B_1, A_2, B_2$  – постоянные. Определитель из коэффициентов  $A_i, B_i$  должен быть отличен от нуля. Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1), (2) при начальных

(4) и граничных (5) условиях. Система уравнений (1), (2) и соответствующие условия (4), (5) далее используется в виде, преобразованном к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x/l, \quad \bar{t} = tc/l, \quad \bar{\sigma} = \sigma/\sigma_s^c, \\ \bar{\varepsilon} &= \varepsilon/\varepsilon_s^c, \quad \bar{v} = v/c\varepsilon_s^c, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $c = (E/\rho)^{0.5}$  – скорость распространения продольной упругой волны в стержне;  $l$  – характерная длина;  $\sigma_s^c, \varepsilon_s^c$  – напряжение и деформация, соответствующие статическому пределу текучести. Опуская черточки над безразмерными переменными, приведенную выше систему уравнений (1), (2) можно представить в векторной форме относительно вектора искомых переменных  $\bar{U} = \{v, \varepsilon, \sigma\}$ :

$$\bar{U}, t + A\bar{U}, x + \bar{B} = 0, \quad (7)$$

где запятая означает производную по соответствующей переменной;  $\bar{B}$  – вектор правых частей, зависящий от решения  $\bar{U}$ , и  $A$  – матрица, состоящая из коэффициентов системы, представляются в виде

$$\bar{B} = \{0, 0, F\}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Векторное уравнение (7) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с нелинейным слагаемым  $\bar{B}$ , являющимся вектор-функцией от искомых переменных  $\sigma, \varepsilon, \xi$ . Общая теория этих уравнений изложена в [2].

Собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$ , соответствующие характеристическим направлениям, определяются из

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad (9)$$

где  $I$  – единичная матрица. Они являются вещественными и различными, а система уравнений (7) – гиперболической [2]. Через каждую точку проходят три характеристики, соответствующие трем характеристическим направлениям:

$$\frac{dx}{dt} = -1, \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 0. \quad (10)$$

Одна из характеристик совпадает с направлением оси  $t$ , а две остальные наклонные. Для приведения системы уравнений к характеристической форме находят левые собственные векторы матрицы  $A$ :

$$\bar{l}^{(i)} A = \lambda_i \bar{l}^{(i)}, \quad (11)$$

$$\bar{l}^{(1)} = (1, 0, 1), \quad \bar{l}^{(2)} = (-1, 0, 1), \quad \bar{l}^{(3)} = (0, -1, 1).$$

Умножив векторное уравнение (7) на левые собственные векторы, получают дифференциальные соотношения вдоль соответствующих характеристик:

$$dx = -dt, \quad d\sigma + dv = -F(\sigma, \xi, \chi) dt, \quad (12)$$

$$dx = dt, \quad d\sigma - dv = -F(\sigma, \xi, \chi) dt, \quad (13)$$

$$dx = 0, \quad d\varepsilon - d\sigma = F(\sigma, \xi, \chi) dt. \quad (14)$$

Таким образом, используя метод характеристик интегрирование системы уравнений (7) можно заменить интегрированием дифференциальных соотношений (12)–(14) вдоль характеристических линий (10).

