

УДК 517.9

**МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ**

© 2013 г.

*Е.П. Кубышкин, А.Ю. Назаров*

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

kubysh@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 16.11.2012

Показана возможность одновременного существования нескольких устойчивых периодических решений. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром при производной.

*Ключевые слова:* дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом и малым параметром при производной, нормальная форма дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, устойчивость периодического решения.

**1. Постановка задачи**

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) + f(x(t-1)) = 0, \quad (1)$$

где  $0 < \varepsilon_1 \ll 1$ ,  $f(x) \equiv -f(-x)$  – гладкая нелинейная функция  $f(x) = f_1 x + f_3 x^3 + o(|x|^3)$  ( $|x| < x_0$ ,  $f_1 > 0$ ,  $f_3 < 0$ ). Уравнения вида (1) возникают при изучении многих прикладных задач (см., например, [1, 2]).

Изучается возможность возникновения в уравнении (1) явления мультистабильности – одновременного существования нескольких устойчивых аттракторов, в рассматриваемом случае – периодических решений. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации [3, 4].

**2. Анализ устойчивости нулевого решения уравнения (1)**

Рассмотрим линейную часть уравнения (1):

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) + f_1 x(t-1) = 0. \quad (2)$$

Поведение решений уравнения (2) определяется расположением корней его характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) \equiv \varepsilon_1 \lambda + 1 + f_1 \exp(-\lambda) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) при фиксированном  $f_1 > 1$  и малых  $\varepsilon_1$  имеет корни, вещественные части которых положительны, а при фиксированных  $f_1 < 1$  и малых  $\varepsilon_1$  все корни уравнения (4) лежат в левой комплексной полуплоскости [5].

Рассмотрим случай  $f_1 = 1 + \varepsilon_2$ , где  $|\varepsilon_2| \ll 1$ , и

изучим расположение корней характеристического уравнения (3) при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  ( $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $|\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}$ ). Заметим, что в рассматриваемом случае характеристическое уравнение (3) не имеет корней, лежащих на вещественной оси.

Запишем (3) в виде уравнения

$$\exp(\lambda)(\varepsilon_1 \lambda + 1) = -(1 + \varepsilon_2),$$

которое эквивалентно следующей последовательности уравнений

$$\exp(\lambda + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda)) = \exp(\ln(1 + \varepsilon_2)) + i\pi n \quad (4)$$

$$(n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots),$$

где  $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ . С учетом сказанного достаточно рассмотреть последовательность уравнений

$$\lambda + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi n \quad (5)$$

$$(n = 1, 3, 5, \dots)$$

для определения корней уравнения (3), лежащих в верхней комплексной полуплоскости.

В [3] показано, что уравнение

$$\lambda + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda) = w$$

при

$$\lambda \in \{\operatorname{Im} \lambda \geq y_0 > 0\},$$

$$w \in \{x_1 \leq \operatorname{Re} w \leq x_2, \operatorname{Im} w \geq \pi, x_1 < 0, x_2 > 0\}$$

имеет единственное решение

$$\lambda(w; \varepsilon_1) \equiv w + \lambda^1(w; \varepsilon_1),$$

где

$$\lambda^1(w; \varepsilon_1) \equiv -\ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \dots)))))) \quad (6)$$

– аналитическая по  $w$  и непрерывная по  $\delta_1$  ( $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ) функция.

При этом

$$|\lambda(w; \varepsilon_1) - \lambda_1(w; \varepsilon_1)| < K\varepsilon_1^2 \quad (K > 0), \quad (7)$$

где  $\lambda_1(w; \varepsilon_1) = w - \ln(1 + \varepsilon_1 w)$ .

Отсюда, согласно (5), (6), при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  множество корней характеристического уравнения (3) может быть записано в виде

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\pi n + \ln(1 + \varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi n + \ln(1 + \varepsilon_2); \varepsilon_1), \quad (8)$$

$$\lambda_{-n}(\varepsilon) = \bar{\lambda}_n(\varepsilon) \quad (n = 1, 3, 5, \dots),$$

при этом на основании (7), равномерно относительно  $n$ :

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\pi n + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(1 + \varepsilon_1(i\pi n + \ln(1 + \varepsilon_2))) + o(|\varepsilon|). \quad (9)$$

Таким образом, вопрос устойчивости решений уравнения (2) сводится к анализу поведения функций

$$g_n(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon_2) + \operatorname{Re} \lambda^1(i\pi n + \ln(1 + \varepsilon_2); \varepsilon_1), \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Функции  $g_n(\varepsilon)$  являются аналитическими в точке  $\varepsilon = 0$ , и имеют радиус сходимости соответствующих рядов равный  $r_n = O(n^{-1})$ . При этом

$$g_n(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2(\pi n)^2 / 2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 / 2 + o(|\varepsilon|^3). \quad (10)$$

Из (10) следует, что при малых  $\varepsilon$  и выполнении неравенства  $\varepsilon_2 > (\pi n)^2 / 2\varepsilon_1^2$   $n$ -й корень характеристического уравнения (3) имеет положительную вещественную часть.

