УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВЕДЕНИЕМ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

 М.С. Тряхов

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

mikhail.tryakhov@gmail.com

Поступила в редакцию 22.11.2012

Рассматривается начально-краевая задача для эволюционного уравнения гиперболического типа в области с переменной границей, возникающая при моделировании динамики телескопического манипуляционного робота. Решены задача перевода решения из одной точки фазового пространства в другую в заданный момент времени с минимумом функционала энергии от управления и задача быстродействия.

Ключевые слова: оптимальное уравнение, начально-краевая задача, обобщенное решение, математическая модель.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая начально-краевая задача :

$$J(l)\ddot{\theta}-\int_0^l (b+l-x_1)u_{tt}(x_1,t)dx_1 = M(t), \qquad (1)$$

$$u_{tt}+u_{xxxx}=(b+l-x)\ddot{\theta}, \qquad (2)$$

$$\begin{gathered} u_{xx}(0,t)=u_{xxx}(0,t)=0,\\ u(l,t)=u_x(l,t)=0, \end{gathered} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered} \theta(0)=\theta_0,\ \dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0,\ u(x,0)=u_0(x),\\ u_t(x,0)=\dot{u}_0(x).\ (0\le x\le l_0) \end{gathered} \qquad (4)$$

относительно функций $\theta=\theta(t),\ u=u(x,t)$ в области $Q_{l,T}=\{\,0\le x\le l,\ 0\le t\le T\,\}$, где $l=l(t)\in W_2^2(0,T)$, $l(t)>0,\ l_0=l(0),\ \ M(t)\in L_2(0,T)$; $b>0$ – некоторая постоянная, $J(l)=J_0+1/3+(b+l)[(b+l)-1]>0.$

Начально-краевая задача (1)–(4) возникает при моделировании динамики телескопического манипуляционного робота [1].

Рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить функцию $M(t)\in L_2(0,T)$, переводящую решение краевой задачи (1)–(3) из начального состояния (4) в конечное

$$\begin{gathered} \theta(T)=\theta_{0T},\ \dot{\theta}(T)=\theta_{1T},\\ u(x,T)=u_{0T}(x),\ u_t(x,T)=u_{1T}(x)\\ \left(0\le x\le l_T=l(T)\right) \end{gathered} \qquad (5)$$

в заданный момент времени T и минимизирующее функционал

$$\Phi(M)=\|M(t)\|_{L_2(0,T)}. \qquad (6)$$

Задача 2. (Задача быстродействия). Определить функцию $M(t)\in L_2(0,T),\Phi(M)\le L<\infty,$ переводящую решение краевой задачи (1)–(3) из (4) в (5) за минимальное время T.

2. Построение решения начально-краевой задачи (1)–(4).

Выразим из уравнения (1) $\ddot{\theta}$ и подставим в (2). В результате получим уравнение

$$\begin{gathered} u_{tt}-J^{-1}(l)(b+l-x)\times\\ \times\int_0^l (b+l-x_1)u_{tt}(x_1,t)dx_1+u_{xxxx}= \\ =J^{-1}(l)(b+l-x)M(t), \end{gathered} \qquad (7)$$

которое совместно с краевыми (3) и начальными (4) условиями определяет начально-краевую задачу для определения $u(x,t)$.

Пусть сначала $l(t)\equiv l_0$. Для этого случая в [2, 3] сформулировано понятие обобщенного решения, доказана разрешимость и получена эффективная формула решения. Отметим основные результаты этих работ, так как они потребуются в дальнейшем.

Определяя решение (3)–(5) при $M(t)\equiv 0$ в виде $u(x,t)=\vartheta(x)\tau(t)$, получим для определения $\vartheta(x)$ следующую спектрально-краевую задачу:

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 14.B37.21.0225.

$$\vartheta^{IV} + J_1^{-1}(l_0)(b + l_0 - x)\times$$
$$\times(b\vartheta^{III}(l_0) + \vartheta^{II}(l_0)) = \lambda\vartheta, \qquad (8)$$

$$\vartheta^{III}(l_0) = \vartheta^{II}(l_0) = 0, \vartheta^{I}(l_0) = \vartheta(l_0) = 0, \qquad (9)$$

где $J_1(l_0) = J(l_0) - \int\limits_0^{l_0}(b + l_0 - x)^2 dx > 0$.