## 2. Конечно-разностное представление разрешающих уравнений

Решение задачи отыскивается на характеристической плоскости  $(x, t)$  по слоям времени  $t = \text{const}$ . В рассматриваемой области  $(x, t)$  вводится прямоугольная сетка, образованная линиями  $x_i = i \cdot \Delta x$ ,  $(i = 0, 1, \dots, N)$ ,  $t^j = j \Delta t$   $(j = 0, 1, 2, \dots)$  с шагами  $\Delta x, \Delta t$  по пространственной переменной и времени соответственно. В этом методе необходимо установить значения искомых функций в узловых точках верхнего слоя по времени  $\sigma_i^{j+1}, v_i^{j+1}, \varepsilon_i^{j+1}$  по известным их значениям в точках на предыдущем слое по времени  $t^j = j \Delta t$ . Для этого используются дифференциальные соотношения (12)–(14), записанные вдоль характеристик, проведённых через рассматриваемую точку. Из узловой точки  $(i, j+1)$  проводятся характеристические линии с наклонами  $\lambda_k$  до пересечения с нижним слоем по времени  $t^j = j \Delta t$ . В рассматриваемой задаче наклоны характеристик постоянные и они проходят под углом  $45^\circ$  к линии  $t^j = j \Delta t$ , поэтому точки пересечения характеристик с нижним слоем по времени совпадают с узловыми точками сетки. Затем, интегрируя соотношения (12)–(14) вдоль характеристик с отрицательным  $(-\lambda_k)$ , положительным  $(\lambda_k)$  наклонами к линии  $t^j = j \Delta t$ , а также вдоль оси времени  $t$  ( $\lambda_3 = 0$ ), можно получить разрешающую систему конечно-разностных уравнений для определения неизвестных величин  $\sigma_i^{j+1}, v_i^{j+1}, \varepsilon_i^{j+1}$  в временном слое  $t^{j+1} = (j+1) \Delta t$  по известным их значениям в предыдущем временном слое  $t^j = j \Delta t$ :

$$\begin{cases} (\sigma - \nu)_i^{j+1} - (\sigma - \nu)_{i-1}^j = -\frac{\Delta t}{2}(F_i^{j+1} + F_{i-1}^j), \\ (\sigma + \nu)_i^{j+1} - (\sigma + \nu)_{i+1}^j = -\frac{\Delta t}{2}(F_i^{j+1} + F_{i+1}^j), \\ (\varepsilon - \sigma)_i^{j+1} - (\varepsilon - \sigma)_i^j = \frac{\Delta t}{2}(F_i^{j+1} + F_i^j). \end{cases} \quad (15)$$

Шаги по времени  $\Delta t$  и пространственной переменной  $\Delta x$  выбираются в соответствии с требованием условия устойчивости конечно-разностной схемы. Принятый расчетный алгоритм принадлежит к явной двухслойной конечно-разностной схеме с условием устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [3]

$$c \Delta t / \Delta x \leq 1. \quad (16)$$

При использовании явной схемы интегрирования система трех уравнений (15) полностью определяет состояние стержня в момент времени  $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$ , если известны их значения в момент времени  $t^j = j\Delta t$  во всех внутренних точках стержня  $x > 0$ . При  $x=0$  и  $x=L$  граничные условия (5), уравнение вдоль характеристики  $dx=0$  и вдоль соответствующей характеристики  $dx=\pm dt$  позволяют полностью определить неизвестные величины в момент времени  $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$ .

**2.1. Разрешающие уравнения во внутренних точках.** Во внутренних узловых точках  $x_i = i \cdot \Delta x$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) неизвестные величины  $\sigma_i^{j+1}$ ,  $\varepsilon_i^{j+1}$ ,  $\nu_i^{j+1}$  в момент времени  $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений (15):

$$\begin{cases} \sigma_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma - \nu)_{i-1}^j + (\sigma + \nu)_{i+1}^j - \frac{\Delta t}{2} (2F_i^{j+1} + F_{i-1}^j + F_{i+1}^j) \right], \\ \nu_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma + \nu)_{i+1}^j - (\sigma - \nu)_{i-1}^j - \frac{\Delta t}{2} (F_{i+1}^j - F_{i-1}^j) \right], \\ \varepsilon_i^{j+1} = \sigma_i^{j+1} + (\varepsilon - \sigma)_i^j + \frac{\Delta t}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j). \end{cases} \quad (17)$$

**2.2. Разрешающие уравнения на левой границе.** На левой границе характеристика с положительным ( $\lambda_k$ ) наклоном выходит за предел рассматриваемой области. В связи с этим в системе уравнений (15) нельзя использовать уравнение, соответствующее этой характеристике. Если присоединить к оставшимся двум уравнениям граничное условие (5а), то получится замкнутая система уравнений в точке  $x=0$ .