### 3. Нормализующее преобразование

Опишем сначала поведение решений уравнения (2). Фазовым пространством уравнения (2) является пространство непрерывных функций  $C(-1, 0)$ . Перейдем от уравнения (2) к эквивалентной краевой задаче в полосе  $-1 \leq s \leq 0, t \geq 0$ , положив  $u(s, t) = x(t + s)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = -u(0, t) - (1 + \varepsilon_2)u(-1, t). \quad (12)$$

Производящим оператором полугруппы линейных операторов  $T(t)$ , действующих в  $C(-1, 0)$ , и порожденной краевой задачей (11), (12), будет оператор

$$A(\varepsilon)v = \begin{cases} dv/ds, & -1 \leq s < 0, \\ -\varepsilon_1^{-1}(v(0) + (1 + \varepsilon_2)v(-1)), & s = 0, \end{cases} \quad (13)$$

с областью определения

$$D(A) =$$

$$= \{v(s) \in C^1(-1, 0), \varepsilon_1 v'(0) + v(0) + (1 + \varepsilon_2)v(-1) = 0\}.$$

Собственными значениями оператора  $A(\varepsilon)$  будут величины  $\lambda_n = \lambda_n(\varepsilon)$ , а собственными функциями будут функции

$$u_n(s; \varepsilon) = \exp(\lambda_n(\varepsilon)s) / (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_n)^{1/2},$$

где

$$\lambda^{1/2} = |\lambda|^{1/2} \exp(i \arg(\lambda) / 2).$$

Наряду с (13) введем в рассмотрение оператор

$$A^*(\varepsilon)h = \begin{cases} -dh/ds, & 0 \leq s < 1, \\ -\varepsilon_1^{-1}(h(0) + (1 + \varepsilon_2)h(1)), & s = 0, \end{cases} \quad (14)$$

действующий в  $C(0, 1)$ , с областью определения

$$D(A^*) = \{h(s) \in C^1(0, 1),$$

$$-\varepsilon_1 h'(0) + h(0) + (1 + \varepsilon_2)h(1) = 0\}.$$

Оператор (14) является сопряженным с (13) в смысле скалярного произведения С.Н. Шиманова [6], которое для краевой задачи (11), (12) принимает вид

$$\langle v(s), h(s) \rangle =$$

$$= \varepsilon_1 v(0) \bar{h}(0) - (1 + \varepsilon_2) \int_{-1}^0 \bar{h}(\xi + 1) v(\xi) d\xi$$

Заметим, что собственными значениями оператора  $A^*(\varepsilon)$  являются величины  $\bar{\lambda}_n(\varepsilon)$ , а соответствующими собственными функциями будут

$$h_n = h_n(s; \varepsilon) = \exp(-\bar{\lambda}_n(\varepsilon)s) / (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \bar{\lambda}_n)^{1/2}.$$

Между функциями  $u_n(s; \varepsilon)$  и  $h_n(s; \varepsilon)$  выполнены следующие условия ортогональности

$$\langle u_{n_1}(s; \varepsilon), h_{n_2}(s; \varepsilon) \rangle = \delta_{n_1 n_2}, \quad (15)$$

где  $\delta_{n_1 n_2}$  – символ Кронекера. Отметим, что

$D(A)$  – замкнутое в  $C^1(-1, 0)$  линейное подпространство. Оно может быть получено замыканием в норме пространства  $C(-1, 0)$  множества функций вида

$$u_N(s) = \sum_{-N}^N z_n \lambda_n(\varepsilon) u_n(s; \varepsilon), \quad z_n, z_{-n} = z_n, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Совокупность последовательностей  $z = (z_1, z_3, z_5, \dots)$ , образуют в комплексном пространстве  $l_2$  линейное подпространство, которое обозначим  $l_2^1$ . Отметим, что для  $u(s) \in D(A)$  величина  $\langle u(s), u(-s) \rangle < \infty$ . С учетом этого и равенства (15) для  $z \in l_2^1$  справедливо

неравенство  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n \lambda_n(\varepsilon)|^2 < \infty$ . Отсюда следует, что функция  $u_0(s) \in D(A)$  может быть

представлена сходящимся в  $C^1(-1,0)$  рядом

$$u_0(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle u_0(s), h_n(s; \varepsilon) \rangle u_n(s; \varepsilon).$$

Таким образом, решение  $u(s, t; \varepsilon)$  краевой задачи (11),(12) с начальным условием  $u_0(s) \in D(A)$  может быть записано в виде

$$u(s, t; \varepsilon) = u(s, z; \varepsilon) = \sum_{-\infty}^{\infty} z_n u_n(s; \varepsilon),$$

$$\dot{z}_n = \lambda_n(\varepsilon) z_n, \quad z_n(0; \varepsilon) = \langle u_0(s), h_n(s; \varepsilon) \rangle \quad (16)$$

$$(n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots).$$

Перейдем от уравнения (1) к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_s = -u(0, t) - f(u(1, t); \varepsilon_2) \quad (18)$$

