

УДК: 531.46

ДИНАМИКА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В РАМКАХ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ

© 2013 г.

М.А. Муницына

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

munitsyna@gmail.com

Поступила в редакцию 20.11.2012

Рассматривается динамика выпуклого твердого тела на горизонтальной плоскости в рамках взаимосвязанной модели трения, учитывающей как трение качения, так и трение верчения.

Ключевые слова: тело вращения, взаимосвязанное трение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении выпуклого тела вращения на горизонтальной упругой плоскости. Будем считать, что центр масс тела находится на оси его динамической симметрии, совпадающей с осью симметрии поверхности тела.

Введем подвижную систему координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом в центре масс тела и осями, направленными по его главным центральным осям инерции. Пусть поверхность тела задается уравнением $f(\xi) = 0$. Обозначим вектор восходящей вертикали γ . Тогда

$$\gamma = -\text{grad}f(\mathbf{r}) / \|\text{grad}f(\mathbf{r})\|, \quad (1)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки касания эллипсоида с опорной плоскостью.

В подвижной системе координат теоремы об изменении количества движения и момента количества движения эллипсоида, условие постоянства вектора γ и уравнение движения нижней точки эллипсоида вдоль вертикали имеют вид:

$$m\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = -mg\gamma + N\gamma + \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$J\boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega}, J\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\gamma + \mathbf{F}] + \mathbf{M}, \quad (3)$$

$$\gamma + [\gamma, \boldsymbol{\omega}] = 0, \quad (4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{u}, \gamma). \quad (5)$$

Здесь m – масса эллипсоида, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ – соответственно векторы скорости центра масс и угловой скорости тела, g – ускорение свободного падения, N – величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $J = \text{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции эллипсоида, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – высота нижней точки эллипсоида над плоскостью, $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ – скорость

этой точки, \mathbf{F} и \mathbf{M} – сила и момент трения, действующие на эллипсоид со стороны опорной плоскости.

Будем считать опорную плоскость слабо деформируемой, и для значения нормальной составляющей её реакции примем модель Герца

$$N = \begin{cases} \lambda |\boldsymbol{\varepsilon}|^{3/2}, & \boldsymbol{\varepsilon} < 0, \\ 0, & \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (6)$$

где λ постоянная, определяемая свойствами материалов эллипсоида и плоскости. Система (2)–(5) с учетом соотношений (1), (6) будет замкнутой системой дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \gamma, \boldsymbol{\varepsilon}$, если определить зависимость силы и момента трения от указанные переменных.

Воспользуемся взаимосвязанной моделью трения, основанной на локальном законе Кулона и контактной теории Герца [1]. Согласно последней, пятно контакта любого выпуклого тела с плоскостью представляет собой плоский эллипс, геометрические параметры которого зависят от главных кривизн поверхности тела в точке контакта, упругих свойств материалов тела и плоскости и от действующих нагрузок. Результирующая сила и момент трения [2] имеют вид:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} -F_1 \mathbf{e}_1 - F_2 \mathbf{e}_2, & \boldsymbol{\varepsilon} < 0, \\ 0, & \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$M = \begin{cases} -M\gamma, & \boldsymbol{\varepsilon} < 0, \\ 0, & \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{e}_2 = [\gamma, \mathbf{u}] / |\mathbf{u}|$, $\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2, \gamma]$, а величины F_1, F_2 и M имеют вид эллиптических интегралов. Заметим, что неравенства (6), (7) учитывают возможность отрыва тела от плоскости.