$$\begin{cases} A_1 \sigma_0^{j+1} + B_1 \nu_0^{j+1} = Q_1^{j+1}, \\ (\sigma + \nu)_0^{j+1} - (\sigma + \nu)_1^j = -\frac{\Delta t}{2}(F_0^{j+1} + F_1^j), \\ (\varepsilon - \sigma)_0^{j+1} - (\varepsilon - \sigma)_0^j = \frac{\Delta t}{2}(F_0^{j+1} + F_0^j). \end{cases} \quad (18)$$

**2.3. Разрешающие уравнения на правой границе.** На правой границе  $x_N = N \cdot \Delta x$  характеристика с отрицательным ( $-\lambda_k$ ) наклоном выходит за предел рассматриваемой области и второе уравнение системы (15) не может быть использовано. Оно заменяется на заданное граничное условие (5б):

$$\begin{cases} A_2 \sigma_N^{j+1} + B_2 \nu_N^{j+1} = Q_2^{j+1}, \\ (\sigma - \nu)_N^{j+1} - (\sigma - \nu)_{N-1}^j = \frac{\Delta t}{2}(F_N^{j+1} + F_{N-1}^j), \\ (\varepsilon - \sigma)_N^{j+1} - (\varepsilon - \sigma)_N^j = \frac{\Delta t}{2}(F_N^{j+1} + F_N^j). \end{cases} \quad (19)$$

**2.4. Методика проведения вычислений.** В приведенных разрешающих уравнениях (17)–(19) в правых частях встречаются значения функции  $F_i^{j+1}$  в исследуемый момент времени  $t^{j+1} = (j+1)\Delta t$ . В этот момент времени они заранее неизвестны. Для определения этой функции  $F$  в соответствии с (3) требуется знать значения скорости деформации  $\xi = \partial \varepsilon / \partial t$  в данной точке. Последние находятся путем аппроксимации вычисленных величин деформации  $\varepsilon_i^{j+1}$  с помощью соотношения

$$\xi_i^{j+1} = (\varepsilon_i^{j+1} - \varepsilon_i^j) / \Delta t. \quad (20)$$

Функция  $F_i^{j+1}(\sigma_i^{j+1}, \varepsilon_i^{j+1}, \nu_i^{j+1})$  зависит от результатов решения системы алгебраических уравнений (17)–(19). Для решения разрешающей системы уравнений используется метод последовательных решений, суть которого заключается в следующем. Сначала предполагается, что  $F_i^{j+1}(\sigma_i^{j+1}, \varepsilon_i^{j+1}, \nu_i^{j+1}) = 0$ , и решается чисто упругая (линейная) задача. В результате получается первое приближенное значение искомых величин в исследуемой точке стержня  $(\sigma_i^{j+1})^1, (\varepsilon_i^{j+1})^1, (\nu_i^{j+1})^1$ . По известным значениям  $\varepsilon_i^{j+1}$  и  $\varepsilon_i^j$  и формуле (20) находится значение скорости деформации  $\xi_i^{j+1}$ . Затем проверяется условие нагрузки и разгрузки с целью определения границы раздела между областями упругого и пластического деформирования. При выполнении условия  $ds_i \leq (\partial \sigma_s / \partial \xi_i) d\xi_i$  в точке реал-

лизуется упругий процесс и считается, что решение в исследуемой точке найдено, поэтому следует перейти к расчету в следующей точке по координате. Если указанное условие  $ds_i \leq (\partial\sigma_s/\partial\xi_i)d\xi_i$  не выполняется, то в данной точке реализуется процесс активного нагружения. В соответствии с основным предположением точка с напряженно-деформированным состоянием  $\sigma_i^{j+1}, \varepsilon_i^{j+1}, v_i^{j+1}$  должна лежать на поверхности деформирования. С целью проверки этого условия, аппроксимированием и интерполированием экспериментально заданных кривых деформирования строится расчетная кривая деформирования  $\sigma\sim\varepsilon$ , соответствующая расчетной скорости деформации  $\dot{\xi}_i^{j+1}$ . На этой кривой по найденному значению деформации  $\varepsilon_i^{j+1}$  с помощью линейной интерполяции находится соответствующее экспериментальное текущее значение напряжения  $\sigma_i^{\text{эк}}$ . Если относительная разность между найденным расчетным значением  $\sigma_i^{j+1}$  и его экспериментальным значением  $\sigma_i^{\text{эк}}$  оказывается меньше некоторой заданной малой величины  $\delta$

$$\left|(\sigma_i^{j+1} - \sigma_i^{\text{эк}}) / \sigma_i^{\text{эк}}\right| \leq \delta, \quad (21)$$