Спектральная краевая задача (8)–(9) подробно изучена в [2]. Показано, что существует последовательность однократных собственных значений $0 < \lambda_1(l_0) < \lambda_2(l_0) < ... < \lambda_n(l_0) = \beta_n^4(l_0)$, которым отвечает последовательность собственных функций $\vartheta_n(x, l_0), (n = 1, 2, ...)$, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\left\langle \vartheta_n(x, l_0), \vartheta_m(x, l_0)\right\rangle = \delta_{n,m}, \qquad (10)$$

где $\left\langle \vartheta(x), \mu(x)\right\rangle = \left(A_0\vartheta(x), \mu(x)\right)_{L_2}$, а оператор

$$A_0\vartheta(x) \equiv \vartheta(x) - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x)(b + l_0 - x, \vartheta(x))_{L_2},$$

$\delta_{n,m}$ – символ Кронекера.

Величины $\beta_n = \beta(l_0)$ $(n = 1, 2, ...)$ являются положительными корнями характеристического уравнения:

$$\cos(\beta l_0)\mathrm{ch}(\beta l_0) + 1 +$$
$$+ J^{-1}(l_0)[(\beta^{-3} + b^2/\beta)\sin(\beta l_0)\mathrm{ch}(\beta l_0) +$$
$$+ (b^2/\beta - \beta^{-3})\cos(\beta l_0)\mathrm{sh}(\beta l_0) +$$
$$+ 2b/\beta^2 \sin(\beta l_0)\mathrm{sh}(\beta l_0)] = 0.$$

В [2] получен явный вид функций $\vartheta_n(x, l_0)$.

Введем некоторые функциональные пространства. Обозначим через $H(0,1)$ пространство $L_2(0,1)$, снабженное скалярным произведением (10) и нормой $\| u\|_H = \left\langle u(x), u(x)\right\rangle^{1/2}$. Через $H_2(0,1)$ обозначим пространство функций $u(x)$ вида

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\vartheta_n(x, l_0) \quad (u_n = \left\langle u(x), \vartheta_n(x, l_0)\right\rangle),$$

для которых $\| u\|_{H_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2 u_n^2 < \infty$ $(\omega_n = \beta_n^2)$.

Очевидно, что $H_2(0,1) \subset W_2^2(0,1)$ и

$$\left(u(x), v(x)\right)_{H_2} = \left(u''(x), v''(x)\right)_{L_2(0,1)} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^2 u_n v_n.$$

Через $H_2(Q_{l_0,T})$ обозначим пространство функций $u(x,t)$, полученное замыканием в норме

$$\| u\|_{H_2(Q_{l_0,T})}^2 = \int\limits_0^T (\| u_t(x,t)\|_H^2 + \| u(x,t)\|_{H_2}^2)dt$$

множества функций

$$u(x,t) \in C^{3,1}(Q_{l_0,T}), u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = 0,$$
$$u(l_0,t) = u_x(l_0,t) = 0.$$

Введем в рассмотрение функции вида

$$w(x,t) \in H_2(Q_{l_0,T}), w(x,T) \equiv 0. \qquad (11)$$

Наряду с уравнением (7) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x)\times$$
$$\times\int\limits_0^{l_0}(b + l_0 - x_1)u_{tt}(x_1,t)dx_1 + u_{xxxx} = \qquad (12)$$
$$= J^{-1}(l_0)(b + l_0 - x)M(t) + f_{xxxx}(x,t),$$

где $f(x,t)$ – некоторая функция.

