

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ

© 2013 г. *В.И. Ерофеев*^{1,2}, *А.И. Землянухин*³, *И.А. Ковалева*³

¹ Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

² Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

³ Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

azemlyanukhin@mail.ru

Поступила в редакцию 09.10.2012

С использованием метода простейших уравнений построено точное решение пространственно-двумерного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка. Численный эксперимент выявил типичное солитонное поведение точного решения и бризерные эффекты при распространении гауссова импульса.

Ключевые слова: эволюционные уравнения, нелинейная волновая динамика, точные решения, численное моделирование.

Построение точных аналитических решений очень важно, но часто недостаточно для целостного исследования нелинейных эволюционных уравнений, особенно в неинтегрируемых случаях. Поэтому, как правило, вместе с аналитическим исследованием, выявляющим точные решения определенного класса, проводят еще и численное моделирование, которое позволяет наблюдать эволюцию этого решения. Такой подход выгоден еще и тем, что задание начальных условий в виде точного аналитического решения в численном эксперименте позволяет взаимно верифицировать аналитическое решение и построенную численную схему. Также в численном эксперименте можно исследовать эволюцию более сложных видов начальных условий, описание которых невозможно или затруднительно в рамках качественного анализа.

Рассмотрим нелинейное эволюционное пространственно-двумерное уравнение с постоянными коэффициентами, обобщающее известное уравнение Кадомотца – Петвиашвили и не интегрируемое при помощи метода обратной задачи рассеяния:

$$(u_t + c_1 u^2 u_x + c_2 u u_{xxx} + c_3 u_x u_{xx} + c_4 u_{xxx} + c_5 u_{xxxxx})_x = c_6 u_{yy}, \quad (1)$$

где c_i – постоянные, а нижний буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей независимой переменной.

Для упрощения уравнения перейдем к новым переменным

$$t' = t \frac{c_1^{3/2} c_4^{5/2}}{c_3^3}, \quad u' = u \frac{c_3}{c_4}, \quad x' = x \frac{\sqrt{c_1 c_4}}{c_3},$$

$$y' = y \frac{c_1}{c_3^2} \sqrt{\frac{c_4^3}{c_6}}, \quad \alpha = \frac{c_2}{c_3}, \quad \beta = \frac{c_1 c_5}{c_3^2},$$

в которых оно примет вид (штрихи опускаем):

$$(u_t + u^2 u_x + \alpha u u_{xxx} + u_x u_{xx} + u_{xxx} + \beta u_{xxxxx})_x = u_{yy}. \quad (2)$$

Будем решать уравнение (2) с помощью метода простейших уравнений [1]. Так как нас интересуют уединенно-волновые решения, в качестве простейшего уравнения используем уравнение Риккати

$$Y_z = -Y^2 + aY + b \quad (3)$$

с решением

$$Y(z) = \frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{4b + a^2}}{2} \tanh \left[\frac{1}{2} \sqrt{4b + a^2} (z + C_2) \right],$$

где a и b будут определены позднее из перепределенной системы уравнений, C_2 – произвольный параметр.

Переписывая уравнение (2) в переменных бегущей волны $u(x, y, t) \equiv u(z)$, $z = x + k_1 y - C_0 t$, после однократного интегрирования получаем:

$$-(C_0 + k_1^2)u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}(1 - \alpha)u_z^2 + \alpha u u_{zz} + u_{zz} + \beta u_{zzzz} = 0. \quad (4)$$

Подставляя $u = Az^\alpha$ в уравнение, содержащее только доминантные члены $u^3 / 3 + \beta v_{zzzz} = 0$, находим порядок сингулярно-

сти общего решения уравнения (2) – $\alpha = 2$. Таким образом, точное решения будем искать в виде:

$$u(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + B_1 \left(\frac{Y_z}{Y} \right) + B_2 \left(\frac{Y_z}{Y} \right)^2, \quad (5)$$

где A_i, B_i – произвольные постоянные.