то считается, что решение в данной точке найдено и следует перейти к расчету напряженно-деформированного состояния в следующей точке. Если условие (21) не выполняется, то по найденным в первом приближении значениям величин  $(\sigma_i^{j+1})^1, (\varepsilon_i^{j+1})^1, (v_i^{j+1})^1$  находится значение функции  $(F_i^{j+1})^1$ , которое характеризует скорость пластической деформации

$$(F_i^{j+1})^1 = \frac{\left[1/(E_{r,i}^{j+1}) - 1/E\right] \cdot \left[(\sigma_i^{j+1})^1 - (\sigma_s^{j+1})^1\right]}{\Delta t}. \quad (22)$$

Тогда правые части уравнений (17)–(19) становятся определенными и вновь решается система линейных уравнений, как и в упругой задаче, но с некоторыми установленными в соответствии с (20) исходными скоростями деформации  $\dot{\xi}_i^{j+1}$  и, в соответствии с (22), известной правой частью. В результате решения этой задачи находится второе приближенное значение искомым величин  $(\sigma_i^{j+1})^2, (\varepsilon_i^{j+1})^2, (v_i^{j+1})^2$ . Затем вновь находится скорость деформации  $\dot{\xi}_i^{j+1}$ , строится текущая кривая деформирования  $\sigma\sim\varepsilon$ , соответствующая этой скорости деформации  $\dot{\xi}_i^{j+1}$ . На этой кривой по известному значению деформации  $(\varepsilon_i^{j+1})^2$  находится соответствующее

экспериментальное значение напряжения  $\sigma_i^{\text{эк}} \left( (\varepsilon_i^{j+1})^2, (\xi_i^{j+1})^2 \right)$  и проверяется условие (21). Если условие (21) не выполняется, то по формуле (22) вновь уточняется значение функции  $F_i^{j+1}$  и по формулам (17)–(19) находится следующее приближение к решению нелинейной системы уравнений (7). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие (21). Использованный метод является развитием метода упругих решений на упруго-вязко-пластические задачи механики твердого тела. Метод эффективен – через 3-4 итерации сходимость обеспечивается.

### 3. Эффект скорости нагружения на распространение продольной упруго-вязко-пластической волны в полубесконечном стержне

На основе предложенных определяющих соотношений (2) для тел, чувствительных к скоростям деформирования, и описанным методом решения задач проведен анализ влияния скорости деформирования на распространение упруго-вязко-пластических волн в полубесконечном стержне.

**3.1. Постановка задачи.** Рассматривается полубесконечный стержень  $x \geq 0$ . На конце  $x = 0$  стержня действует нестационарная нагрузка  $\sigma = \sigma(t)$ , линейно возрастающая в начале до момента времени  $t_0$  и затем линейно убывающая до нуля:

$$\sigma(0, t) = \begin{cases} At, & t \leq t_0, \\ At_0 \left[1 - (t - t_0)/(t_1 - t_0)\right], & t_0 < t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь  $A$  – постоянная, характеризующая скорость возрастания внешней нагрузки. Скорость убывания внешней нагрузки регулируется выбором времени  $t_1$  в выражении  $At_0/(t_1 - t_0)$ . Стержень  $x \geq 0$  в начальный момент времени находится в состоянии покоя и удовлетворяет условиям (4).