Умножим уравнение (12) на $w(x,t)$ вида (11) и проинтегрируем по (x,t) в $Q_{l_0,T}$. В результате, с учетом (3), (4) получим интегральное соотношение

$$\int\limits_0^T\Big(\left(u\ (x,t), w\ (x,t)\right)_{H_2} - \left\langle u_t(x,t), w_t(x,t)\right\rangle -$$
$$- J_1^{-1}(l)\left\langle b + l_0 - x, w(x,t)\right\rangle M(t) - \qquad (13)$$
$$- \left(f\ (x,t)w\ (x,t)\right)_{H_2}\Big)dt - \left\langle u_1(x), w(x,0)\right\rangle = 0.$$

Пусть

$$u_0(x) \in H_2(0,1), u_1(x) \in H(0,1). \qquad (14)$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (3), (4), (12) с начальными условиями (14) и произвольной функцией $f(x,t) \in H_2(Q_{l_0,T})$ будем понимать функцию $u(x,t) \in H_2(Q_{l_0,T})$ $\left(u(x,0) \equiv u_0(x)\right)$, удовлетворяющую интегральному соотношению (13) для любой функции $w(x,t)$ вида (11).

Из результатов [2, 3] следует, что обобщенное решение начально-краевой задачи (3), (4), (12) существует, единственно и представимо в виде:

$$u(x,t) = \left\langle G_t(t,x,\xi), u_0(\xi)\right\rangle + \left\langle G(t,x,\xi), u_1(x)\right\rangle +$$
$$+ J^{-1}(l_0)\int\limits_0^t\left\langle G(t-\tau,x,\xi)M(\tau), b + l_0 - \xi\right\rangle d\tau + \qquad (15)$$
$$+ \int\limits_0^t\left(G(t-\tau,x,\xi), f(x,\tau)\right)_{H_2} d\tau,$$

где $G(t,x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{-1}\sin(\omega_n t)\vartheta_n(x,l_0)\vartheta_n(\xi,l_0)$ – функция Грина начально-краевой задачи (1) – (3), (7). При этом

$$\left\|u(x,t)\right\|_{H_2(Q_{l_0,T})}^2 \le C\Big(\left\|u_0(x)\right\|_{H_2}^2 + \left\|u_1(x)\right\|_H^2 +$$
$$+ \left\|b + l - x\right\|_H^2 \left\|M(t)\right\|_{L_2(0,T)}^2 + \qquad (16)$$
$$+ \left\| f(x,t)\right\|_{H_2(Q_{l_0,T})}\Big), \quad C > 0.$$

Пусть теперь $l = l(t)$. Представим $l(t) =$

$=l_0(1+l_1(t))$, $l_1(t)=(l(t)-l_0)/l_0$. Выполним в (3), (4), (7) замену переменных $(x,t)=$ $=\left((1+l_1(t))y,t\right)$ и положим $u\left((1+l_1(t))y,t\right)=$ $=v(y,t)$. В результате, с учетом выражений

$$u_{tt}=v_{tt}-2v_{yt}y\dot{l}_1(t)/(1+l_1(t))+$$
$$+v_{yy}y^2\dot{l}_1^2(t)/(1+l_1(t))^2+$$
$$+v_y y\left(2\dot{l}_1^2(t)-(1+l_1(t))\ddot{l}_1(t)\right)/(1+l_1(t))\equiv$$
$$\equiv v_{tt}+L(y,t,v_{yt},v_{yy},v_y,l_1(t)),$$
$$(L(y,t,v_{yt},v_{yy},v_y,0)\equiv 0),$$
$$u_{xxxx}=v_{yyyy}/(1+l_1(t))^4,$$

и введя действующий в $H(0,1)$ оператор

$$A(l_1(t))v(y)\equiv v(y)-(1+l_1(t))\times$$
$$\times J^{-1}\left(l_1(t)\right)[b+(1+l_1(t))(l_0-y)]\times$$
$$\times\int_0^{l_0}[b+(1+l_1(t))(l_0-y_1)]v(y_1)dy_1, \qquad (17)$$
$$J\left(l_0(1+l_1(t)\right)=J\left(l_1(t)\right),$$

запишем начально-краевую задачу (3), (4), (7) в следующем виде:

$$A\left(l_1(t)\right)\left(v_{tt}+L(y,t,v_{yt},v_{yy},v_y,l_1(t))\right)+$$
$$+v_{yyyy}/\left(1+l_1(t)\right)^4=J^{-1}\left(l_1(t)\right)\times \qquad (18)$$
$$\times[b+(1+l_1(t))(l_0-y)]M(t),$$
$$v_{yyy}(0,t)=v_{yy}(0,t)=0,\ v_y(l_0,t)=v(l_0,t)=0, \qquad (19)$$
$$v(y,0)=u_0(y),\ v_t(y,0)=u_1(y) \qquad (20)$$

в области $Q_{l_0,T}$.

