

УДК 517.9

## ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ВО ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© 2013 г. *С.А. Шурыгина, О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов*

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского  
Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина

shuryginasa@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2012

Исследована обобщенная синхронизация во взаимно связанных хаотических системах с дискретным временем. Показано, что порог возникновения обобщенной синхронизации в таких системах может быть диагностирован по моменту перехода одного из старших ляпуновских показателей в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей.

*Ключевые слова:* обобщенная хаотическая синхронизация, дискретные отображения, показатели Ляпунова, взаимная связь, метод ближайших соседей.

### Введение

Исследование сложного поведения сосредоточенных и распределенных систем различной природы представляет собой актуальную задачу современных исследований в области радиофизики и электроники. Одним из центральных моментов при этом является изучение неавтономной динамики нелинейных систем, способных демонстрировать сложное поведение, и, прежде всего, проблем, связанных с исследованием синхронизации. Хаотическая синхронизация нелинейных динамических систем является универсальным явлением, имеющим большое фундаментальное и практическое значение [1–3]. Синхронизация может наблюдаться не только в радиофизических и физических, но и в физиологических, биологических, химических, социальных и других системах. В настоящее время выделяют достаточно большое число различных типов синхронного поведения хаотических осцилляторов. Одним из наиболее интересных из них является режим обобщенной хаотической синхронизации [4]. Этот режим традиционно вводится в рассмотрение для системы двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов или дискретных отображений, ведущего  $x$  и ведомого  $u$ , и означает, что после завершения переходного процесса между состояниями этих систем устанавливается уникальное функциональное соотношение  $F[\cdot]$  так, что

$$u = F[x]. \quad (1)$$

В последнее время появились попытки обобщения режима обобщенной синхронизации на системы с взаимным типом связи [5]. Известные работы, посвященные этой проблеме, направлены лишь на установление факта существования этого режима, в то время как само понятие обобщенной синхронизации для таких систем, как правило, не вводится в рассмотрение. Диагностика обобщенной синхронизации в этих работах проводится обычно при помощи модификации метода вспомогательной системы [6], являющегося эффективным средством анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью. Однако, как было показано в работе [7], этот метод для систем с взаимным типом связи приводит к некорректным результатам.

В настоящей работе проводится исследование обобщенной синхронизации в системе двух взаимно связанных дискретных отображений. Далее будет показано, что диагностирование обобщенной синхронизации в таких системах можно осуществлять путем расчета спектра ляпуновских экспонент или при помощи метода ближайших соседей.

### Методы анализа обобщенной синхронизации во взаимосвязанных системах с дискретным временем

Прежде всего, обобщим понятие обобщенной синхронизации (1) на случай взаимной связи между системами. Для учета взаимного вли-

яния систем друг на друга уравнение (1) для двух взаимно связанных отображений переписем в виде

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n] = 0. \quad (2)$$

При этом уравнение (2) оказывается справедливым как для однонаправленного, так и для взаимного типа связи между системами, в то время как соотношение (1) является частным случаем соотношения (2). Другими словами, под обобщенной синхронизацией взаимно связанных систем так же, как и в случае однонаправленной связи, будем понимать такой режим, при котором имеет место установление уникального функционального соотношения между состояниями этих систем, но функциональное соотношение в данном случае будет иметь вид (2) вместо (1).

Рассмотрим механизмы возникновения обобщенной синхронизации во взаимосвязанных системах с диссипативным характером связи. Как уже отмечалось, существует несколько методов определения порога возникновения обобщенной синхронизации. В данной работе использованы два из них: метод расчета спектра ляпуновских показателей и метод ближайших соседей. Остановимся на них более подробно.

*Метод расчета условных ляпуновских показателей*

Предположим, что имеются две системы с дискретным временем, демонстрирующие хаотическую динамику, состояние каждой из которых характеризуется вектором состояния  $\mathbf{x}_i$ , где  $i = \overline{1, N}$ , при этом системы могут быть неидентичными. Для характеристики сложности хаотического движения обычно рассчитывается спектр ляпуновских экспонент. В рассматриваемом случае поведение системы (2) описывается набором  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$  показателей Ляпунова, причем в отсутствие связи между системами, как минимум, два старших из них должны быть положительными. При увеличении диссипации в системе одна из старших (исначально положительных) ляпуновских экспонент переходит через ноль. Когда  $\lambda_2$  становится отрицательным, остается только одна степень свободы хаотических колебаний, что и соответствует установлению режима обобщенной синхронизации. Отметим также, что отрицательность второго показателя Ляпунова  $\lambda_2$ , как критерий существования обобщенной синхронизации, согласуется с аналогичным критерием, используемым для диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах [8, 9].