Исследуется влияние скорости изменения внешней нагрузки на распространение продольных волн в стержне. После приведения к безразмерному виду в соответствии с (6) под коэффициентом  $A$  следует понимать

$$\bar{A} = Ac / (l\sigma_s^c), \quad \bar{t}_0 = t_0 c / l, \quad \bar{t}_1 = t_1 c / l. \quad (24)$$

При  $t > 0$  от начального сечения  $x = 0$  начи-

нает распространяться возмущение со скоростью упругих волн. Перед фронтом волны точки стержня находятся в состоянии покоя

$$\sigma = v = \varepsilon = 0 \text{ при } x \geq t. \quad (25)$$

**3.2 Анализ численных результатов.** С целью изучения влияния скорости убывания внешней нагрузки параметр  $A$  и  $t_0$  принимаются постоянными  $A = 12$ ,  $t_0 = 0.25$ . Шаги по времени и пространственной переменной  $\Delta x = \Delta t = 0.025$  выбирались согласно условию устойчивости (16). Параметр  $t_1$  меняется:  $t_1 = 6.25, 24.25, 48.25$ . С целью изучения влияния скорости деформирования на искомые величины в расчетах использовались экспериментальные кривые деформирования, заимствованные из работы [4] для алюминия ( $E = 710$  ГПа,  $\rho = 2.7625$  кг·с<sup>2</sup>/мм<sup>4</sup>) и соответствующие различным скоростям деформации  $\xi_1^{\text{экс}} = 3.33 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $\xi_2^{\text{экс}} = 1.67 \cdot 10^{-3}$  с<sup>-1</sup>,  $\xi_3^{\text{экс}} = 5.6 \cdot 10^{-1}$  с<sup>-1</sup>,  $\xi_4^{\text{экс}} = 1.75 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>. Принятые в расчетах кривые  $\sigma \sim \varepsilon$  являются монотонно-возрастающими по  $\varepsilon$ ,  $\xi$  функциями. Кроме того, для всех  $\varepsilon$  производная  $d\sigma/d\varepsilon$  является монотонно-убывающей ( $d^2\sigma/d\varepsilon^2 > 0$ ), т. е. касательный модуль к кривой деформирования с возрастанием деформации  $\varepsilon$  уменьшается и кривая является выпуклой, что обеспечивает непрерывный волновой процесс.

Результаты вычислений представлены в виде графиков. На рис. 1 представлены графики распределения напряжений  $\sigma$  (1–4), деформаций  $\varepsilon$  (1'–4') вдоль стержня в отдельные фиксированные моменты времени, которые обозначены соответствующими номерами. На кривых 1, 2, 3, 4 жирными точками обозначены максимумы напряжений для соответствующих моментов времени. Из приведенных графиков следует, что с возрастанием времени сечения, в которых достигаются максимальные значения напряжения, удаляются от торца, где произведен удар, и максимумы напряжения уменьшаются. Из графиков 1', 2', 3', 4' следует, что максимальное значение деформации достигается на торце стержня и с удалением от него значения деформаций убывают. С возрастанием времени кривые становятся более пологими. Это соответствует отставанию вязкопластических волн от упругих из-за того, что скорость распространения вязкопластических волн меньше скорости упругих волн. Из графиков распределения напряжений и деформаций по координате  $x$  следует, что безразмерные пределы текучести по напряжениям и деформациям, соответствующие этим кри-

вым, равны между собой, т. е.  $\sigma_s = \varepsilon_s = 1.2$ . Эти значения пределов текучести превосходят статические пределы текучести  $\sigma_s^c = \varepsilon_s^c = 1$ . На передней части графика за пределом текучести есть горизонтальный участок. Длина этого участка растет во времени. На этом участке величина напряжений, деформаций меньше, чем предел текучести  $\sigma_s$ . На этом участке скорости деформаций  $\xi$  меньше, чем скорости деформаций  $\xi$  на упругом участке. Изменения скорости частиц аналогичны изменениям напряжений и деформаций  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ .

