М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.Н. Нестеров

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

nesterov.pn@gmail.com

Поступила в редакцию 01.11.2012

С помощью идей метода усреднения и варианта асимптотической теоремы Н. Левинсона изучается задача асимптотического интегрирования некоторого класса систем функционально-дифференциальных уравнений, содержащих колебательно убывающие коэффициенты.

Ключевые слова: асимптотическое интегрирование, функционально-дифференциальные уравнения, метод усреднения, теорема Левинсона, колебательно убывающие коэффициенты.

1. Постановка задачи

Задаче асимптотического интегрирования линейных функционально-дифференциальных уравнений, а также систем таких уравнений, посвящено значительное число работ. Первые асимптотические теоремы для скалярных уравнений с запаздывающим аргументом были предложены в книге Р. Беллмана и К. Кука [1] (см. также обзор в [2, глава 9]). Существенные результаты были затем получены в работах R.D. Driver [3], J.R. Haddock и R.J. Sacker [4], в цикле работ O. Arino, I. Györi и M. Pituk [5–9], а также в работах S. Ai [10], J.S. Cassel и Z. Hou [11–13]. Одно из направлений в решении задачи асимптотического интегрирования систем функционально-дифференциальных уравнений посвящено получению аналогов известных теорем Н. Левинсона и Хартмана–Винтнера для систем такого типа, а также приведению систем уравнений к такому виду, который позволял бы воспользоваться соответствующими результатами.

В настоящей работе изучается вопрос построения асимптотики решений некоторого класса систем линейных функционально-дифференциальных уравнений, содержащих колебательно убывающие величины. Особенностью рассматриваемого класса систем является их «близость» при $t \to \infty$ к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Данное обстоятельство во многом упрощает процесс построения асимптотических формул, позволяя применять некоторые известные приемы асимптотического интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Метод асимптотического интегрирования

В основе используемой авторами методики лежат асимптотические теоремы, полученные J.S. Cassel и Z. Hou в работе [11]. Эти результаты распространяют известные результаты Н. Левинсона (см. [14, 15]) на случай систем функционально-дифференциальных уравнений, близких в определенном смысле к системам обыкновенных дифференциальных уравнений с диагональной матрицей.

Рассмотрим следующую линейную систему:

$$\dot{x} = \Lambda(t)x(t) + R(t, x_t). \qquad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ – элемент пространства $C_h \equiv C([-h,0], \mathbb{C}^m)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ с нормой

$$\|\phi\| = \sup_{-h\le\theta\le 0} |\phi(\theta)|.$$

Далее, $\Lambda(t) = (\mathrm{diag}\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t))$ – диагональная матрица, элементами которой являются локально интегрируемые на $[t_0, \infty)$ функции со значениями в $\mathbb{C}$; $R(t,\cdot)$ – линейный ограничен-

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракт № 14.B37.21.0247.

ный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\phi \in C_h$ функция $R(t,\phi)$ измерима по Лебегу при $t \geq t_0$ и для всех $\phi \in C_h$,

$$|R(t,\phi)| \leq \gamma(t)\|\phi\|, \qquad \gamma(t) \in L_1[t_0,\infty). \tag{2}$$

Операторы с такими свойствами будем в дальнейшем называть операторами из класса $L_1^h[t_0,\infty)$.

По аналогии с системами обыкновенных дифференциальных уравнений системы функционально-дифференциальных уравнений вида (1) будем называть L-диагональными.

Будем говорить, что некоторая функция $x(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ удовлетворяет системе (1) при $t \geq T$, если $x(t)$ непрерывна на множестве $[T-h,\infty)$, абсолютно непрерывна на множестве $[T,\infty)$ и равенство (1) выполнено почти всюду на $[T,\infty)$. При сформулированных условиях для любого $\phi \in C_h$ и любого $T \geq t_0$ существует единственная функция $x(t)$, которая удовлетворяет системе (1) с начальным условием $x_T = \phi$ (см. [2]). Функцию $x(t)$ будет называть решением системы (1) с начальным условием $x_T = \phi$.