*Метод ближайших соседей*

Другим методом диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является метод ближайших соседей, который заключается в том, что наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем означает, что все близкие состояния в фазовом пространстве первой системы  $\mathbf{x}_n$  соответствуют близким состояниям в фазовом пространстве второй системы  $\mathbf{u}_n$  (более подробно см. [4]). Для двух взаимно связанных систем верно и обратное утверждение: все близкие состояния в фазовом пространстве второй системы  $\mathbf{u}_n$  должны соответствовать близким состояниям в фазовом пространстве первой системы  $\mathbf{x}_n$ . Количественной характеристикой степени близости состояний систем является среднее расстояние между двумя состояниями одной из систем  $\mathbf{u}^k$  и  $\mathbf{u}^{kn}$ , нормированное на среднее расстояние  $\delta$  между случайно выбранными состояниями другой системы [10]:

$$d = \frac{1}{N\delta} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{kn}\|, \quad (3)$$

где  $N$  – число производимых итераций. В режиме обобщенной синхронизации  $d \rightarrow 0$ , в отсутствие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем  $d \approx 1$ .

Принципиальным недостатком метода ближайших соседей является его недостаточная точность. Метод позволяет определить порог возникновения синхронного режима только приблизительно и находит применение при обработке экспериментальных данных (где реализация других методов анализа представляется затруднительной) или используется для уточнения полученных результатов. Поэтому в ходе исследований метод ближайших соседей использовался для верификации факта наступления обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи по моменту перехода второй (положительной) ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений.

#### **Исследование обобщенной хаотической синхронизации во взаимосвязанных системах на конкретных примерах**

Чтобы проверить справедливость рассуждений рассмотрим две системы с дискретным временем.

*Логистические отображения*

В качестве первого примера рассмотрим два взаимно связанных логистических отображения:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, a_x) + \sigma(f(y_n, a_y) - f(x_n, a_x)), \\ y_{n+1} &= f(y_n, a_y) + \sigma(f(x_n, a_x) - f(y_n, a_y)), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $f(x, a) = ax(1-x)$ ,  $a_x = 3.92$ ,  $a_y = 3.98$  – управляющие параметры взаимодействующих систем соответственно,  $\sigma$  – параметр связи [11, 12].

Покажем, что режим обобщенной синхронизации в данной системе может быть диагностирован по моменту перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений. Рассмотрим поведение спектра ляпуновских экспонент системы (4). На рис. 1а показана зависимость двух ляпуновских экспонент от параметра связи. Момент перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений  $\sigma_{GS} = 0.213$  показан стрелкой.

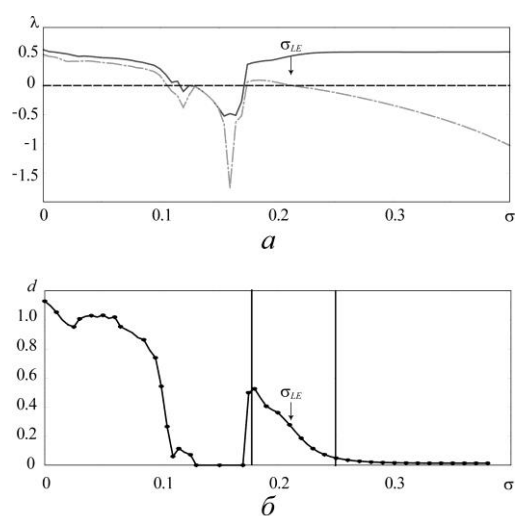


Рис. 1. (а) зависимость двух ляпуновских экспонент от параметра связи  $\sigma$ ; (б) зависимость количественной меры  $d$  от параметра связи  $\sigma$ .

Можно предположить, что по аналогии со случаем однонаправленно связанных систем этот переход может быть интерпретирован как установление обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи. Для проверки сделанных предположений применим метод ближайших соседей для диагностики обобщенной синхронизации в системе (4). На рис. 1б детально показана зависимость характеристики  $d$  от параметра связи  $\sigma$ . Видно, что момент перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в

область отрицательных значений приходится примерно на середину падающего участка характеристики  $d$ , в то время как при дальнейшем увеличении  $\sigma$  величина  $d$  остается близкой к нулю. Этот факт, по аналогии с работой [7], доказывает, что момент перехода одной из старших ляпуновских экспонент в область отрицательных значений можно интерпретировать как порог наступления обобщенной синхронизации во взаимосвязанных системах с дискретным временем.