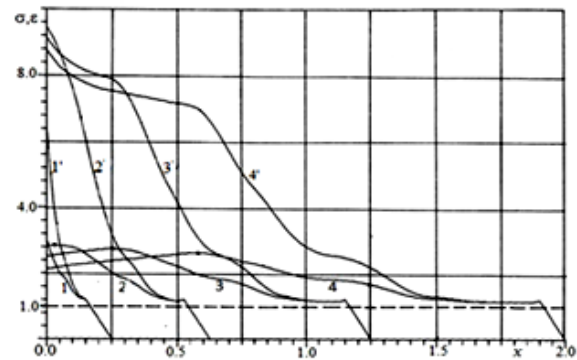


Рис. 1.

На рис. 2 представлены графики изменения напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$  во времени  $t$  для различных сечений стержня ( $x = 0; 0.05; 0.125; 0.25; 0.5$ ). Номерами 1–5 обозначены напряжения  $\sigma$ , 1'–5' – деформации  $\varepsilon$ . На графике видно отставание деформации от соответствующего напряжения вблизи торца и постепенное их выравнивание по мере удаления от него, что характеризует влияние вязкости при  $\partial\sigma/\partial t < 0$ ,  $\xi > 0$ .

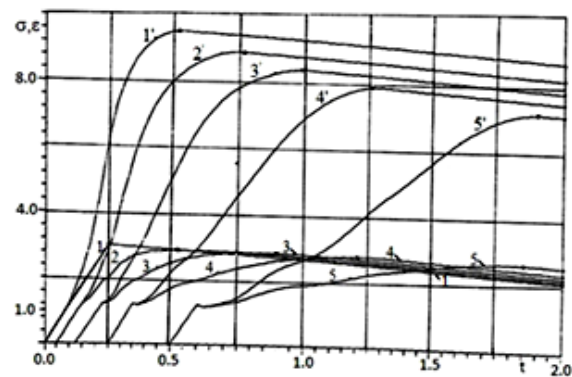


Рис. 2.

На рис. 3 приведена волновая картина в характеристической плоскости  $x \sim t$  для различных скоростей убывания прикладываемой

нагрузки т.е., для различных времен действия нагрузки  $t_1=6.25, 12.25, 24.25$  при  $A=12$ . На графике видно, что область распространения волн делится на шесть подобластей. Область I – это невозмущенная область. Она находится в состоянии покоя. Область II – это область упругих волн. В ней значения напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$  возрастают. Область III соответствует предельному упругому состоянию стержня. Здесь напряжение  $\sigma$  и деформация  $\varepsilon$  принимают постоянное значение. Область IV – это область упруго-вязко-пластических волн. В ней напряжения  $\sigma$  и вязкие и пластические составляющие деформации возрастают. В области V напряжения  $\sigma$  убывают, а деформация  $\varepsilon$  продолжает возрастать за счет проявления вязких свойств материала. Область VI – эта область упругих волн разгрузки, в ней и напряжения  $\sigma$ , и деформации  $\varepsilon$  убывают. Указанные области ограничены линиями, физический смысл которых приводится далее. Линия 1 – это передний фронт упругой волны, которая является границей возмущенной и покоящейся области. Линия 2 – задний фронт упругой волны. Линия 2<sup>1</sup> – соответствует переднему фронту упруго-вязко-пластических волн. Линии, соответствующие максимуму деформаций и напряжений, называют соответственно волнами разгрузки деформации и напряжения. Кривые 3, 4, 5 – волны разгрузки деформаций  $\varepsilon$ , а 3', 4', 5' – волны разгрузки напряжений  $\sigma$  соответственно при  $t_1=6.25, 12.25, 24.25$ . Из рис. 3 видно, что область, лежащая между волнами разгрузки деформации и напряжения, расширяется с уменьшением степени убывания скорости прикладываемой нагрузки. При этом протяженность распространения этой области тем меньше, чем выше степень убывания прикладываемой нагрузки. Такая зависимость от скорости прикладываемой нагрузки проявляется в сочетании с вязкими свойствами материала.