в полосе  $-1 \leq s \leq 0, \quad t \geq 0$ , положив  $u(s, t) = x(t + s), f(u; \varepsilon_2) = (1 + \varepsilon_2)u + f_3 u^3 + o(|u|^5)$ . Обозначим через  $S(R_0)$  многообразие начальных условий краевой задачи (17), (18) вида  $\{u(s) \in C^1(-1, 0), \quad \varepsilon_1 u'(0) = -u(0) - f(u(-1); \varepsilon_2), \|u(s)\|_{C^1} \leq R_0\}$  и изучим структуру периодических решений краевой задачи (17), (18) с начальными условиями из этого многообразия. Через  $s(r_0)$  обозначим шар с радиусом  $r_0$  пространства  $l_2^1$ . Введем в рассмотрение функцию (оператор)

$$u(z; \varepsilon) \equiv u(s, z; \varepsilon) = \sum_{-\infty}^{\infty} z_n u_n(s; \varepsilon) + U^3(s, z, \bar{z}; \varepsilon) \quad (19)$$

$$(U^3(s, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} z_{n_1} z_{n_2} z_{n_3} u_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon)),$$

действующую из  $s(r_0) \oplus \{|\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$  в  $C^1(-1, 0)$ , гладкую по совокупности переменных, и систему дифференциальных уравнений в  $l_2$  вида

$$\dot{z}_n = \lambda_n(\varepsilon) z_n + Z^3(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv Z_n(z, \bar{z}; \varepsilon)$$

$$(Z^3(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in \Omega_n^3} d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) z_{n_1} z_{n_2} z_{n_3}), \quad (20)$$

в которых  $\bar{z}_{-n} = z_n, \quad z \in s(r_0), \quad d_{-n_1 - n_2 - n_3} = \overline{d_{n_1 n_2 n_3}},$   
 $u_{-n_1 - n_2 - n_3} = \overline{u_{n_1 n_2 n_3}}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \|z\|_{l_2^1} \in s(r_0),$   
 $\Omega_n^3 = \{(n_1, n_2, n_3) : n_j = \pm 1, \pm 3, \dots, n = n_1 + n_2 + n_3\}.$

Функции  $u_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon)$  и  $d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)$  подлежат определению.

Рассмотрим выражение (19) как преобразование краевой задачи (17), (18) в систему уравнений (20). Условие принадлежности

траекторий (20) в силу (19) краевой задачи (17), (18) примет вид:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(s, z; \varepsilon)}{\partial z_n} Z_n(z, \varepsilon) = \frac{\partial u(s, z; \varepsilon)}{\partial s}, \quad (21)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u(s, z; \varepsilon)}{\partial s} \Big|_{s=0} = -u(0, z; \varepsilon) - f(u(-1, z; \varepsilon); \varepsilon_2). \quad (22)$$

Соотношения (21),(22) определяют тождества, которые должны равномерно по  $\varepsilon$  выполняться с точностью до величин порядка  $o(\|z\|_{l_2^1}^3)$ . Они позволяют последовательно определять функции  $u_*(s, \varepsilon)$  и коэффициенты  $d_*(\varepsilon)$ , входящие в (19) и (20), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $z_n$ . Приравняв коэффициенты при первых степенях  $z_n$ , получим равенства в силу выбора  $\lambda_n(\varepsilon)$  и  $u_n(s; \varepsilon)$ .

Приравняем коэффициенты в тождествах (21),(22) при  $z_{n_1} z_{n_2} z_{n_3}, \quad (n_1 + n_2 + n_3 = n)$ . В результате получим краевую задачу

$$u_n(s; \varepsilon) d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) + (\lambda_{n_1}(\varepsilon) + \lambda_{n_2}(\varepsilon) + \lambda_{n_3}(\varepsilon)) u_{n_1 n_2 n_3}(s, \varepsilon) = \quad (23)$$

$$= \frac{du_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon)}{ds},$$

$$\frac{du_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon)}{ds} \Big|_{s=0} = -u_{n_1 n_2 n_3}(0; \varepsilon) - (1 + \varepsilon_2) u_{n_1 n_2 n_3}(1, t) - p f_3 u_{n_1}(-1; \varepsilon) u_{n_2}(-1; \varepsilon) u_{n_3}(-1; \varepsilon), \quad (24)$$

для определения  $d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)$  и  $u_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)$ , где  $p$  – целое число, принимающее значение 1, 3, 6 в зависимости от количества соответствующих резонансных соотношений. Сформулируем следующую гипотезу, которая при построении конкретных решений будет проверяться численно.

Будем предполагать, что при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  резонансные соотношения вида

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_{n_1}(\varepsilon) + \lambda_{n_2}(\varepsilon) + \lambda_{n_3}(\varepsilon)$$

$(n_1, n_2, n_3 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$  могут выполняться лишь при  $\varepsilon = 0$ .