Пусть для каждой пары индексов (j,k) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}(\lambda_j(s) - \lambda_k(s))ds \leq K_1, \qquad t_2 \geq t_1 \geq t_0, \tag{3}$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}(\lambda_j(s) - \lambda_k(s))ds \geq K_2, \qquad t_2 \geq t_1 \geq t_0, \tag{4}$$

где K_1, K_2 – некоторые постоянные. Кроме того, предположим, что для любого $j = 1,\ldots,m$ выполнено неравенство

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{Re}\lambda_j(s)ds \geq K_3 \qquad t \geq t_0, \quad 0 \leq \tau \leq h, \tag{5}$$

где K_3 – некоторая постоянная.

Имеет место следующая теорема (см. [11, теорема 2], а также замечание после этой теоремы).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3), (4) и (5). Тогда при достаточно больших $T \geq t_0$ и любом $j = 1,\ldots,m$ существует непрерывная функция $x_j(t) : [T-h,\infty) \to \mathbb{C}^m$, которая удовлетворяет системе уравнений (1) при $t \geq T$ и допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:*

$$x_j(t) = [e_j + o(1)]\exp\left\{\int_T^t \lambda_j(s)ds\right\}, \tag{6}$$

где $e_j = (0,\ldots,0,\overset{(j)}{1},0,\ldots,0)$.

Асимптотика произвольного решения системы (1) при $t \to \infty$ описывается следующей теоремой [11, теорема 5].

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда, если функция $x(t)$ удовлетворяет системе (1) при $t \geq T$, то существуют константы $c_1,\ldots,c_m$ такие, что*

$$x(t) = \sum_{j=1}^m c_j x_j(t) + o(e^{-\beta t}), \qquad t \to \infty, \tag{7}$$

где функции $x_j(t)$ ($j = 1,\ldots,m$) имеют асимптотику вида (6), а величина β произвольна.

Замечание. Константы $c_1,\ldots,c_m$ можно рассматривать как линейные непрерывные функционалы $c_1(T,\cdot),\ldots,c_m(T,\cdot)$, которые определены на пространстве начальных функций $x_T = \phi$, где $\phi \in C_h$ (см. [11, теоремы 4 и 5], а также [10, Теорема 5]). Кроме того, можно показать, что для любого $i = 1,\ldots,m$ и для всех достаточно больших $T \geq t_0$

$$|c_i(T,\phi)| \leq \hat{K}\|\phi\|, \qquad \phi \in C_h,$$

где константа $\hat{K}$ может быть выбрана не зависящей от T.

В нашей работе исследуется вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} = {} & \sum_{i=1}^n v_i(t)B_i(t,x_t) + \\ & + \sum_{1\leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t,x_t) + \ldots + \\ & + \sum_{1\leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)B_{i_1\ldots i_k}(t,x_t) + R(t,x_t). \end{aligned} \tag{8}$$

В этой системе $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ – линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что либо все эти операторы периодичны по переменной t с периодом $\omega > 0$, т.е.

$$B_{i_1\ldots i_l}(t+\omega,\phi) \equiv B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi), \quad \phi \in C_h, \tag{9}$$

либо

$$B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\phi), \quad \phi \in C_h. \tag{10}$$

В формуле (10) $\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\phi)$ – линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)$ – матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е.

$$\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)=\sum_{s=1}^{M}\beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)}e^{i\lambda_s t}, \tag{11}$$

где $\beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)}$ – постоянные, вообще говоря, комплексные $(m\times m)$-матрицы, а λ_s – вещественные числа. В том случае, если имеет место равенство (9), будем предполагать, что при любом фиксированном $\phi\in C_h$ функция $B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi)$ измерима по Лебегу и для всех $\phi\in C_h$ и $t\in\mathbb{R}$

$$|B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi)|\le K\|\phi\|, \tag{12}$$

где K – некоторая постоянная. Очевидно, что неравенство (12) заведомо выполнено, если оператор $B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi)$ имеет вид (10), (11).

Далее, $R(t,\cdot)$ – оператор из класса $L_1^h[t_0,\infty)$. Наконец, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ – скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

2^0. $\dot v_1(t),\dot v_2(t),\ldots,\dot v_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$;

3^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)\in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$.