С учетом (3) получаем:

$$u(z) = (A_2 + B_2) Y^2 + (A_1 - B_1 - 2aB_2) Y + A_0 + aB_1 + B_2 (a^2 - 2b) + \frac{bB_1 + 2abB_2}{Y} + \frac{B_2 b^2}{Y^2}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2) и приравнявая члены с одинаковой степенью Y_z , получаем переопределенную систему уравнений. При произвольных коэффициентах α и β решение системы очень громоздко, поэтому выберем конкретные значения коэффициентов $\alpha=1$, $\beta=1/5$ и выпишем первые два уравнения:

$$\begin{aligned} (144B_2 - 36B_2^2 - 2B_2^3)b^7 &= 0, \\ (-5B_1B_2^2 - 40B_1B_2 - 24B_1 - \\ -166aB_2^2 - 12zB_2^3 - 528aB_2)b^6 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{-4b + \sqrt{-5 + 5C_0 + 5k_1^2}}, \\ A_0 &= 1 + 12b - \sqrt{-5 + 5C_0 + 5k_1^2}, \\ A_1 &= 12\sqrt{-4b + \sqrt{-5 + 5C_0 + 5k_1^2}}, \\ A_2 &= -12, \\ B_0 &= B_1 = B_2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя найденные коэффициенты в разложение (6) с учетом (3), получаем точное решение уравнения (2) в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 2K + 1 - \\ &- 3K \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{K}}{2} (x + k_1 y - C_0 t) \right), \\ K &= \sqrt{5(C_0 + k_1^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где C_0 и k_1 – произвольные постоянные, для которых выполняется соотношение $C_0 + k_1^2 \geq 1$.

Решение при $C_0=1/5$, $k_1=1$ имеет вид (рис.1):

$$u(x, y, t) = 3 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{K}}{2} (x + k_1 y - C_0 t) \right).$$

Для верификации полученного уединенно-волнового решения оно было выбрано в качестве начального условия в численном эксперименте. Вычисления проводились с помощью полунейвной псевдоспектральной схемы [2, 3] с параметрами: 256×64 – размерность сетки,

$\Delta x = 0.25$ – длина шага по x , $\Delta y = 0.25$ – длина шага по y , $\Delta t = 0.001$ – длина шага по времени.

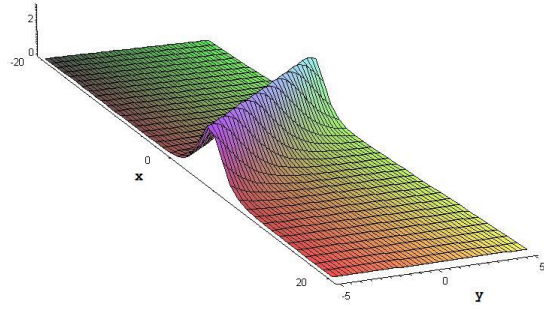


Рис. 1. Точное решение

Заметим, что уравнение (2) имеет смешанную производную u_{xt} , что неудобно для построения спектральной схемы. Интегрируя по x , получаем интегральную форму уравнения (2):

$$u_t + u^2 u_x + \alpha u u_{xxx} + u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = \delta \int_0^x u_{yy} dx.$$

Однако основную проблему составляет наличие зависимости функции u от поперечной координаты y . Так как интегральный член, содержащий эту поперечную неоднородность, линейный, его вычисление можно вынести за рамки спектральной схемы. Таким образом, моделирование будет происходить в два этапа:

- вычисление значения функции u на новом временном слое с помощью псевдоспектрального алгоритма для уравнения без правой части.

- вычисление интегрального члена $\delta \int_0^x u_{yy} dx$ любым удобным методом интегрирования, например методом трапеций или методом Фурье-интегрирования – домножение Фурье-образа функции на $1/i\xi$ и вычисление обратного преобразования.

Устойчивость и сходимость метода проверялась вариацией параметров dt и dx . При изменении этих величин вдвое относительно вышеприведенных данных получающиеся решения отличались не более чем на доли процента.

Фронт уединенной волны распространяется без возмущений в положительном направлении оси x (рис. 2, 3), что говорит о достоверности полученного аналитического решения.