В дальнейшем будем использовать обозначение  $\lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) = \lambda_{n_1}(\varepsilon) + \lambda_{n_2}(\varepsilon) + \lambda_{n_3}(\varepsilon)$ . Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$u_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon) = \exp(\lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) s) [c + d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) (1 - \exp(\lambda_n(\varepsilon) - \lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) s)) + (\lambda_n(\varepsilon) - \lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)) / (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_n(\varepsilon))^{1/2}], \quad (25)$$

где  $c$  – произвольная постоянная. Подставим в (25) краевое условие (24). В результате с необходимостью имеем  $c = 0$  и

$$d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) = \left[ \varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_2) \exp(-\lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)) \times \frac{(1 - \exp(\lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) - \lambda_n(\varepsilon)))}{(\lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon) - \lambda_n(\varepsilon))} \right]^{-1} \times \\ \times p f_3 \exp(-\lambda_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)) \times (26) \\ \times (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_{n_1})^{1/2} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_{n_2})^{-1/2} \times \\ \times (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_{n_3})^{-1/2} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_{n_3})^{-1/2}.$$

Тем самым  $u_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon)$  определяются однозначно. При этом  $d_{n_1 n_2 n_3}(\varepsilon)$  и  $u_{n_1 n_2 n_3}(s; \varepsilon)$  ограниченные при,  $\varepsilon \leq \varepsilon_0, -1 \leq s \leq 0, n, n_1, n_2, n_3 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  функции. Отсюда следует, что  $Z_n^{(3)}(z, \bar{z}; \varepsilon)$  – кубический оператор, действующий из  $l_2^1$  в  $l_2^1$ , а  $U^3(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv U^3(s, z, \bar{z}; \varepsilon)$  – кубическая форма в  $l_2^1$ , принимающая значения в  $C^1(-1, 0)$  при  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ .

Систему уравнений (20) в дальнейшем будем называть нормальной формой краевой задачи (17), (18) (уравнения (1)).

#### 4. Анализ нормальной формы

Перейдем в (20) к полярным координатам, положив  $z_n = \rho_n \exp(i\tau_n) (\rho_n \geq 0)$ . В результате получим систему уравнений вида:

$$\dot{\rho}_n = \gamma_n(\varepsilon) \rho_n + R_n(\rho, \tau; \varepsilon), \quad (27)$$

$$\dot{\tau}_n = \pi n + \sigma_n(\varepsilon) + T_n(\rho, \tau; \varepsilon), \quad (28)$$

где  $n = 1, 3, 5, \dots$ ,  $\gamma_n(\varepsilon) = \operatorname{Re} \lambda_n(\varepsilon)$ ,  $\pi n + \sigma_n(\varepsilon) = -\operatorname{Im} \lambda_n(\varepsilon)$ ,  $\rho = (\rho_1, \rho_3, \rho_5, \dots)$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_3, \tau_5, \dots)$ , функционалы  $R_n(\rho, \tau; \varepsilon)$ ,  $T_n(\rho, \tau; \varepsilon)$  –  $2\pi$ -периодические по  $\tau_j$  ( $j = 1, 3, 5, \dots$ ).

Структура системы (27), (28) позволяет ввести одну «быструю» переменную и счетное число «медленных» переменных. Продемонстрируем это на примере «усеченных» систем. Положим в (20)  $z_n \equiv 0$ ,  $n = \pm 5, \pm 7, \dots$ . С учетом равенства  $z_n = \bar{z}_n$  имеем:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon) z_1 + d_{11-1}(\varepsilon) |z_1|^2 z_1 + d_{13-3}(\varepsilon) |z_3|^2 z_1 + d_{-1-13}(\varepsilon) \bar{z}_1 z_3, \quad (29)$$

$$\dot{z}_3 = \lambda_3(\varepsilon) z_3 + d_{1-13}(\varepsilon) |z_1|^2 z_3 + d_{33-3}(\varepsilon) |z_3|^2 z_3 + d_{111}(\varepsilon) z_1^3. \quad (30)$$

Обозначим

$$d_*(\varepsilon) = a_*(\varepsilon) + ib_*(\varepsilon),$$

$$A_*(\varepsilon) = (a_*^2(\varepsilon) + b_*^2(\varepsilon))^{1/2},$$

$$\beta_*(\varepsilon) = \operatorname{arctg}(b_*(\varepsilon) / a_*(\varepsilon))$$

и перейдем в (29), (30) к переменным  $\rho_1, \rho_3, \theta_1 = -3\tau_1 + \tau_3$ ,  $\tau_1$ . В результате получим систему уравнений:

$$\dot{\rho}_1 = (\gamma_1(\varepsilon) + a_{11-1}(\varepsilon) \rho_1^2 + a_{13-3}(\varepsilon) \rho_3^2) \rho_1 + A_{-1-13}(\varepsilon) \cos(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon)) \rho_1^2 \rho_3, \quad (31)$$

$$\dot{\rho}_3 = (\gamma_3(\varepsilon) + a_{1-13}(\varepsilon) \rho_1^2 + a_{33-3}(\varepsilon) \rho_3^2) \rho_3 + A_{111}(\varepsilon) \cos(-\theta_1 + \beta_{111}(\varepsilon)) \rho_1^3, \quad (32)$$

$$\dot{\theta}_1 = \delta_1(\varepsilon) + (b_{-1-13}(\varepsilon) - 3b_{11-1}(\varepsilon)) \rho_1^2 + (b_{33-3}(\varepsilon) - 3b_{13-3}(\varepsilon)) \rho_3^2 + A_{111}(\varepsilon) \sin(-\theta_1 + \beta_{111}(\varepsilon)) \rho_1^3 / \rho_3 - \quad (33)$$

$$-3A_{-1-13}(\varepsilon) \sin(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon)) \rho_1 \rho_3$$

«медленных» переменных и уравнение для «быстрой» переменной

$$\dot{\tau}_1 = \pi + b_{11-1}(\varepsilon) \rho_1^2 + b_{13-3}(\varepsilon) \rho_3^2 + A_{-1-13}(\varepsilon) \sin(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon)) \rho_1 \rho_3, \quad (34)$$

которое отщепляется от (31), (32). В (33)  $\delta_1(\varepsilon) = \sigma_3(\varepsilon) - 3\sigma_1(\varepsilon)$ .

