УДК 517.9

УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

О.А. Хребтюгова

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

olgax29@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.12.2012

Рассматривается начально-краевая задача для линейной гибридной системы дифференциальных уравнений, служащей математической моделью руки манипуляционного робота. Решены две задачи оптимального управления поведением решений начально-краевой задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, обобщенное решение, упругий стержень, балка Тимошенко, изгибные колебания, собственные функции.

Рассматривается начально-краевая задача

$$J_*\ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x,t)dx + \varepsilon \int_0^1 \phi_{tt}(x,t)dx = M(t), \quad (1)$$

$$\varepsilon y_{tt} - \gamma(y_{xx} - \phi_x) = -\varepsilon(x+a)\ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^2 \phi_{tt} - \varepsilon\phi_{xx} + \gamma(y_x - \phi) = -\varepsilon^2\ddot{\theta} \quad (0 < x < 1), \quad (3)$$

$$y(0,t) = \phi(0,t) = 0, \quad y_x(1,t) - \phi(1,t) = \phi_x(1,t) = 0, \quad (4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \theta_1, y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x), \phi(x,0) = \phi_0(x), \quad \phi_t(x,0) = \phi_1(x), \quad (5)$$

которая описывает вращение твердого тела с упругим стержнем, моделируемым балкой Тимошенко [1]. Начально-краевая задача приведена в безразмерных переменных: $x = x'/\ell$, $y = y'/\ell$, $d = d'/\ell$, $t = t'/t_0$, $M(t) = M'(t')/(EJ)$, $t_0 = \ell^2((S\rho/(EJ))^{1/2}$, $a = æ/[2(1+\upsilon)]$, $J_0 = J_0'/(\rho S\ell^3)$, $\varepsilon = J/(Sl^2)$, $\gamma = æ/(2(1+\upsilon))$. Здесь $\theta(t)$ – угол поворота системы; $y'(x',t')$ и $\phi'(x',t')$ – соответственно величина поперечной деформации стержня и угол поворота сечения стержня в точке x в момент времени t; ℓ – длина стержня; ρ – плотность материала стержня и твердого тела; E – модуль Юнга материала стержня и твердого тела; υ – коэффициент Пуассона материала стержня; æ – коэффициент сдвиговых деформаций сечения стержня; J_0' – момент инерции твердого тела относительно оси вращения; J' – момент инерции сечения стержня относительно оси вращения сечения; S – площадь сечения стержня. Кроме того,

$$J_* = J_0 + \int_0^1 (x+a)^2 dx + \varepsilon.$$

В настоящей работе показано, что предложенная в работе [2] методика построения оптимальных управлений поворотом твердого тела с упругим стержнем, моделируемым балкой Эйлера–Бернулли, может быть применена к построению оптимальных управлений решениями начально-краевой задачи (1)–(5). При этом существенно используются результаты работы [3].

Рассмотрим следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить управление $M(t) \in L_2(0,T)$, переводящее решение начально-краевой задачи (1)–(4) из начального состояния (5) в конечное

$$\theta(T) = \theta_{0T}, \dot{\theta}(T) = \theta_{1T}, y(x,T) = y_{0T}(x), \quad y_t(x,T) = y_{1T}(x), \quad \phi(x,T) = \phi_{0T}(x), \phi_t(x,T) = \phi_{1T}(x) \quad (6)$$

в заданный момент времени T и минимизирующее функционал

$$\Phi(M) = \frac{1}{2}\|M(t)\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Задача 2. Определить управление $M(t) \in L_2(0,T)$, $\Phi(M) \le L < \infty$, переводящее

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт №14.B37.21.0225.

решение начально-краевой задачи (1)–(4) из (5) в (6) за минимальное время T (задача оптимального быстродействия).

Изложим (без доказательства) некоторые результаты работы [3], необходимые для решения задач 1 и 2.