Воспользуемся аппроксимациями компонент силы и момента трения вида:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_0 \frac{U^2 + a_1 U \alpha |\Omega|}{U^2 + a_1 U \alpha |\Omega| + a_2 \alpha^2 \Omega^2}, \\
F_2 &= -F_0 \frac{U \alpha \Omega}{U^2 + a_3 U \alpha |\Omega| + a_4 \alpha^2 \Omega^2}, \\
M &= M_0 \frac{b_1 U \alpha \Omega + \alpha^2 \Omega |\Omega|}{b_2 U^2 + b_1 U \alpha |\Omega| + \alpha^2 \Omega^2}.
\end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $U = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)$ – скорость проскальзывания точки контакта, $\Omega = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ – угловая скорость вращения тела. Коэффициенты аппроксимаций зависят от длины большей полуоси пятна контакта α , отношения длины меньшей полуоси к большей μ ($0 < \mu < 1$, при $\mu = 1$ пятно – круг) и угла ψ , который скорость проскальзывания составляет в большей полуосью пятна контакта. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_0 &= kN, \quad M_0 = \frac{3\pi}{16} \mu^{1/2} \alpha F_0, \\
a_0 &= \frac{8}{3\pi} \frac{\mu^{3/4}}{\delta_5}, \quad a_1 = \frac{3\pi \delta_3 \delta_5}{80 \mu^{3/4}}, \quad a_2 = \frac{\delta_3}{10}, \\
a_3 &= -\frac{\delta_4}{10}, \quad a_4 = -\frac{8}{3\mu^{3/4} \pi \delta_6}, \\
b_0 &= \frac{15\pi}{16} \frac{\mu^{1/2}}{\delta_3}, \quad b_1 = -\frac{16\delta_3 \delta_5}{15\mu^{7/4} \pi}, \quad b_2 = \frac{\delta_5}{\mu^{5/4}},
\end{aligned} \quad (9)$$

и приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\delta_3 &= (1 - \mu^2) \cos^2 \psi + \mu^2, \quad \delta_4 = \sin 2\psi (1 - \mu^2), \\
\delta_5 &= (1 - \mu^{1/4}) \cos 2\psi + \mu^{1/4}, \quad \delta_6 = (1 - \mu^{1/4}) \sin 2\psi.
\end{aligned}$$

Поскольку зависимость полуосей пятна контакта от значений главных кривизн эллипсоида в точке контакта определяется в теории Герца трансцендентным уравнением, введем гипотезу о совпадении параметров пятна контакта с параметрами сечения эллипсоида горизонтальной плоскостью, проходящей через точку $\mathbf{r} + \varepsilon \boldsymbol{\gamma}$ ($\varepsilon < 0$). Будем считать также, что размеры пятна контакта малы по сравнению с размерами тела. Тогда для тел, поверхность которых определяется уравнением

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \chi(\xi_3)^2, \quad (10)$$

полуоси пятна контакта a и b при $\gamma_3 \neq \pm 1$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}
a^2 &= -\frac{2\varepsilon\sigma}{|r| \chi''(r_3)}, \quad b^2 = \frac{2\varepsilon\sigma \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{|r|}, \\
\sigma &= r_3 \chi'(r_3) - \sqrt{r_1^2 + r_2^2};
\end{aligned} \quad (11)$$

а при $\gamma_3 = \pm 1$ – равенствами

$$a^2 = b^2 = \chi(r_3 \cdot (1 + \varepsilon)). \quad (12)$$

Здесь и далее компоненты векторов \mathbf{r} , $\boldsymbol{\gamma}$, \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ в главных центральных осях инер-

ции тела обозначены соответствующими буквами с индексами 1, 2 и 3. Таким образом, в равенствах (8), (9) следует положить $\alpha = \min\{a, b\}$, $\mu = \min\{a/b, b/a\}$.

Ориентация пятна контакта определяется равенствами

$$\begin{aligned}
\sin \psi &= \frac{u_1 \gamma_2 - u_2 \gamma_1}{|\mathbf{u}| \sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \\
\cos \psi &= \frac{-u_1 \gamma_1 \gamma_3 - u_2 \gamma_2 \gamma_3 + u_3 (1 - \gamma_3^2)}{|\mathbf{u}| \sqrt{1 - \gamma_3^2}}.
\end{aligned}$$

Учитывая все вышесказанное, система дифференциальных уравнений (2)–(5) может быть проинтегрирована численно относительно переменных v , ω , γ , ε .

2. Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились для однородного яйцеобразного твёрдого тела массы $m = 2$ кг, уравнение которого имеет вид (10), где

$$\chi^2 = 2(\xi_3 + 0.1)(\xi_3 - 1.2)(\xi_3 - 0.252).$$

Сечение этого тела плоскостью, проходящей через его ось симметрии, представлено на рис. 1. Положение центра масс тела совпадает с началом координат.