Также было рассмотрено начальное условие в виде гауссова импульса (рис. 4):

$$u_0(x, y) = 9 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - 32}{4} \right) \operatorname{sech}(y - 8), \quad (10)$$

при следующих значениях коэффициентов:

$$c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 1, c_4 = 0.1, c_5 = 5, c_6 = 1.$$

Такой выбор коэффициентов позволяет наблюдать характерные «бризерные» эффекты на переднем фронте эволюционирующего возмущения.

Купол возмущения движется вперед (по x), одновременно расплываясь в стороны (по y), причем последний эффект преобладает (рис. 5).

Двигаясь вперед фронт расщепляется на три части (рис. 6).

Первые два фронта движутся быстрее и уносят с собой большую часть энергии возмущения. Наиболее интересным оказывается волновая картина вблизи центров первого и второго фронтов (рис. 6, 7).

Имея близкую амплитуду ($A \approx 5.0$), возмущения около центров фронтов начинают «дышать», обмениваясь энергией. Этот эффект очень близок по своей природе к распространению бризера в одномерном случае уравнения (1), при $c_6=0$ (рис. 8).

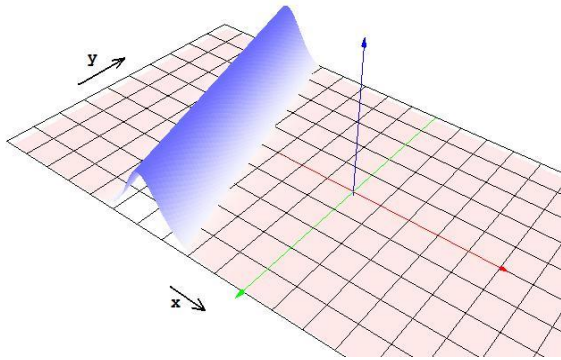


Рис. 2. (t=0)

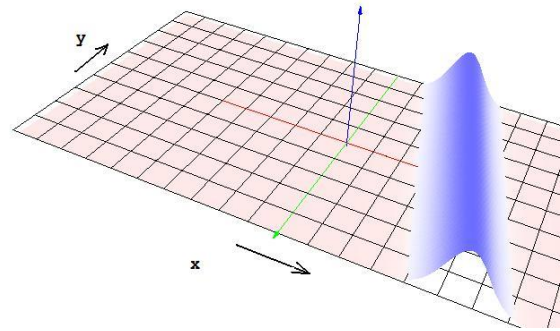


Рис. 3. (t=20)

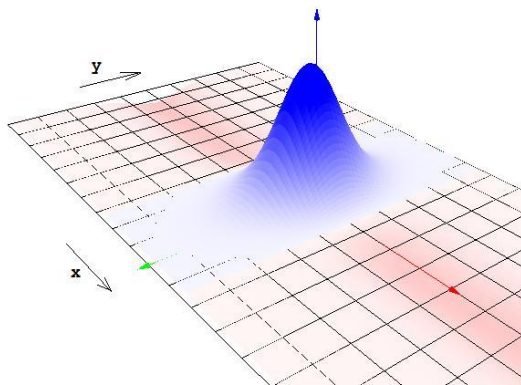


Рис. 4. (t=0)

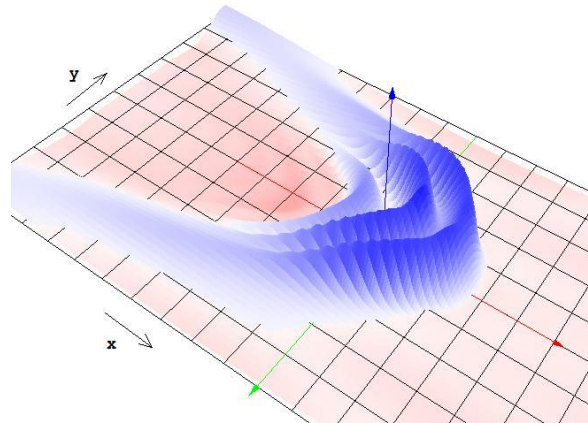


Рис. 5. (t=5)