Выразим из уравнения (1) $\ddot{\theta}$ и подставим это выражение в (2), (3). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\varepsilon y_{tt} - J_*^{-1}\varepsilon(x+a)\int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1,t)dx_1 - \\ -J_*^{-1}\varepsilon^2(x+a)\int_0^1 \phi_{tt}(x_1,t)dx_1 - \\ -\gamma(y_{xx}-\phi_x) = -\varepsilon J_*^{-1}(x+a)M(t),\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\phi_{tt} - J_*^{-1}\varepsilon^2\int_0^1 (x_1+a)y_{tt}(x_1,t)dx_1 - \\ -J_*^{-1}\varepsilon^3\int_0^1 \phi_{tt}(x_1,t)dx_1 - \\ -\varepsilon\phi_{tt} - \gamma(y_x-\phi_x) = -\varepsilon^2 J_*^{-1}(x+a)M(t),\end{gathered} \tag{8}$$

с краевыми и начальными условиями (4), (5) для определения $y(x,t)$ и $\phi(x,t)$.

Введем гильбертово пространство H вектор-функций $u(x)=\mathrm{col}\big(y(x),\phi(x)\big)$, $y(x)$, $\phi(x)\in L_2(0,1)$ со скалярным произведением и нормой

$$\begin{gathered}(u,v)_H = (y(x),z(x))_{L_2} + (\phi(x),\psi(x))_{L_2}, \\ \|u\|_H = (u,u)_H^{1/2},\end{gathered} \tag{9}$$

где $v(x)=\mathrm{col}\big(z(x),\psi(x)\big)$, $\big(*,*\big)$ – скалярное произведение в $L_2(0,1)$.

Рассмотрим в H интегральный оператор

$$Au \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon y(x) - J_*^{-1}\varepsilon(x+a)\times \\ \times\int_0^1 (x_1+a)y(x_1)dx_1 - \\ -J_*^{-1}\varepsilon^2(x+a)\int_0^1 \phi(x_1)dx_1 \\ \varepsilon^2\phi(x) - J_*^{-1}\varepsilon^2\times \\ \times\int_0^1 (x_1+a)y(x_1)dx_1 - \\ -J_*^{-1}\varepsilon^3\int_0^1 \phi(x_1)dx_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

где $u(x)=\mathrm{col}\big(y(x),\phi(x)\big)$.

Утверждение 1. Оператор A, действующий в $H\to H$, является симметричным, ограниченным и положительно определенным.

В H введем еще одно скалярное произведение $<u,v>=(Au,v)_H$ и норму $\|u\|_H^2 =<u,u>$.

Рассмотрим в H дифференциальный оператор

$$Bu = \begin{pmatrix} -\gamma(y''(x)-\phi'(x)) \\ -\varepsilon\phi''(x) - \gamma(y'(x)-\phi(x)) \end{pmatrix} \tag{11}$$

с областью определения

$$D(B) = \left\{ \begin{gathered}(y(x),\phi(x)) \in C^2(0,1), \\ y(0)=\phi(0)=0,\ y'(1)-\phi(1)=0,\ \phi'(1)=0\end{gathered}\right\}.$$

Утверждение 2. Оператор B является симметричным и положительным.

Обозначим через $B^{1/2}$ положительный корень из оператора B. Введем скалярные произведения $(u,v)_{B^{1/2}} = (B^{1/2}u,v)_H$, $(u,v)_B = (Bu,v)_H$, определенные на $D_{B^{1/2}}$ и D_B соответственно, и нормы

$$\|u\|_{B^{1/2}} = (u,u)_{B^{1/2}}^{1/2},\ \|u\|_B = (u,u)_B^{1/2}. \tag{12}$$

Пополнив соответственно в нормах (12) $H_{B^{1/2}}$ и H_B. $u(x,t)=\mathrm{col}(y(x,t),\phi(x,t))$.

Утверждение 3. $H_B \subset H_{B^{1/2}} \subset H$.

В дальнейшем расширения операторов $B^{1/2}$ и H_B на $H_{B^{1/2}}$ и H_B соответственно вновь обозначим через $B^{1/2}$ и H_B.