При сформулированных условиях для любого $\phi\in C_h$ и $T\ge t_0$ существует функция $x(t)$, удовлетворяющая системе (8) при $t\ge T$ (в указанном ранее смысле) с начальным условием $x_T=\phi$ (см. [2]).

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы, расширяя фазовое пространство системы (8) и приводя ее затем к системе вида (1), получить асимптотическое представление для решений этой системы.

Представим оператор $B_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}&B_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)=\\&=B_{i_1\ldots i_l}(t,x(t))-B_{i_1\ldots i_l}(t,x(t)-x_t).\end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно, что в силу наложенных на оператор $B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi)$ условий

$$B_{i_1\ldots i_l}(t,x(t))=A_{i_1\ldots i_l}(t)x(t), \tag{14}$$

где $(m\times m)$-матрица $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ является либо ω-периодической, либо ее элементами являются тригонометрические многочлены, т.е. она имеет вид (11).

Заметим далее, что

$$x(t)-x_t=\int_{t+\theta}^{t}\dot x(s)ds,\quad -h\le\theta\le 0. \tag{15}$$

Учтем, что при $t\ge T$ величина $\dot x(s)$ определяется из системы (8). Следовательно,

$$\begin{aligned}x(t)-x_t&=\int_{t+\theta}^{t}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}v_i(s)B_i(s,x_s)+\\&+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(s)v_{i_2}(s)B_{i_1i_2}(s,x_s)+\ldots+\\&+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(s)B_{i_1\ldots i_k}(s,x_s)+R(s,x_s)\Bigg)ds,\end{aligned} \tag{16}$$

если $t\ge T+h$ и $-h\le\theta\le 0$. Подставим представление (16) во второе слагаемое в формуле (13) и воспользуемся линейностью оператора $B_{i_1\ldots i_l}(t,\phi)$. Имеем,

$$\begin{aligned}&B_{i_1\ldots i_l}(t,x(t)-x_t)=\\&=\sum_{j=1}^{n}B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int_{t+\theta}^{t}v_j(s)B_j(s,x_s)ds\right)+\ldots+\\&+\sum_{1\le j_1\le\ldots\le j_k\le n}B_{i_1\ldots i_l}\left[t,\int_{t+\theta}^{t}v_{j_1}(s)v_{j_k}(s)B_{j_1\ldots j_k}(s,x_s)ds\right]+\\&+B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int_{t+\theta}^{t}R(s,x_s)ds\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим сначала слагаемое

$$\begin{aligned}&B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int_{t+\theta}^{t}R(s,x_s)ds\right)=\\&=B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int_{\theta}^{0}R(s+t,x_{s+t})ds\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Будем рассматривать выражение (18) как линейный оператор

$$L(t,\phi)=B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int_{\theta}^{0}R(s+t,\phi_s)ds\right),\quad -h\le\theta\le 0, \tag{19}$$

действующий из пространства $C_{2h}\equiv C([-2h,0],\mathbb{C}^m)$ непрерывных на $[-2h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$. Здесь, как и ранее, $\phi_s(\theta_1)=\phi(s+\theta_1)$ $(-h\le\theta_1\le 0)$ – элемент пространства C_h.

Покажем, что оператор $L(t,\phi)$ принадлежит классу $L_1^{2h}[t_0+h,\infty)$. Этот класс вводится точно так же, как и класс $L_1^h[t_0,\infty)$, с той лишь разницей, что областью определения операторов из класса $L_1^{2h}[t_0,\infty)$ является пространство C_{2h}. Ясно, что в проверке нуждается лишь выполнимость условия (2). Учитывая неравенства (2) и (12), легко установить, что

$$|L(t,\phi)| \le \left(K \int_{t-h}^{t} \gamma(s)ds \right) \|\phi\|, \qquad \|\phi\| = \sup_{-2h\le\theta\le 0} |\phi(\theta)|. \tag{20}$$