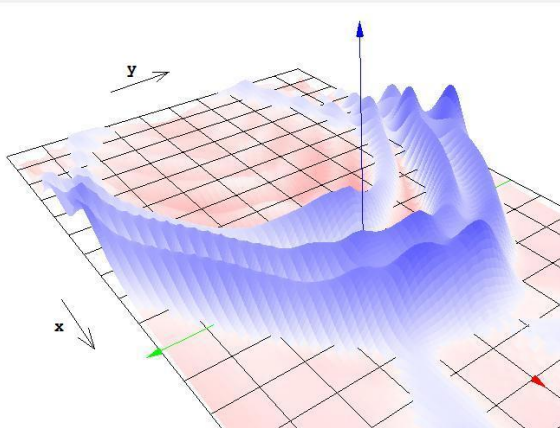


Рис. 6. (t=7)

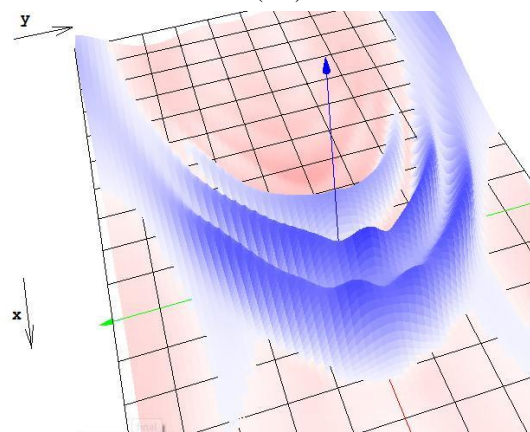


Рис. 7. (t=9)

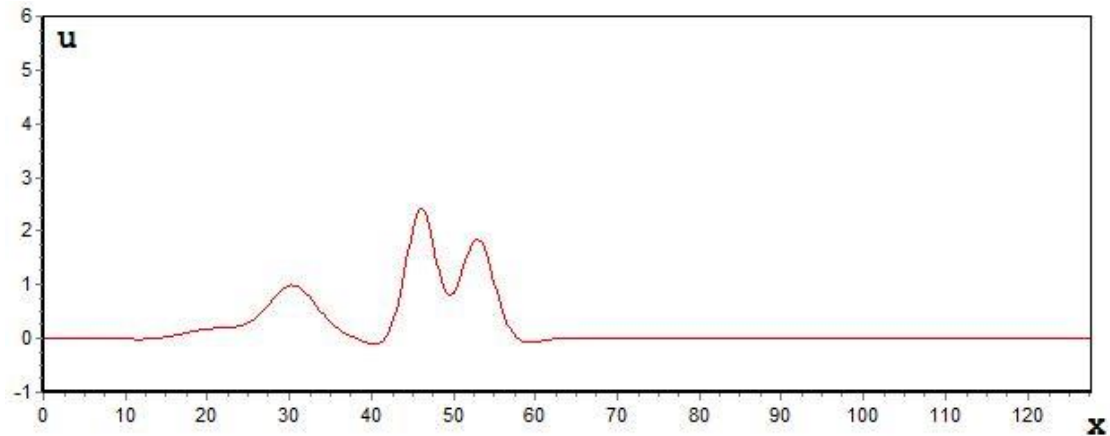


Рис. 8 (t=6.5)

Список литературы

1. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations; *Chaos, Solitons and Fractals* 24 (2005) 1217–1231
2. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М.; Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне. *Нелинейный мир*. 2009. № 7. С. 533-540.
3. Orszag S. Pseudospectral method // *Stud. Appl. Math.* 1971. V. 50. P. 293–327.

NUMERICALLY ANALYZING THE GENERALIZED EVOLUTION EQUATION OF NONLINEAR WAVE DYNAMICS

V.I. Yerofeyev, A.I. Zemlyanuhin, I.A. Kovalyova

Using the simplest equation method, an exact solution of a fifth-order spatial-two-dimensional nonlinear evolution equation is constructed. A numerical experiment discovered typical soliton behavior of the exact solution and brezer effects in the propagation of Gauss pulse.

Keywords: evolution equations, nonlinear wave dynamics, exact solutions, numerical modeling.