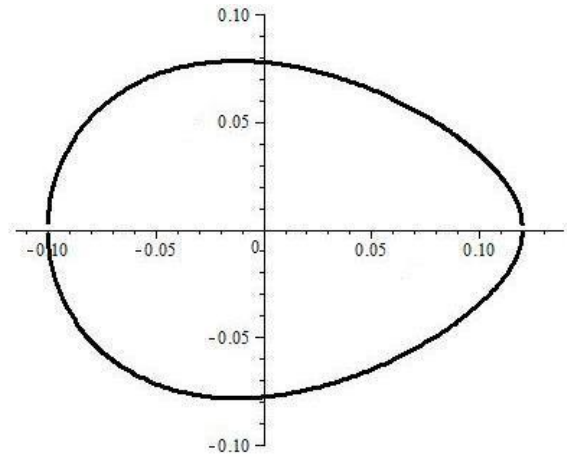


Рис. 1

Коэффициент сухого трения и параметр модели Герца были приняты следующими: $k = 0.1$, $\lambda = 10^7 \text{ \AA} / (c^2)^{1/2}$. На рис. 2 представлены зависимости косинуса γ_3 угла нутации тела от квадрата его угловой скорости при следующих начальных условиях:

- (a): $\gamma_{30} = 0.97$, $\omega_{30} = 100 \text{ c}^{-1}$, $\omega_{10} = 0 \text{ c}^{-1}$;
- (b): $\gamma_{30} = -0.97$, $\omega_{30} = 100 \text{ c}^{-1}$, $\omega_{10} = 0 \text{ c}^{-1}$;
- (c): $\gamma_{30} = -0.02$, $\omega_{30} = 0 \text{ c}^{-1}$, $\omega_{10} = 100 \text{ c}^{-1}$.

Во всех случаях $\varepsilon_0 = -0.3 \cdot 10^{-4}$ м, $\omega_{20} = 0$,

$\gamma_{20} = 0$, значение γ_{10} определялось геометрическим интегралом, начальная скорость центра масс $v = 0$.

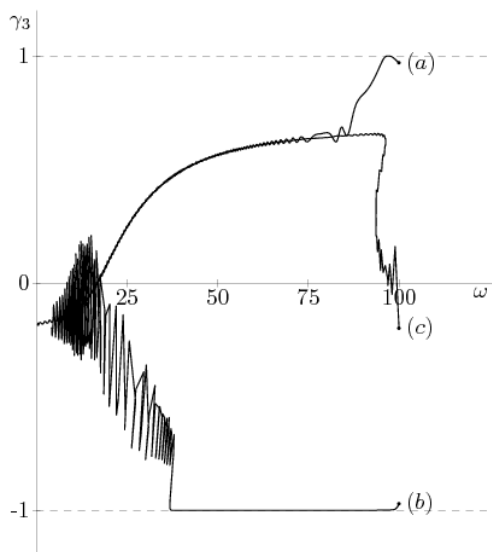


Рис. 2

Начальным условиям (а) и (б) соответствуют такие положения тела, при которых ось его симметрии почти вертикальна. При этом положение центра масс тела в случае (а) ниже, чем его положение в случае (б). Численные эксперименты показывают, что если в положении (а) закрутить тело вокруг оси его симметрии с достаточно большой угловой скоростью, то в процессе движения ось симметрии тела быстро занимает вертикальное положение и на небольшом интервале времени тело вращается вокруг

нее. Затем ось симметрии тела довольно быстро наклоняется до некоторого положения, а затем плавно опускается до положения, соответствующего равновесию тела. При этом угловая скорость тела и скорость его центра масс уменьшаются до тех пор, пока их значения не попадают в область застоя, после чего движение тела прекращается. На рис. 3 представлены зависимости от времени косинуса угла нутации тела, модулей силы и момента трения, большей полуоси пятна контакта, отношения меньшей полуоси пятна контакта к большей и отношение силы реакции опорной плоскости к весу тела при движении с начальными условиями (а). Поскольку сила реакции опорной плоскости не обращается в нуль отрыва тела от плоскости в ходе эксперимента не происходит.