Осталось заметить, что функция

$$\int_{t-h}^{t} \gamma(s)ds$$

принадлежит классу $L_1[t_0+h,\infty)$ в силу того, что $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$. Действительно, меняя порядок интегрирования, получаем,

$$\int_{t_0+h}^{\infty} \left(\int_{t-h}^{t} \gamma(s)ds \right) dt = \int_{t_0}^{t_0+h} \left(\int_{t_0+h}^{s+h} \gamma(s)dt \right) ds + \int_{t_0+h}^{\infty} \left(\int_{s}^{s+h} \gamma(s)dt \right) ds = \int_{t_0}^{t_0+h} \gamma(s)(s-t_0)ds + h\int_{t_0+h}^{\infty} \gamma(s)ds. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь в формуле (17) слагаемое вида

$$B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s) B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s) B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right) = \\ & = B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} [v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t) + \right. \\ & \left. + v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s)] B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right) = \\ & = v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t) B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right) + \\ & + B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} [v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s) - \right. \\ & \left. - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)] B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Исследуем сначала в выражении (22) член вида

$$B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right) = B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{\theta}^{0} B_{j_1\dots j_p}(s+t,x_{s+t})ds \right). \tag{23}$$

Будем рассматривать выражение (23) как оператор

$$\tilde{B}(t,\phi) = B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{\theta}^{0} B_{j_1\dots j_p}(s+t,\phi_s)ds \right), \qquad -h\le\theta\le 0, \tag{24}$$

действующий из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Здесь, как и ранее, $\phi_s(\theta_1)=\phi(s+\theta_1)$ $(-h\le\theta_1\le 0)$ – элемент пространства C_h.

Оператор $\tilde{B}(t,\phi)$ обладает теми же свойствами, что и оператор $B_{i_1\dots i_l}(t,\phi)$ в исходной системе (8). Именно из (24) следует, что если для оператора $B_{i_1\dots i_l}(t,\phi)$ имеет место тождество (9), то очевидно для оператора $\tilde{B}_{i_1\dots i_l}(t,\phi)$ ($\phi\in C_{2h}$) это тождество остается справедливым. Далее, несложно показать, что если оператор $B_{i_1\dots i_l}(t,\phi)$ имеет вид (10), (11), то и оператор $\tilde{B}(t,\phi)$ ($\phi\in C_{2h}$) имеет аналогичную структуру. Отличие состоит лишь в том, что вместо операторов $\ell_j^{(i_1\dots i_l)}(\phi)$ в представлении (10) для оператора $\tilde{B}_{i_1\dots i_l}(t,\phi)$ находятся некоторые линейные ограниченные операторы $\tilde{\ell}_j^{(i_1\dots i_l)}(\phi)$, не зависящие от t и действующие из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Наконец, из (12) и (24) следует, что для оператора $\tilde{B}(t,\phi)$ имеет место неравенство (12), где $\phi\in C_{2h}$, а $\|\phi\|$ определена в (20).

Рассмотрим теперь в формуле (22) слагаемое вида

$$\begin{aligned} & B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{t+\theta}^{t} [v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s) - \right. \\ & \left. - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)] B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds \right) = \\ & = B_{i_1\dots i_l}\left(t, \int_{\theta}^{0} [v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t) - \right. \\ & \left. - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)] B_{j_1\dots j_p}(s+t,x_{s+t})ds \right), \end{aligned}$$

которое мы будем считать оператором

$$\begin{aligned} \tilde{L}(t,\phi) = B_{i_1\dots i_l}\Big(t, & \int_{\theta}^{0} [v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t) - \\ & - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)] B_{j_1\dots j_p}(s+t,\phi_s)ds, \Big) \end{aligned} \tag{25}$$

действующим из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. По-прежнему $\phi_s(\theta_1)=\phi(s+\theta_1)$ $(-h\le\theta_1\le 0)$ – элемент пространства C_h. Из неравенства (12) и представления (25) следует, что

$$|\tilde{L}(t,\phi)| \le \left(\tilde{K}\int_{-h}^{0}|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t)- -v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)|\,ds\right)\|\phi\|,\quad \phi\in C_{2h},$$

где $\tilde{K}$ – некоторая постоянная, а $P\phi P$ определена в (20).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Функция*

$$\int_{-h}^{0}|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t)- -v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)|\,ds \tag{26}$$