Умножим уравнение (16) на функцию $w(y,t)$ вида (11) и проинтегрируем по (y,t) в $Q_{l_0,T}$. С учетом (19), (20) получим интегральное соотношение:

$$\int_0^T[-\left(v_t(y,t),\left(A(l_1(t)),w(y,t)\right)_t\right)_{L_2}+$$
$$+\left(L\left(y,t,v_{yt}(y,t),v_{yy}(y,t),v_y(y,t),l_1(t)\right),w(y,t)\right)_{L_2}+$$
$$+\left(v\ (y,t),w_y(y,t)\right)_{H_2}/(1+l_1(t))^4- \qquad (21)$$
$$-J^{-1}(l_1(t))\left(b+(1+l_1(t))(l_0-y),w(y,t)\right)M(t)]dt-$$
$$-\langle u_1(y),w(y,0)\rangle=0.$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (18)–(20) будем понимать функцию $v(y,t)\in H_2(Q_{l_0,T})$ $(v(y,0)=u_0(y))$, удовлетворяющую соотношению (21) для любой функции $w(y,t)$ вида (11).

Утверждение 1. Обобщенное решение начально-краевой задачи (18)–(20) существует и единственно.

Доказательство единственности проводится по следующей стандартной схеме. Предположив существование двух решений, для их разности $v(x,t)$ получим однородное интегральное соотношение вида (21) с нулевыми начальными условиями. Взяв теперь в качестве $w(x,t)$ функцию

$$w_\tau(x,t)=\begin{cases}\int_t^\tau v(x,\xi)d\xi,\ 0<t<\tau,\\ 0,\ \tau<t<T,\end{cases}$$

и подставив в (19), легко заметить, что равенство возможно лишь при $v(x,t)\equiv 0$.

Рассмотрим теперь вопрос существования решения. Перепишем уравнение (18) в следующем виде:

$$A_0v_{tt}+v_{yyyy}-J_1^{-1}\left(l_1(t)\right)\times$$
$$\times\left[b+\left(1+l_1(t)\right)\left(l_0-y\right)\right]M(t)=$$
$$=-A_0L\left(y,t,v_{yt}(y,t),v_{yy}(y,t),v_y(y,t),l_1(t)\right)+ \qquad (22)$$
$$+[v_{yyyy}-A_0A^{-1}\left(l_1(t)\right)v_{yyyy}/(1+l_1(t))^4]\equiv$$
$$\equiv\Phi\left(y,t,v_{yyyy},v_{yt},v_{yy},v_y,l_1(t)\right).$$

Здесь

$$J_1\left(l_1(t)\right)=J\left(l_1(t)\right)-\left(1+l_1(t)\right)\times$$
$$\times\int_0^{l_0}\left[b+\left(1+l_1(t)\right)\left(l_0-y\right)\right]^2dy,$$
$$\Phi\left(y,t,v_{yyyy},v_{yt},v_{yy},v_y,0\right)=0,$$
$$A^{-1}\left(l_1(t)\right)v(y)\equiv v(y)+$$
$$+\left(1+l_1(t)\right)J_1^{-1}(l_1)\left[b+\left(1+l_1(t)\right)\left(l_0-y\right)\right]\times$$
$$\times\int_0^{l_0}\left[b+\left(1+l_1(t)\right)\left(l_0-y\right)\right]v(y)dy.$$

Для построения обобщенного решения начально-краевой задачи (19), (20), (22) построим итерационный процесс

$$A_0v_{tt}^{(n+1)}+v_{yyyy}^{(n+1)}-J_1^{-1}\left(l_1(t)\right)\times$$
$$\times\left[b+\left(1+l_1(t)\right)\left(l_0-y\right)\right]M(t)= \qquad (23)$$
$$=\Phi\left(y,t,v_{yyyy}^{(n)},v_{yt}^{(n)},v_{yy}^{(n)},v_y^{(n)},l_1(t)\right)=0,$$
$$v_{yyy}^{(n+1)}(0,t)=v_{yy}^{(n+1)}(0,t)=0,$$
$$v_y^{(n+1)}(l_0,t)=v^{(n+1)}(l_0,t)=0, \qquad (24)$$
$$v^{(n+1)}(y,0)=u_0(y),v_t^{(n+1)}(y,0)=\dot{u}_0(y),$$
$$v^{(0)}(y,t)\equiv 0. \qquad (25)$$