*Отображения Эно*

В качестве второго примера рассмотрим два взаимно связанных отображения Эно:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= f(x_n^1, x_n^2, a_x) + \sigma(f(y_n^1, y_n^2, a_y) - f(x_n^1, x_n^2, a_x)), \\ x_{n+1}^2 &= bx_n^1, \\ y_{n+1}^1 &= f(y_n^1, y_n^2, a_y) + \sigma(f(x_n^1, x_n^2, a_x) - f(y_n^1, y_n^2, a_y)), \\ y_{n+1}^2 &= by_n^1, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$  [ $\mathbf{y} = (y^1, y^2)$ ] – векторы состояний первой (второй) системы,  $f(x_1, x_2, a) = ax_1(1-x_1) + x_2$  – нелинейная функция,  $a_x = 3.15$ ,  $a_y = 3.05$ ,  $b = 0.22$  – управляющие параметры,  $\sigma$  – параметр связи [8, 13].

Для выбранных значений управляющих параметров так же, как и в случае связанных логистических отображений, рассмотрим поведение спектра показателей Ляпунова для данной системы (5). Момент перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений  $\sigma = 0.078$  показан стрелкой на рис. 2а. Также на рис. 2б показана зависимость характеристики  $d$  от параметра связи  $\sigma$ , аналогичная случаю связанных логистических отображений (4). Видно, что переход одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений также приходится на середину падающего участка характеристики  $d$ . Таким образом, можно говорить об универсальности данной характеристики для верификации порога наступления обобщенной хаотической синхронизации в дискретных отображениях, связанных взаимно. Критическое значение параметра связи  $\sigma_{GS} = 0.078$  (момент перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений) показано стрелкой.

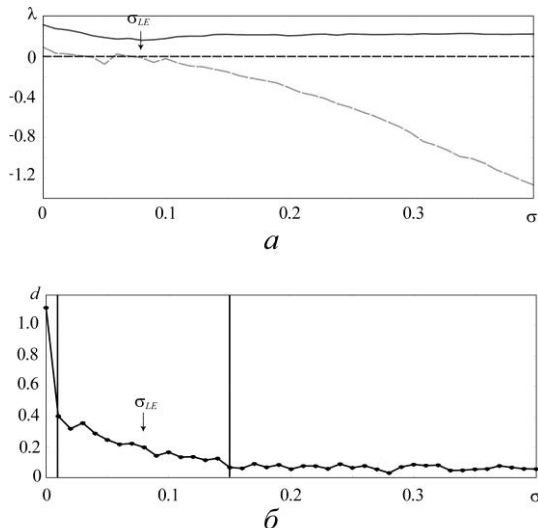


Рис. 2. (а) зависимость двух старших ляпуновских экспонент от параметра связи; (б) зависимость количественной меры  $d$  от параметра связи  $\sigma$ .

### Заключение

В настоящей работе проведено исследование режима обобщенной синхронизации в дискретных отображениях, связанных взаимно. Предложена универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для двух однонаправленно, так и взаимно связанных хаотических систем. Показано, что возникновение режима обобщенной синхронизации во взаимодействующих дискретных отображениях, находящихся в хаотическом режиме, связано с переходом второй ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. Важно отметить, что метод вспомогательной системы, широко используемый для диагностики обобщенной синхронизации, для взаимно связанных систем приводит к некорректным результатам. Так как предложенная теория оказывается справедливой для различных систем, можно ожидать, что аналогичный механизм будет иметь место в системах различной природы.

## GENERALIZED SYNCHRONIZATION IN MUTUALLY COUPLED DISCRETE MAPS

*S.A. Shurygina, O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov*

Generalized synchronization in mutually coupled chaotic discrete maps is studied. The onset of generalized synchronization regime in such systems is shown to be detected by the moment of transition of one of the positive Lyapunov exponents in the field of the negative values. The obtained results are verified by means of the nearest neighbor method.

*Keywords:* generalized chaotic synchronization, discrete maps, Lyapunov exponents, mutual coupling, nearest neighbor method.

### Список литературы

1. Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology // *Nature (London)*. 2001. V. 410. P. 277–284.
2. The synchronization of chaotic systems / S. Boccaletti, J. Kurths, G.V. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou // *Physics Reports*. 2002. V. 366. P. 1.
3. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // *Успехи физических наук*. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281–1310.
4. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51. № 2. P. 980–994.
5. Zheng Z., Wang X., Cross M.C. Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65. P. 056211.
6. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53, № 5. P. 4528–4535.
7. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A. Generalized synchronization in mutually coupled dynamical systems // *Proceedings of 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*. 2010. P. 70-73
8. Pyragas K. Conditional Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. V. 56. № 5. P. 5183–5188.
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71, № 6. P. 067201.
10. Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L. Experimental observation of phase synchronization // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 54, № 2. P. 2115–2117.
11. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 54, № 5. P. R4508–R4511.
12. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators // *Phys. Lett. A*. 2006. V. 354, № 5–6. P. 423–427.
13. Pyragas K. Properties of generalized synchronization of chaos // *Nonlinear Analysis: Modelling and Control IMI*. 1998. № 3. P. 101–129.