принадлежит классу $L_1[t_0+h,\infty)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по параметру p. Сперва заметим, что классу $L_1[t_0+h,\infty)$ принадлежит функция

$$\int_{-h}^{0}|v_i(s+t)-v_i(t)|\,ds,\quad i=1,\ldots,n.$$

Действительно, пользуясь абсолютной непрерывностью функции $v_i(t)$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-h}^{0}|v_i(s+t)-v_i(t)|\,ds=$$
$$=\int_{-h}^{0}\left|\int_{s+t}^{t}\dot{v}_i(\tau)d\tau\right|ds\le\int_{-h}^{0}\int_{s+t}^{t}|\dot{v}_i(\tau)|\,d\tau ds=$$
$$=\int_{t-h}^{t}\int_{-h}^{\tau-t}|\dot{v}_i(\tau)|\,dsd\tau\le h\int_{t-h}^{t}|\dot{v}_i(\tau)|\,d\tau.$$

Для доказательства того факта, что интеграл в правой части этой цепочки неравенств принадлежит классу $L_1[t_0+h,\infty)$, достаточно заметить, что функция $\dot{v}_i(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$ (свойство 2^0) и воспользоваться преобразованиями (21).

Пусть принадлежность классу $L_1[t_0+h,\infty)$ функции (26) установлена для всех $p\le P$. Покажем, что утверждение справедливо и при $p=P+1$. Обозначим

$$V_{j_P}(t)=v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_P}(t).$$

Имеем

$$\int_{-h}^{0}|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(s+t)- -v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(t)|\,ds=$$
$$=\int_{-h}^{0}|V_{j_P}(s+t)v_{j_{P+1}}(s+t)-V_{j_P}(t)v_{j_{P+1}}(t)|\,ds=$$
$$=\int_{-h}^{0}|[V_{j_P}(s+t)-V_{j_P}(t)+V_{j_P}(t)]v_{j_{P+1}}(s+t)- -V_{j_P}(t)v_{j_{P+1}}(t)|\,ds\le$$
$$\le\int_{-h}^{0}(|V_{j_P}(s+t)-V_{j_P}(t)||v_{j_{P+1}}(s+t)|+ +|V_{j_P}(t)||v_{j_{P+1}}(s+t)-v_{j_{P+1}}(t)|)ds.$$

Наконец, используя ограниченность функций $v_i(t)$ (свойство 1^0), заключаем, что

$$\begin{aligned}&\int_{-h}^{0}|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(s+t)- -v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(t)|\,ds\le\\&\le\tilde{K}_1\int_{-h}^{0}|V_{j_P}(s+t)-V_{j_P}(t)|\,ds+\\&+\tilde{K}_2\int_{-h}^{0}|v_{j_{P+1}}(s+t)-v_{j_{P+1}}(t)|\,ds,\end{aligned}\tag{27}$$

где $\tilde{K}_1,\tilde{K}_2$ – некоторые постоянные. Принадлежность классу $L_1[t_0+h,\infty)$ интегралов в правой части (27) уже установлена.

Утверждение доказано.

Из утверждения 1 следует, что оператор $\tilde{L}(t,\phi)$, определяемый формулой (25), принадлежит классу $L_1^{2h}[t_0+h,\infty)$.

Используя далее формулы (13), (14), (17), (19), (20), свойство 3^0 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ и равенство

$$B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int_{t+\theta}^{t}v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s)B_{j_1\ldots j_p}(s,x_s)ds\right)=$$
$$=v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\tilde{B}(t,\phi)+\tilde{L}(t,\phi),$$

перейдем от исходной системы (8) к следующей системе функционально-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\sum_{i=1}^{n}v_i(t)A_i(t)x(t)+\\&+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\tilde{B}_{i_1i_2}(t,x_t)+\ldots+\\&+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\tilde{B}_{i_1\ldots i_k}(t,x_t)+\\&+\tilde{R}(t,x_t).\end{aligned}\tag{28}$$

Здесь $A_i(t)$ – это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (11); $\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,\phi)$ – операторы той же структуры, что и операторы $B_{i_1,\ldots,i_l}(t,\phi)$ в исходной системе (8), но действующие из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$;

$\tilde{R}(t,x_t)$ – некоторый оператор из класса $L_1^{2h}[t_0+h,\infty)$.