Структура уравнений (20) ((27), (28)) позволяет ввести по аналогии с системами (29), (30) взамен  $z_n$ , ( $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ) «медленные» переменные  $\rho = (\rho_1, \rho_3, \rho_5, \dots)$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_3, \theta_5, \dots)$  и одну «быструю» переменную  $\tau_1$ . Ввести переменные  $\theta_n$  можно неединственным способом. Любой другой способ является линейной комбинацией введенных переменных. В качестве одного из возможных способов введения переменных  $\theta_n$  может быть предложен следующий. Введем совокупность  $(n_1, n_2, n_3)$ , удовлетворяющих условию  $n_1 + n_2 + n_3 = 1$  ( $n_1, n_2, n_3 = -1, \pm 3, \pm 5, \dots$ ). По ним построим переменные  $\theta_n$  ( $n = 1, 3, \dots$ ) последовательно полагая

$$\theta_n = \operatorname{sign}(n_1) \tau_{n_1} + \operatorname{sign}(n_2) \tau_{n_2} + \operatorname{sign}(n_3) \tau_{n_3} - \tau_1,$$

исключая при этом те из них, которые являются линейными комбинациями предыдущих. В результате получим систему уравнений вида:

$$\dot{\rho}_n = \gamma_n(\varepsilon) \rho_n + R_n(\rho, \theta; \varepsilon), \quad (35)$$

$$\dot{\theta}_n = \delta_n(\varepsilon) + \Theta_n(\rho, \theta; \varepsilon), (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (36)$$

где  $\delta_n(\varepsilon)$  ( $\delta_n(0) = 0$ ) – линейная комбинация из трех  $\sigma_{n_j}(\varepsilon)$ , определяемая соответствующим резонансом; функционалы  $R_n(\rho, \theta; \varepsilon)$  и  $\Theta_n(\rho, \theta; \varepsilon)$  имеют структуру, аналогичную правым частям (31), (33),  $2\pi$  – периодические

по каждому  $\theta_j (j=1,3,5,\dots)$ .

Уравнение для «быстрой» переменной  $\tau_1$  имеет вид

$$\dot{\tau}_1 = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho, \theta; \varepsilon), \quad (37)$$

где функционал  $T(\rho, \theta; \varepsilon) - 2\pi -$  периодический по  $\theta_j (j=1,3,\dots)$  и имеет структуру, аналогичную (34).

Предположим, что в области  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  имеется подобласть  $\Omega(\varepsilon_0)$ , примыкающая к точке  $\varepsilon = 0$ , при значениях  $\varepsilon$  из которой система уравнений (35)–(36) имеет состояние равновесия  $(\rho^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))$ ,  $(\rho^*(\varepsilon) \rightarrow 0, \theta^*(\varepsilon) \rightarrow \theta^*(0) \in [0; 2\pi)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0, \rho^*(\varepsilon) \in l_2^1$ .

Обозначим

$$\rho = \rho(\varepsilon) = \|\rho^*(\varepsilon)\|_{l_1} = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j^{*2}(\varepsilon) |\lambda_j(\varepsilon)|^2 \right)^{1/2} \quad (38)$$

и нормируем в (35), (36)  $\rho_n = \xi_n \rho$ . В результате, учитывая структуру функций  $R_n^*, \Theta_n^*$ , получим систему уравнений

$$\dot{\xi}_n = \gamma_n(\varepsilon) \xi_n + \rho^2 R_n(\xi, \theta; \varepsilon), \quad (39)$$

$$\dot{\theta}_n = \theta_n(\varepsilon) + \rho^2 \Theta_n(\xi, \theta; \varepsilon), (n=1,3,5,\dots). \quad (40)$$

Точка  $\xi^*(\varepsilon) = \rho^*(\varepsilon) / \rho, \theta^*(\varepsilon), (\|\xi^*(\varepsilon)\|_{l_2^1} = 1)$ ,

будет состоянием равновесия системы уравнений (39), (40).