На рис. 4 приведены зависимости между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  для сечений  $x = 0; 0.05; 0.25; 0.5$ , которые обозначены соответственно номерами 1–5. Кривая 1 отчетливо показывает влияния вязкости. Действительно, напряжение  $\sigma$  падает на участке  $\varepsilon > 6.2$ , в то время как деформация все еще продолжает расти. Из сравнения этих кривых следует, что они в упругой области одинаковы, а в пластической области отличаются. Для достижения одинакового уровня деформаций с удалением рассмат-

риваемой точки от торца требуется меньший уровень напряжения. Эти кривые подтверждают, что влияние вязкости с удалением рассматриваемого сечения от торца убывает.

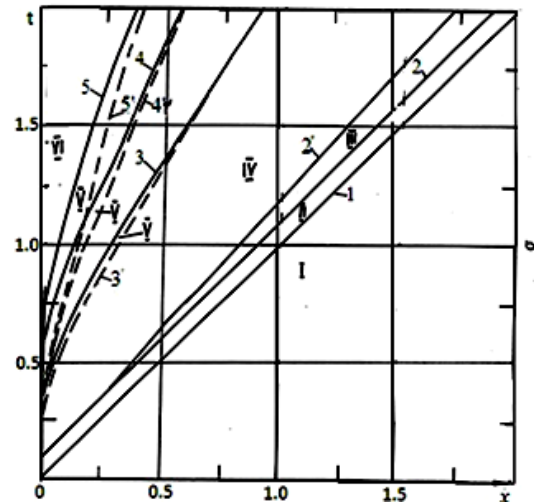


Рис. 3. Волновая картина в характеристической плоскости  $x-t$ .

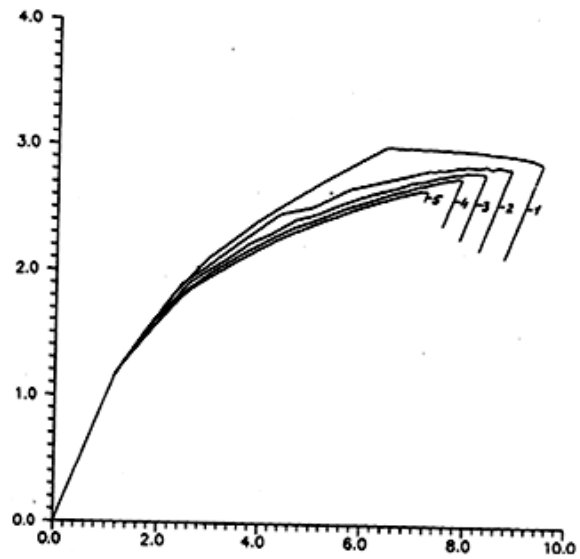


Рис. 4. Зависимость между напряжением и деформацией для сечений  $x = 0, 0.05, 0.25, 0.5$ .

На рис. 5 приведено распределение напряжений  $\sigma$  (кривые 1а, 2а) и деформаций  $\varepsilon$  (кривые 1б, 2б) вдоль стержня для моментов времени  $t = 2(1); 2.5(2)$  при  $A=12, B=0.05$ . Время действия нагрузки равно  $t = 1.75$ . Из этих графиков следует, что на начальных сечениях, когда  $x=0.25$ , напряжения  $\sigma$  и деформации  $\varepsilon$  для моментов времени  $t=2; 2.5$  совпадают, т.е. дальнейшее поведение этих функций в этих точках не зависит от времени. Это область остаточных деформаций.

В экспериментах при ударе с постоянной скоростью на торце, примыкающем к ударяемому концу стержня, наблюдается область постоянных деформаций, так называемое «плато» деформации. Для численной проверки выполнения этого экспериментального факта рассмотрена задача, в которой на конце полубесконечного стержня приложена нестационарная нагрузка. Заданная нагрузка сначала возрастает до максимального значения  $\sigma^{\max}$ , затем сохраняет свое постоянное значение  $\sigma^{\max}$

$$\sigma(0,t) = \begin{cases} At & \text{при } t \leq t_0, \\ At_0 & \text{при } t > t_0, \end{cases} \quad (26)$$

где  $A=10$ ,  $t_0=0.25$ .