Дальнейшие действия состоят в том, чтобы проделать указанную процедуру в общей сложности k раз, где параметр k определяется свойством 3^0 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$. Преобразуем на s-м шаге алгоритма операторы $\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)$, где $x_t\in C_{sh}$, согласно формуле

$$\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)=\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,x(t))-\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,x(t)-x_t)$$

и используем равенства (15) и (16), в которых $-sh\le\theta\le 0$, а операторы $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ и $R(t,\cdot)$ суть операторы из исходной системы (8). В результате последовательности таких преобразований мы приходим к системе функционально-дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{x}=\Bigg(&\sum_{i=1}^{n}v_i(t)A_i(t)+\\&+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2}(t)+\ldots+\\&+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k}(t)\Bigg)x(t)+\\&+R_1(t,x_t).\end{aligned}\tag{29}$$

В системе (29) $(m\times m)$-матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ – это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (11). Далее, $R_1(t,\cdot)$ – линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}\equiv C([-(k+1)h,0],\mathbb{C}^m)$ непрерывных на $[-(k+1)h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $L_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$.

Системы уравнений (8) и (29), вообще говоря, не являются эквивалентными. Можно утверждать лишь следующее: пусть функция $x(t)$ является решением системы (8) при $t\ge T\ge t_0$ с начальным условием $x_T=\phi$, где $\phi\in C_h$, тогда функция $x(t)$ при $t\ge T+kh$ является решением системы уравнений (29) с начальным условием $x_{T+kh}=\tilde{\phi}$, где $\tilde{\phi}\in C_{(k+1)h}$ и

$$\tilde{\phi}(\theta)=x(T+kh+\theta),\quad -(k+1)h\le\theta\le 0.\tag{30}$$

Таким образом, множество всех решений системы уравнений (8), определенных при $t\ge T\ge t_0$, образует при $t\ge T+kh$ в пространстве всех решений системы (29) некоторое подмножество. Это подмножество решений определяется множеством начальных функций вида (30), где $x_T=\phi$ ($\phi\in C_h$) и $x(t)$ при $T\le t\le T+kh$ является решением системы (8) с начальной функцией $x_T=\phi$.

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы систему уравнений (29) привести к виду (1) и построить асимптотику ее решений, используя теоремы 1 и 2. Для достижения этой цели мы сначала воспользуемся техникой усредняющих замен переменных, предложенной в работе [16] применительно к задаче построения асимптотики решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Обобщение результатов этой работы на случай систем вида (29) приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3. *Система (29) при достаточно больших t заменой*

$$\begin{aligned}x=\Bigg[&I+\sum_{i=1}^{n}Y_i(t)v_i(t)+\\&+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+\\&+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Bigg]y\end{aligned}\tag{31}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{y}=\Bigg(&\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+\\&+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Bigg)y(t)+\\&+R_2(t,y_t)\end{aligned}\tag{32}$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и оператором $R_2(t,y_t)$ из класса $L_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. В замене (31) I – единичная матрица, а матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ с нулевым средним значением либо являются ω-периодическими (если таковыми являются матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ в системе (29)), либо их элементами являются тригонометрические многочлены.

Для доказательства этой теоремы необходимо почти дословно повторить соответствующие рассуждения, приведенные в [16, теорема 1].

В практических приложениях обычно требуется вычислить лишь матрицы первого приближения A_i, а также матрицы второго приближения A_{ij}. Приведем здесь явные формулы для нахождения этих матриц. Имеем,

$$\begin{aligned}&A_i=M[A_i(t)],\quad i=1,\ldots,n,\\&\left(M[F(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(s)ds\right).\end{aligned}\tag{33}$$

Далее,

$$A_{ij} = M[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)],$$
$$1 \le i < j \le n,$$

и

$$A_{ii} = M[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)], \quad i = 1,\dots,n. \qquad (34)$$

Матрицы $Y_i(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y}_i = A_i(t) - A_i, \quad i = 1,\dots,n. \qquad (35)$$

Система уравнений (32) не содержит, вообще говоря, осциллирующих коэффициентов в главной части, и в этом смысле она проще системы (29). В частности, можно воспользоваться известными результатами из теории обыкновенных дифференциальных уравнений для приведения этой системы к виду (1).