Введем в рассмотрение матрицу частных производных по  $\xi_j$  и  $\theta_j (j=1,2,\dots)$  правых частей системы дифференциальных уравнений (39), (40) (матрицу Якоби), вычисленную в точке  $(\xi^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))$ . Эту матрицу можно записать в виде  $\rho^2 B(\varepsilon)$ , где

$$B(\varepsilon) = \begin{Bmatrix} r_{nj}^{(1)}(\varepsilon) & r_{nj}^{(2)}(\varepsilon) \\ \theta_{nj}^{(1)}(\varepsilon) & \theta_{nj}^{(2)}(\varepsilon) \end{Bmatrix}, (n=1,3,\dots). \quad (41)$$

Здесь

$$r_{nj}^{(1)}(\varepsilon) = \partial R_n \setminus \partial \xi_j |_{(\xi^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))} (n \neq j),$$

$$r_{nj}^{(2)}(\varepsilon) = \partial R_n \setminus \partial \theta_j |_{(\xi^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))},$$

$$\theta_{nj}^{(1)}(\varepsilon) = \partial \Theta_n \setminus \partial \xi_j |_{(\xi^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))},$$

$$\theta_{nj}^{(2)}(\varepsilon) = \partial \Theta_n \setminus \partial \theta_j |_{(\xi^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))}.$$

Для определения  $r_{nn}^{(1)}(\varepsilon)$  представим  $R_n(\xi, \theta; \varepsilon)$  в виде  $R_n(\xi, \theta; \varepsilon) = R_n^{(1)}(\xi, \theta; \varepsilon) \xi_n + R_n^{(2)}(\xi, \theta; \varepsilon)$ , где  $R_n^{(2)}(*)$  – не зависящий от  $\xi_n$  функционал. Тогда  $r_{nn}^{(1)}(\varepsilon) = \partial R_n^{(1)} \setminus \partial \xi_n \xi_n + R_n^{(2)} / \xi_n |_{(\xi^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))}$ .

Выразим  $\tau = (\tau_1, \tau_3, \tau_5, \dots)$  через  $\theta = (\theta_1, \theta_3, \dots)$  в обратном порядке. В результате для определения  $\tau_n(t)$  на состоянии равновесия  $(\rho^*(\varepsilon), \theta^*(\varepsilon))$  с учетом (28) получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_n &= \pi n + \sigma_n(\varepsilon) + \rho^*(\varepsilon)^2 T_n(\xi^*, \theta^*; \varepsilon) \equiv \\ &\equiv \pi n + \sigma_n(\varepsilon) + \rho^*(\varepsilon)^2 \sigma_{n2}(\varepsilon) \equiv \\ &\equiv \pi n + \sigma_n(\rho^*(\varepsilon); \varepsilon), (n=1,3,5,\dots). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь постоянная  $T_n(\xi^*, \theta^*; \varepsilon)$  получена с учетом (28) и выполненных замен. Отметим также, что между правыми частями (42) выполнены условия синхронизации, определяемые видом  $\theta_n$ . В связи с этим с учетом вида (37), (42) справедливы равенства  $\tau_n = n\tau_1 + \alpha_n(\varepsilon)$  ( $n=2,3,\dots$ ), где функции  $\alpha_n(\varepsilon)$  определяют фазу синхронизации. Отсюда следует, что система уравнений (20) имеет периодическое решение  $z_n^*(t; \varepsilon)$  с периодом

$$T(\varepsilon) = 2(1 + \sigma_1(\rho^*(\varepsilon); \varepsilon) / \pi)^{-1}$$

вида

$$\begin{aligned} z_n^*(t; \varepsilon) &= \rho^*(\varepsilon) z_n^*(\tau_1; \varepsilon) = \\ &= \rho(\varepsilon) \xi_n^*(\varepsilon) \exp(i(n\tau_1 + \alpha_n(\varepsilon))), \\ \dot{\tau}_1 &= \pi + \sigma_1(\rho^*(\varepsilon); \varepsilon) \\ &(n = \pm 1, \pm 3, \dots). \end{aligned} \quad (43)$$

Справедливо следующее [3]

**Утверждение 1.** Пусть при  $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$  для некоторого  $\varepsilon_0$  вещественные части собственных значений матрицы (41) меньше некоторого  $m < 0$ . Тогда при указанных  $\varepsilon$  краевая задача (17), (18) имеет асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл, период которого  $T(\varepsilon) \rightarrow 2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , и имеющий следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} u^*(s, t; \varepsilon) &= \rho u_1^*(s, \tau_1; \varepsilon) + \rho^3 u_3^*(s, \tau_1; \rho, \varepsilon), \\ \dot{\tau}_1 &= \pi + \sigma_1(\varepsilon) + \rho^2 \sigma_2^*(\rho, \varepsilon), \rho = \rho(\varepsilon), \end{aligned} \quad (44)$$

$$u_1^*(s, \tau_1; \varepsilon) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(s; \varepsilon) z_n^*(\tau_1; \varepsilon),$$

где функции  $u_3^*(s, \tau_1; \rho, \varepsilon) \equiv u_3^*(s, \tau_1 + 2\pi; \rho, \varepsilon)$  и  $\sigma_2(\rho, \varepsilon)$  непрерывны по совокупности переменных и бесконечно дифференцируемы по  $s, \tau_1, \rho$ .

## 5. Численное исследование нормальной формы

Утверждение 1 дает механизм построения периодических решений уравнения (1).

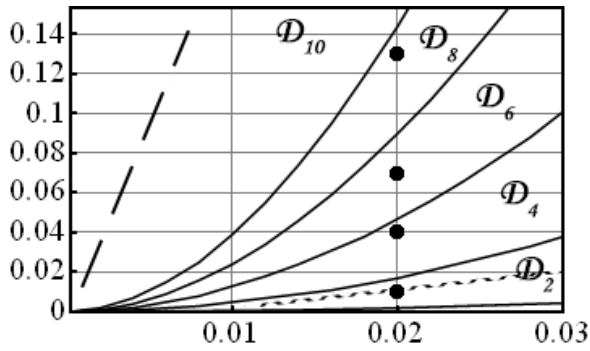


Рис. 1.