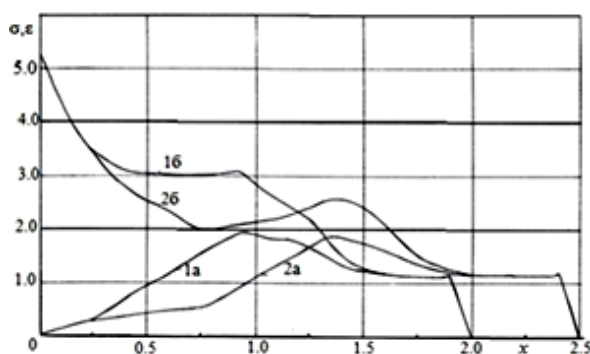


Рис. 5.

На рис. 6 представлены распределения напряжений  $\sigma$  (кривые 1а, 2а, 3а) и деформации  $\epsilon$  (кривые 1б, 2б, 3б) вдоль стержня для соответствующих моментов времени  $t=0.25$ ;  $0.5$ ;  $0.75$ .

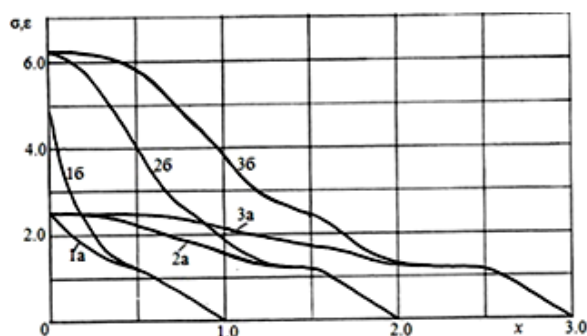


Рис. 6.

#### THE INFLUENCE OF STRAIN RATE ON THE PROPAGATION OF A PLANE LONGITUDINAL ELASTIC-VISCO-PLASTIC WAVE IN A SEMI-INFINITE ROD

*L.A. Igumnov, T.D. Karimbayev, Sh. Mamayev*

The wave propagation in a plastically deformable thin rods that are sensitive to changes of strain rate is investigated numerically by back-characteristic technique. The developed option of defining relations, taking into account the effect of strain rate and built on a set of experimentally obtained stress-strain curves at different strain rates is used in drawing up a system of equations. The wave fields in the characteristic plane  $t \sim x$  are presented by solution of the propagation problem of elastic-visco-plastic waves in a semi-infinite rod. The numerical calculations are shown such experimental facts as higher yield strength, hardening, the effect of changes in the history of the strain rate deformation of the plateau are covered by the proposed model of visco-elastic-plastic flow.

*Keywords:* characteristics, differential relations, finite difference scheme, plasticity, viscosity, speed of deformation.

На этих графиках видно, что со временем на участках, примыкающих к воспринимающему удар торцу  $x=0$ , наблюдается область постоянных деформаций, что и является подтверждением экспериментально наблюдаемого результата.

#### Выводы.

Для задачи о распространении упруго-вязко-пластических волн в стержне конечной длины получены разрешающие уравнения, которые используются на одном шаге итерации при решении нелинейных уравнений последовательными «упругими» приближениями. В результате решения задачи о распространении упруго-вязко-пластических волн в полубесконечном стержне получена картина волновых полей в характеристической плоскости  $t \sim x$ . Такие экспериментальные факты, как повышение предела текучести, упрочнения, влияние истории изменения скорости деформации, плато деформаций и другие эффекты скорости деформаций охватываются предложенной моделью упруго-вязко-пластического деформирования.

#### Список литературы

1. Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. К исследованию поведения упруго-вязкопластических тел при динамических нагрузках переменной скорости // В.кн: Актуальные проблемы механики деформируемого тела. Алма-Ата: Гылым, 1992. Часть 2. С. 53–68.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М: Мир, 1964. 830 с.
3. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Lindholm U.S. Some experiment with the split Hopkinson pressure bar // J. Mech. and Phys. Solids. 1964. Vol. 12, № 5. P. 317–335.