Обобщенное решение (23)–(25) существует и на основании (15), (22) определяется формулой

$$
\begin{aligned}
&v^{(n+1)}(y,t)=\langle G_t(t,x,\xi),u_0(\xi)\rangle+\\
&+\langle G(t,x,\xi),\dot u_0(\xi)\rangle+\int_0^t\Big\{\Big\langle G(t-\tau,x,\xi),J_1^{-1}\times\\
&\times\Big(l_1(\tau)\big[b+\big(1+l_1(\tau)\big)\big(l_0-y\big)\big]M(\tau)-\\
&-A_0L\big(\xi,t,v_{\xi t}(\xi,t),v_{\xi\xi}(\xi,t),v_\xi(\xi,t),l_1(t)\big)\Big)+\\
&+\Big(G(t-\tau,x,\xi),\Big[v^{(n)}(\xi,\tau)-A_0A^{-1}\big(l_1(\tau)\big)\times\\
&v^{(n)}(\xi,\tau)/(1+l_1(\tau))^4\Big]\Big)_{H_2}\Big\}d\tau.
\end{aligned}\tag{26}
$$

Для доказательства сходимости итерационного процесса (26) достаточно воспользоваться оценкой (16) и схемой построения решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода ([4], с. 99).

Возвратившись теперь к переменным (x,t), получим решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи (3), (4), (7). Запишем это решение в следующей форме. Обозначим через $w^{(0)}(x,t)$ решение однородной части уравнения (7) (при $M(t)\equiv 0$), отвечающее краевым условиям (3) и начальным условиям

$$w^{(0)}(x,0)=u_0(x),\ \ w_t^{(0)}(x,0)=\dot u_0(x),$$

Введем в рассмотрение функцию $w(x,t,\tau)$, определенную в области $\{0\le x\le l(t),\ t\ge\tau,\ \tau>0\}$, являющуюся решением однородной части уравнения (7), и удовлетворяющую краевым условиям (3) и следующим начальным условиям:

$$w(x,\tau,\tau)=0,\ w_t(x,\tau,\tau)=J^{-1}(l(\tau))(b+l(\tau)-x).$$

Существование указанных решений следует из утверждения 1.

Легко проверяется, что

$$u(x,t)=w^{(0)}(x,t)+\int_0^t w(x,t,\tau)M(\tau)d\tau \tag{27}$$

является решением начально-краевой задачи (3), (4) для уравнения (7).

Подставив теперь (27) в уравнение (1), получим

$$
\begin{aligned}
&\theta(t)=\theta_0+\dot\theta_0 t+\int_0^t(t-\tau)J^{-1}(l(\tau))\times\\
&\times\left[\int_0^{l(\tau)}\big(b+l(\tau)-x_1\big)\ u_{tt}(x_1,\tau)dx_1+M(\tau)\right]d\tau.
\end{aligned}\tag{28}
$$

3. Построение оптимального уравнения

Согласно (27), (28), решение задачи 1 эквивалентно минимизации функционала (6) при выполнении следующих условий:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1(T)\equiv\dot\theta_T-\dot\theta_0-\int_0^T J^{-1}(l(\tau))\times\\
&\times\left[\int_0^{l(\tau)}\big(b+l(\tau)-x_1\big)u_{tt}(x_1,\tau)dx_1\right]d\tau=\\
&=\int_0^T M(\tau)d\tau,
\end{aligned}\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2(T)\equiv\theta_T-\theta_0-\dot\theta_0T-\int_0^T(T-\tau)J^{-1}(l(\tau))\times\\
&\times\left[\int_0^{l(\tau)}\big(b+l(\tau)-x_1\big)u_{tt}(x_1,\tau)dx_1\right]d\tau=\\
&=\int_0^T(T-\tau)M(\tau)d\tau,
\end{aligned}\tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot\alpha(x,T)\equiv\dot u_T(x)-w_t^{(0)}(x,T)=\\
&=\int_0^T w_t(x,T,\tau)M(\tau)d\tau,
\end{aligned}\tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha(x,T)\equiv u_T(x)-w^{(0)}(x,T)=\\
&=\int_0^T w(x,T,\tau)M(\tau)d\tau.
\end{aligned}\tag{32}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{(2n+1)}(T)\equiv\langle\dot\alpha(x,T),\vartheta_n(x,l_T)\rangle,\\
&\alpha_{(2n+2)}(T)\equiv\langle\alpha(x,T),\vartheta_n(x,l_T)\rangle\ \ (n=1,2,...),
\end{aligned}\tag{33}
$$