На рис. 1 приведена картина  $D$ -разбиений [7] плоскости параметров  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  ( $\varepsilon_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2$ ). При значениях  $\varepsilon \in D_0$  корни характеристического уравнения (3) находятся в левой комплексной полуплоскости. При значениях  $\varepsilon \in D_2$  одна пара комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (3) находится в правой комплексной полуплоскости, а остальные в левой; при  $\varepsilon \in D_4$  две пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения (3) находятся в правой комплексной полуплоскости, а остальные в левой, и т.д. При увеличении  $\varepsilon_2$  указанные корни остаются в правой полуплоскости. На рис. 1 точечной линией условно обозначены границы последующих областей неустойчивости, характер которых аналогичен приведенным и которые прижимаются к оси  $\varepsilon_2$  при  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ . Вычисление состояний равновесия системы уравнений (35), (36), которым в соответствии с утверждением 1 отвечают периодические решения краевой задачи (17), (18), проводится по следующей схеме. Для последовательности «усеченных» систем уравнений, состоящих из двух (система (29), (30)), трех и т.д. уравнений, строятся по (35), (36) соответствующие «усеченные» уравнения «медленных» переменных. Для каждого состояния равновесия системы уравнений (35), (36) при каждом фиксированном  $\varepsilon$  строится последовательность состояний равновесия  $\rho_1^*(\varepsilon), \rho_3^*(\varepsilon), \rho_5^*(\varepsilon), \dots, \rho_n^*(\varepsilon), \theta_1^*(\varepsilon), \theta_3^*(\varepsilon), \theta_5^*(\varepsilon), \dots, \theta_n^*(\varepsilon)$  «усеченных» уравнений «медленных» переменных. Процесс продолжается до тех пор, пока относительная погрешность величины

$$\rho_n^*(\varepsilon) = \left( \sum_{j=1}^n \rho_j^{*2}(\varepsilon) |\lambda_j(\varepsilon)|^2 \right)^{1/2}$$

при переходе к очередному шагу не достигнет заданной точности. В приведенных ниже при-

мерах она составляет  $10^{-4}$ . Одновременно происходит проверка гипотезы, сформулированной в п. 2.

На рис. 2 приведён график функции  $\rho(\varepsilon)$ , построенный для значений  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  вдоль кривой, отмеченной пунктирной линией на рис. 1.

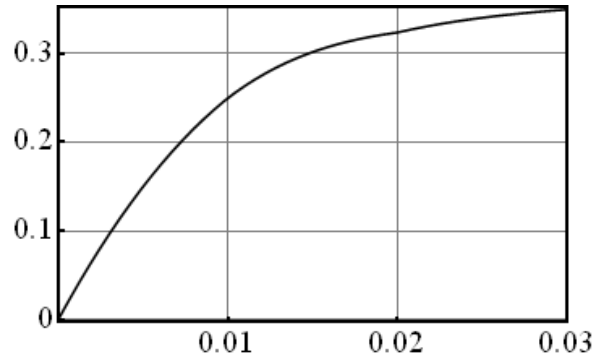


Рис. 2.

На рис. 3 приведены периодические решения уравнения (1), построенные по приведенной выше схеме для случая  $\varepsilon_1 = 0.02$  при возрастающих значениях  $\varepsilon_2$ . Эти значения отмечены точками на рис. 1. При  $\varepsilon_2 = 0.01$  находимся в области  $D_2$ . При значениях  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in D_2$  уравнение (1) имеет единственное устойчивое периодическое решение. Его вид представлен на рис. 3а. При  $\varepsilon_2 = 0.04$  находимся в области  $D_4$ . При этом значении  $\varepsilon_2$  уравнение имеет, по крайней мере, 2 устойчивых периодических решения. Вид их представлен на рис. 3б и рис. 3в. При увеличении  $\varepsilon_2$  проявляются новые периодические решения. Так, при  $\varepsilon_2 = 0.07$  отмечено существование трёх периодических решений. Их вид приведён на рис. 3 г, д, е. Дальнейшее увеличение  $\varepsilon_2$  приводит к возникновению, по крайней мере, ещё одного периодического решения. Так, при  $\varepsilon_2 = 0.13$  установлено существование четырёх периодических решений. Они представлены на рис. 3 ж, з, и, к. Первые три являются развитием ранее обнаруженных решений. Последнее решение новое. Заметим, что с ростом  $\varepsilon_2$  амплитуды решений также растут. Механизм возникновения новых периодических решений до конца не изучен. Похоже, что они бифурцируют от имеющихся периодических решений.

Как известно, отмеченная ситуация – одновременное существование нескольких устойчивых периодических решений в поведении динамической системы – носит название мультистабильности.