Запишем начально-краевую задачу (7)-(8), (4)-(5) в операторной форме

$$Au_{tt} + Bu = -J_0^{-1}Ag(x)M(t), \tag{13}$$

$$\begin{gathered}u(x,0)=u_0(x), u_0(x)=\mathrm{col}(y_0(x),\phi_0(x)), \\ u_t(x,0)=u_1(x), u_1(x)=\mathrm{col}(y_1(x),\phi_1(x)),\end{gathered} \tag{14}$$

где $g(x)=\mathrm{col}((x+a),1)$.

Обозначим через $H_1(Q_T)$ пространство вектор-функций, полученное замыканием в норме

$$\|u(x,t)\|_{H_1}^2 = \int_0^T \big((u_t(x,t),u_t(x,t)) + \\ +(u(x,t),u(x,t))_B\big)dt$$

множества вектор-функций

$$u(x,t)=\mathrm{col}(y(x,t),\phi(x,t)) \in C^{1,1}(Q_T),$$
$$y(0,t)=\phi(0,t)=0,\ \ y_x(1,t)-\phi(1,t)=0,\ \phi_x(1,t)=0.$$

Введем в рассмотрение функцию вида

$$\begin{gathered}u(x,t)=\mathrm{col}(y(x,t),\phi(x,t)) \in H_1(Q_T), \\ \upsilon(x,t)\equiv 0.\end{gathered} \tag{15}$$

Пусть

$$u_0(x)\in H, u_1(x)\in H_{B_{1/2}}. \tag{16}$$

Под обобщенным решением начальной краевой задачи (7)-(8), (4)-(5), определенным в Q_{T_1}, с начальными условиями (16) будем понимать функцию $u(x,t)\in H_1(Q_T)$ $(u(x,0)=u_0(x))$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$\int_0^T\Big(\big(u_t(x,t),\upsilon_t(x,t)\big)-\big(u(x,t),\upsilon(x,t)\big)_B-$$
$$-J_*^{-1}\big(g(x)M(t),\upsilon(x,t)\big)\Big)dt+ \tag{17}$$
$$+\big(u_1(x),\upsilon(x,0)\big)=0,$$

для любой функции $\upsilon(x,t)$ вида (15).

Утверждение 4. Обобщенное решение начальной краевой задачи (7)-(8), (4)-(5) единственно.

Рассмотрим в H_B спектральную задачу

$$-\lambda Au+Bu=0. \tag{18}$$

В силу инвариантности данное выражение имеет большее предпочтение.

Утверждение 5. Существует счетная последовательность вещественных однократных точек спектра $0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n<...$ $(\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty)$ спектральной задачи (18), которым отвечают собственные функции $u_n(x)\in H_B$, нормированные следующим образом: $\langle u_n(x),u_m(x)\rangle=\delta_{nm}$.

Из (18) имеем $\omega^2\langle u_n,u_m\rangle=(u_n,u_m)_B$ $(\omega_n^2=\lambda_n)$.

Таким образом, функции $u_n(x)$ образуют ортонормированный базис в H и ортогональный в H_B. Используя метод Фурье, обобщенное решение начальной краевой задачи (6)-(7), (4)-(5) можно получить в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\omega_n^{-1}\big(a_{0n}\cos(\omega_n t)+$$
$$+b_{0n}\sin(\omega_n t)-\frac{1}{J_0}d_n\int_0^t\sin\big(\omega_n(t-\tau)\big)\times \tag{19}$$
$$\times M(\tau)d\tau\big),$$

где $\omega_n^2=\lambda_n$, $a_{0n}=\omega_n^{-2}(u_0(x),u_n(x))_B$, $b_{0n}=$ $=\langle u_0(x),u_n(x)\rangle$, $d_n=\langle g(x),u_n(x)\rangle$.