Если же закрутить тело с той же угловой скоростью вокруг оси его симметрии в положении (б), то ось симметрии также быстро занимает вертикальное положение, но тело вращается вокруг неё довольно долго. После этого ось симметрии резко опускается до некоторого положения, а затем совершает колебания, опускаясь при этом к положению, соответствующему равновесию тела.

Начальным условиям (с) соответствует положение тела, близкое к положению равновесия. Тело с достаточно большой угловой скоростью закручивают вокруг вертикали. При этом ось симметрии тела поднимается, стараясь занять положение, соответствующее нижнему положению центра масс, но не достигает его, а занимает то же положение, на которое перехо-

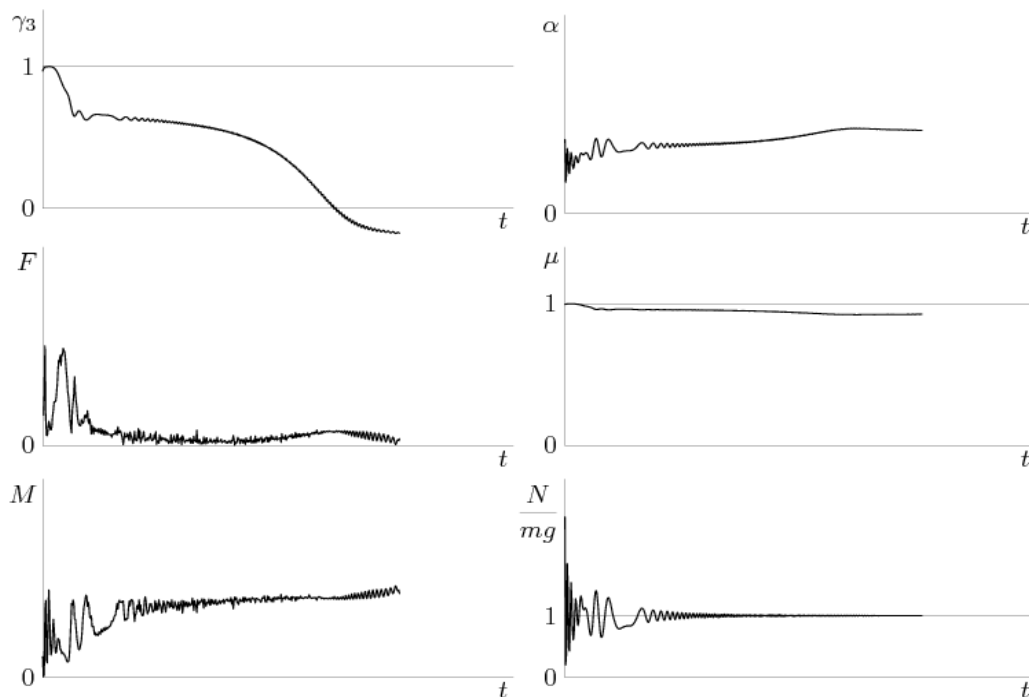


Рис.3

дит в эксперименте (а) с вертикального вращения. Затем движение происходит аналогично эксперименту (а). Заметим, что на том интервале движения, на котором ось симметрии тела поднимается, происходит серия отрывов тела от плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00354, 12-08-00591) и Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.В37.21.2013 «Математические модели и методы нелинейной динамики в задачах механики и экономики».

ской Федерации, соглашение 14.В37.21.2013 «Математические модели и методы нелинейной динамики в задачах механики и экономики».

Список литературы

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1980. 513с.
2. Муницына М.А. Модель трения в случае плоского эллиптического контакта тела с опорной плоскостью // НД. 2012. Т. 8, №4.

**DYNAMICS OF THE BODY OF ROTATION ON THE HORIZONTAL PLANE WITHIN
THE INTERCONNECTED MODEL OF FRICTION**

М.А. Munitsyna

The dynamics of a convex firm body on the horizontal plane within the interconnected model of friction considering both friction of swing and friction of spinning is considered.

Keywords: the rotation body, the interconnected friction.