Предположим, что в главной части системы (32) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $A_{i_1\dots i_s} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (32) можно записать в виде

$$\dot{y} = [A_{i_1\dots i_s} + W(t)]v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)y(t) + \\ +R_2(t, y_t), \qquad (36)$$

где $(m\times m)$-матрица $W(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\dot{W}(t)\in L_1[t_0,\infty)$. (Мы пишем, что матрица $F(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$, если $|F(t)|\in L_1[t_0,\infty)$ и $|\cdot|$ – некоторая матричная норма.) Справедлива следующая лемма (см., например, [14, 15, 17]).

Лемма 1 (о диагонализации переменной матрицы). *Пусть все собственные числа матрицы $A_{i_1\dots i_s}$ различны, а матрица $W(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\dot{W}(t)\in L_1[t_0,\infty)$. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_{i_1\dots i_s}+W(t)$ и $C(t)\to C_0$ при $t\to\infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы $A_{i_1\dots i_s}$;*

(ii) *производная $\dot{C}(t)\in L_1[t_0,\infty)$;*

(iii) *она приводит матрицу $A_{i_1\dots i_s}+W(t)$ к диагональному виду, т.е.*

$$C^{-1}(t)[A_{i_1\dots i_s}+W(t)]C(t) = \Lambda(t),$$

где $\Lambda(t) = (\operatorname{diag}\tilde{\lambda}_1(t),\dots,\tilde{\lambda}_m(t))$ *и* $\tilde{\lambda}_j(t)$ $(j=1,\dots,m)$ *– собственные числа матрицы* $A_{i_1\dots i_s}+W(t)$.

В системе (36) осуществим замену

$$y(t) = C(t)z(t), \qquad (37)$$

где $C(t)$ – матрица из леммы 1. Приходим к L-диагональной системе вида (1):

$$\dot{z} = \Lambda(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)z(t) + R_3(t,z_t), \qquad (38)$$

где

$$R_3(t,z_t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t)z(t) + \\ +C^{-1}(t)R_2(t, C(t+\theta)z_t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ оператор $R_3(t,z_t)$ принадлежит классу $L_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Если теперь для элементов

$$\lambda_j(t) = \tilde{\lambda}_j(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t), \quad j=1,\dots,m \quad (39)$$

матрицы $\Lambda(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$ выполнены условия (3), (4), то для построения асимптотики решений системы (38) можно воспользоваться теоремами 1 и 2. Заметим, что условие (5) в нашем случае заведомо выполняется в силу свойства 1^0 функций $v_1(t),\dots,v_n(t)$. Будем в дальнейшем предполагать, что теоремами 1 и 2 мы вправе воспользоваться.

Возвращаясь затем к системе (28) при помощи замен (31) и (37), получаем асимптотическое представление для ее решений при $t\to\infty$ вида (7). В этом представлении функции $x_j(t)$ ($j=1,\dots,m$) описываются асимптотическими формулами типа (6):

$$x_j(t) = [p_j + o(1)]\exp\left\{\int_T^t \lambda_j(s)ds\right\}, \qquad (40)$$

где p_j – j-й вектор-столбец матрицы C_0 (см. лемму 1), т.е. собственный вектор матрицы $A_{i_1\dots i_s}$, отвечающий собственному числу $\tilde{\lambda}_j = \lim_{t\to\infty}\tilde{\lambda}_j(t)$, а функция $\lambda_j(t)$ задается формулой (39). Поскольку, как отмечалось ранее, решения исходной системы (8) при достаточно больших t являются решениями системы (28), то эти решения также описываются асимптотическими формулами (7). Но, тем не менее, возникает следующий важный вопрос. Существуют ли у системы уравнений (8) при достаточно больших t и всех $j=1,\dots,m$ решения $x_j(t)$, имеющие асимптотику вида (40)? Действительно, такие решения существуют у системы (28) и вовсе не обязаны быть у исходной системы (8), множество решений которой является всего лишь подмножеством множества всех решений системы (28). Остановимся на этом моменте более подробно.