Утверждение 6. Обобщенное решение начальной краевой задачи (7)-(8), (4)-(5) существует, задается формулой (19). При этом

$$\|u(x,t)\|^2_{H_1(Q_N)}\le C(\|u_0(x)\|_B^2+\|u_1(x)\|^2_{B^{1/2}}+$$
$$\|g(x)\|_H^2\,\|M(t)\|^2_{L(0,T)}), \tag{20}$$

где $C>0$ – некоторая постоянная. Неравенство (20) доказывает корректность поставленной задачи.

Построим теперь обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (5). Пусть функция

$$p(t)\in W_2^1(0,T),\;\; p(T)=0. \tag{21}$$

Умножим уравнение (1) на $p(t)$ и проинтегрируем по $t\in[0,T]$:

$$J_*\int_0^T\ddot\theta(t)p(t)dt=$$
$$\int_0^T\left(\int_0^1(x+a)y_{tt}(x,t)dx+\right.$$
$$\left.+\varepsilon\int_0^1\phi_{tt}(x,t)dx\right)p(t)dt= \tag{22}$$
$$=\int_0^T M(t)p(t)dt$$

Вычисляя интегралы, входящие в (22), используя формулу интегрирования по частям, будем иметь

$$\int_0^T\Big(J_*\dot\theta(t)+(x+a,y_1(x,t))_{L_2}+$$
$$+\varepsilon(1,\phi(x,t))_{L_2}\,\dot p(t)\Big)dt+$$
$$\Big(J_*\theta_1+(x+a,y_1(x))_{L_2}+ \tag{23}$$
$$+\varepsilon(1,\phi_1(x))_{L_2}\Big)p(0)+$$
$$+\int_0^T M(t)p(t)dt=0.$$

Под обобщенным решением уравнения (1) будем понимать функцию $\theta(t)\in W_2^1(0,T)$, $\theta(0)=\theta_0$, удовлетворяющую интегральному равенству (23) для любой функции $p(t)$ вида (21).

Легко видеть, что искомым решением уравнения (1) будет функция

$$\theta(t)=\theta_0+\theta_1 t+J_*^{-1}[(x+a,y_0(x))_{L_2}+$$
$$\varepsilon(1,\phi_0(x))_{L_2}+$$
$$+\Big((x+a,y_1(x))_{L_2}+\varepsilon(1,\phi_1(x))_{L_2}\Big)t-$$
$$-(x+a,y(x,t))_{L_2}-\varepsilon(1,\phi(x,t))_{L_2}+$$
$$-\int_0^T(t-t_1)M(t_1)dt_1]= \tag{24}$$
$$=\theta_0+\theta_1 t+\varepsilon^{-1}J_0^{-1}((g(x),u_0(x))_A+$$
$$+(g(x),u_1(x))_A t-(g(x),u(x,t))_A)+$$
$$+J_0^{-1}\int_0^T(t-t_1)M(t_1)dt_1.$$

Пусть

$$u_{0T}(x)=\mathrm{col}(y_{0T}(x),\phi_{0T}(x))\in H_B,$$
$$u_{1T}(x)=\mathrm{col}(y_{1T}(x),\phi_{1T}(x))\in H_{B^{1/2}}$$
$$a_{Tn}=(u_{0T}(x),u_n(x))_B,$$
$$b_{Tn}(x)=\langle u_{1T}(x),u_n(x)\rangle\;(n=1,2,...).$$

Тогда с учетом (19) и (24) задачу 1 можно переформулировать как гладкую экстремальную задачу с ограничениями типа равенств следующим образом: найти минимум функционала $\Phi(M)$ при следующих ограничениях

$$\theta_{1T} = \theta_1 + \varepsilon^{-1} J_0^{-1}((g(x), u_0(x))_A + +(g(x), u_1(x))_A + J_*^{-1}\int_0^T M(\tau)d\tau, \quad (25)$$