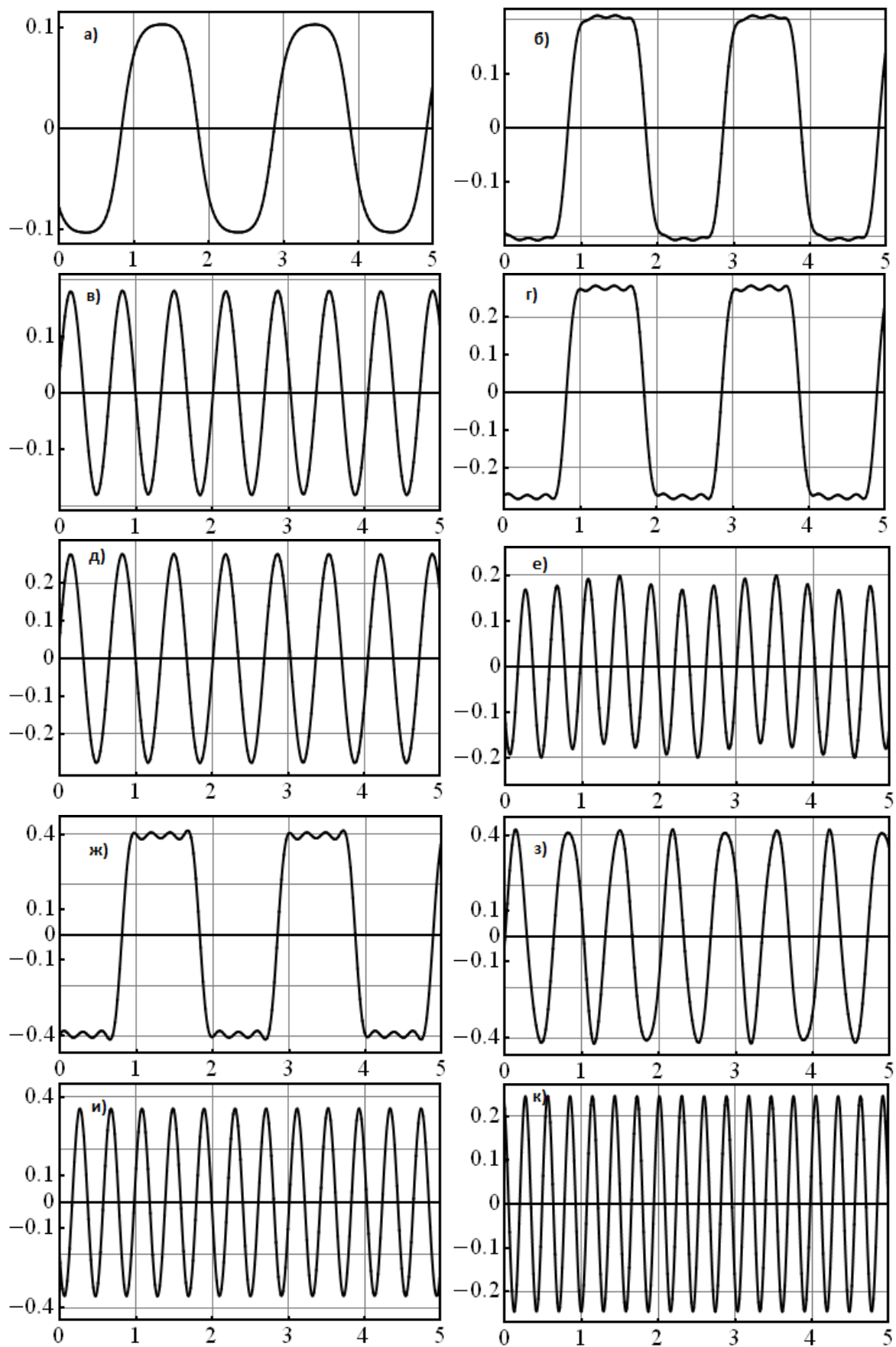


Рис. 3.

В заключение отметим, что численный анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений проводился с использованием программы Tracer [8].

*Список литературы*

1. Дмитриев А.С., Кислов В.А. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
2. Гласс Л., Мэкки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
3. Кубышкин Е.П. Построение асимптотики периодических решений с запаздывающей обратной связью. // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия: Естественные и технические науки. 2011, №2. С. 87–94.
4. Кубышкин Е.П. Метод равномерной нормализации в исследовании периодических решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при производной // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 19, №3. С. 143.
5. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
6. Шиманов С.Н. К теории квазилинейных систем с запаздыванием // ПММ. 1959. Т. 23. № 5. С. 836-844.
7. Неймарк Ю.И. Структура D-разбиений пространства квазиполиномов диаграммы Вышерадского и Найквиста // ДАН СССР. 1948. Т. 60. С. 1503–1506.
8. Tracer. Построитель фазовых портретов. Версия 3.70. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2008611464.

**THE MULTISTABILITY IN THE BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS  
OF THE DIFFERENTIAL EQUATION WITH DELAY AND A SMALL PARAMETER  
AT THE DERIVATIVE**

*E.P. Kubyshkin, A.Yu. Nazarov*

It shows a possibility of simultaneous existence a few stable periodic solutions. The method of uniform normalization of nonlinear equations with delaying argument and small parameter at the derivative is used like investigation method.

*Keywords:* differential equation with delaying argument and a small parameter at derivative, normal form of differential equation with delaying argument, stability of periodic solution.