На самом деле мы не сможем ответить на

поставленный вопрос Тем не менее справедлив следующий результат, который вместе с асимптотическим представлением (7) дает полное качественное описание поведения решений системы (8) при $t \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $l = 1,\dots,m$ *фиксировано, натуральное число* k *определяется свойством* 3^0 *функций* $v_1(t),\dots,v_n(t)$ *и действительное число* T *достаточно велико. Тогда существует решение* $\tilde{x}_l(t)$ *системы (8), которое определено при* $t \ge T - kh$ *и допускает асимптотическое представление вида (7):*

$$\begin{gathered}\tilde{x}_l(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_l x_l(t) + \\ + \ldots + c_m x_m(t) + o(e^{-\beta t}),\end{gathered} \tag{41}$$

где $c_l \ne 0$. *В представлении (41) функции* $x_j(t)$ *(*$j = 1,\dots,m$*) являются решениями системы (29) с асимптотикой вида (40) при* $t \to \infty$ *и* β *– произвольное действительное число.*

Доказательство этой теоремы приведено в работе [18]. В этой же работе с помощью изложенной выше методики получены асимптотические формулы при $t \to \infty$ для решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\ddot{x} + x + \frac{a \sin \lambda t}{t^{\rho}} x(t-h) = 0,$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ и $h > 0$.

Заключение

В настоящей работе предложен метод асимптотического интегрирования систем функционально-дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами, близких в определенном смысле при $t \to \infty$ к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие изложенных в этой работе идей связано с разработкой метода построения асимптотических формул в той ситуации, когда «предельная» система, как и исходная, является системой функционально-дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», контракт N 14.B37.21.0247, а также при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31004_мол_а.

Список литературы

1. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
3. Driver R.D. Linear differential systems with small delays // J. Differential Equations. 1976. Vol. 21. P. 148–166.
4. Haddock J.R., Sacker R.J. Stability and asymptotic integration for certain linear systems of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1980. Vol. 76. P. 328–338.
5. Arino O., Györi I. Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1989. Vol. 138. P. 311–327.
6. Arino O., Györi I., Pituk M. Asymptotically diagonal delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1996. Vol. 204. P. 701–728.
7. Arino O., Pituk M. More on linear differential systems with small delays // J. Differential Equations. 2001. Vol. 170. P. 381–407.
8. Györi I., Pituk M. L^2-Perturbation of a linear delay differential equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. Vol. 195. P. 415–427.
9. Pituk M. The Hartman–Wintner theorem for functional differential equations // J. Differential Equations. 1999. Vol. 155. P. 1–16.
10. Ai S. Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. 1992. Vol. 165. P. 71–101.
11. Cassel J.S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. London Math. Soc. 1993. Vol. 47. P. 473–483.
12. Cassel J.S., Hou Z. L^p-Perturbation of linear functional differential equations // Monatsh. Math. 1999. Vol. 128. P. 211–226.
13. Hou Z., Cassel J.S. Asymptotic solutions for mixed-type equations with a small deviation // Georgian Math. J. 1998. Vol. 5, No. 2. P. 107–120.
14. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенннных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
15. Eastham M.S.P. The asymptotic solution of linear differential systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.
16. Нестеров П.Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №6. С. 731–742.
17. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
18. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatshefte für Mathematik. DOI: 10.1007/s00605-012-0437-2 (в печати).

ASYMPTOTIC INTEGRATION OF ONE CLASS OF FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

P.N. Nesterov

We use the method of averaging and the extension of the Levinson asymptotic theorem to study the problem of asymptotic integration of a class of linear functional differential systems that contain oscillatory decreasing coefficients.

Keywords: asymptotic integration, functional differential equations, method of averaging, Levinson's theorem, oscillatory decreasing coefficients.