и введем определенные на $[0,\ T]$ функции

$$
\begin{aligned}
&\phi_1(t)\equiv1,\ \ \phi_2(t)\equiv T-t,\\
&\phi_{(2n+1)}(t)\equiv\langle w_t(x,T,t),\vartheta_n(x,l_T)\rangle,\\
&\phi_{(2n+2)}(t)\equiv\langle w(x,T,t),\vartheta_n(x,l_T)\rangle\\
&(n=1,2,...).
\end{aligned}\tag{34}
$$

С учетом (33), (34) равенства (29)–(32) можно переписать в виде:

$$\big(\phi_j(t),M(t)\big)_{L_2(0,T)}=\alpha_j(T),(j=1,2,...).\tag{35}$$

Решение задачи 1 сформулируем как проблему моментов.

В $L_2(0,T)$ найти функционал вида

$$F(u)=\big(u(t),M(t)\big)_{L_2(0,T)},$$

удовлетворяющий условиям (35) и имеющий минимальную норму $\|F\|=\|M^*(t)\|_{L_2(0,T)}$.

В работе [2] дано следующее решение проблемы моментов и задач 1, 2.

Построим по системе функций (34) ортонормированную в $L_2(0,T)$ систему функций $\psi_j(t)$, где $\big(\psi_m(t),\psi_n(t)\big)_{L_2(0,T)}=\delta_{m,n}$, $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера. Для этого используется процедура ортогонализации Шмидта [5, с. 26]. Эта процедура определяет линейный ограниченный оператор B, переводящий последовательность $\left(\phi_1(t), \phi_2(t)...\right)$ в последовательность $\left(\psi_1(t), \psi_2(t),...\right)$, который определяется бесконечной матрицей $\left\{b_{i,j}\right\}$, $i, j = 1,...,\infty.$ Применим этот оператор (матрицу) к последовательности $\left(\alpha_1(T), \alpha_2(T)...\right)$. В результате получим последовательность $\left(\beta_1(T), \beta_2(T)...\right)$.

Утверждение 2. Решение проблемы моментов (задачи 1) дается формулой

$$M^*(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_j(T)\psi_j(t). \quad (36)$$

При этом

$$\left\|M^*(t)\right\|_{L_2(0,T)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_j^2(T)\right)^{1/2} = Q(T).$$

Утверждение 3.
$\lim_{T \to 0} Q(T) = \infty,\ \lim_{T \to \infty} Q(T) = 0.$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $Q(T) = L$.

Утверждение 4. Решение задачи 2 дается парой $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (36) при $T = T^*$.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989. 368 с.
2. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем. // ПММ. 1992. Т56. Вып. 1. С. 240–249.
3. Кубышкин Е.П., Хребтюгова О.А. Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем. // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. Вып. 1.. С. 84–86.
4. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: МГУ, 1989. С. 156.
5. Ахиезер Н.И., Глазман И.М.. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544 с.

OPTIMAL CONTROL OF ONE INITIAL-BOUNDARY TASK WITH VARIABLE BOUNDARY SOLUTIONS BEHAVIOR

M.S. Tryakhov

An initial-boundary task for evolution equation of hyperbolic type in the area with variable boundary arising while modeling of telescopic manipulator dynamics is examined. The task of moving solutions from single phase space point to another in a given time with a minimum of control energy functional and the performance task are solved.

Keywords: optimal equation, initial-boundary task, generalized solution, mathematical model.