$$\theta_{0T} = \theta_0 + \theta_1 T + \varepsilon^{-1} J_0^{-1}((g(x), u_0(x))_A + +(g(x), u_1(x))_A T - (g(x), u(x,t))_A) + +J_*^{-1}\int_0^T (T-\tau)M(\tau)d\tau, \quad (26)$$

$$\omega_n a_{Tn} = \omega_n^{-1} a_{0n}\cos(\omega_n t) + b_{0n}\sin(\omega_n t) - -J_0^{-1} d_n \int_0^T \sin\left(\omega_n (T-\tau)\right) M(\tau)d\tau, \quad (27)$$

$$b_{Tn} = -\omega_n^{-1} a_{0n}\sin(\omega_n t) + b_{0n}\cos(\omega_n t) - -J_0^{-1} d_n \int_0^T \cos\left(\omega_n (T-\tau)\right) M(\tau)d\tau, \quad (28)$$

$n = 1, 2....$

Утверждение 7. Величины $d_n \neq 0, n = 1, 2....$

Обозначая $k_n(t) = \omega_n^{-1}\sin(\omega_n t)$, перепишем равенства (25)–(28) в следующем виде:

$$\int_0^T M(t)dt = (1, M(t))_{L_2(0,T)} = A_0(T) = = J_*(\dot\theta_T - \dot\theta_0) + \frac{J_*}{J_0}\sum_{n=1}^{\infty} d_n (b_{Tn} - b_{0n}), \quad (29)$$

$$\int_0^T (T-t)M(t)dt = (T-t, M(t))_{L_2(0,T)} = = A_1(T) = J_*(\dot\theta_T - \theta_0 - \dot\theta_0 T) + +\frac{J_*}{J_0}\sum_{n=1}^{\infty} d_n (a_{Tn} - a_{0n}\omega_n^{-1} - b_{0n}T), \quad (30)$$

$$(d_n k_n(T-t), M(t))_{L_2(0,T)} = A_{2n+1}(T) = = J_0 d_n^{-1}(a_{0n}\omega_n^{-1} k_n(T) + b_{0n} k_n(T) - a_{Tn}\omega_n), \quad (31)$$

$$(d_n \dot k_n(T-t), M(t))_{L_2(0,T)} = A_{2n}(T) = = J_0 d_n^{-1}(-a_{0n}\omega_n^{-1} k_n(T) + b_{0n} k_n(T) - b_{Tn}), \quad (32)$$

$n = 1, 2....$

Утверждение 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(T) < \infty. \quad (33)$$

Следуя [2], для построения оптимального управления $M^*(t)$ введем в рассмотрение систему функций

$$\phi_0(t) \equiv 1, \ \phi_1(t) = T - t, \quad \phi_{2j}(t) = d_j \dot k_j (T-t), \quad \phi_{2j+1}(t) = d_j k_j (T-t) \ \ (j = 1, 2, ...). \quad (34)$$

Обозначим через $H_2(0,T)$ подпространство $L_2(0,T)$, являющееся замкнутой линейной оболочкой системы функций (34).

Построим в (34) ортонормированную в $L_2(0,T)$ систему функций $\psi_n(t)$ и последовательность величин $\beta_n(T)$, удовлетворяющих условию

$$(M(t), \psi_n(t))_{L_2(0,T)} = \beta_n(T)(n = 0, 1, ...), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty. \quad (35)$$

Функции $\psi_n(t)$ образуют ортонормированный базис в $H_2(0,T)$. Отсюда и из определения $\psi_n(t)$ и $\beta_n(T)$ следует, что равенства (29)–(32) эквивалентны равенствам (35).

Утверждение 9. Решение задачи 1 дается формулой

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T)\psi_n(t). \quad (36)$$

Рассмотрим решение задачи 2. Заметим, что

$$\theta(T) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n^2(T) < \infty, \quad \lim_{T\to 0}\theta(T) = \infty, \quad \lim_{T\to\infty}\theta(T) = 0. \quad (37)$$

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $\theta(T) = L$. Существование такого корня следует из (37).

Утверждение 10. Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (37) при $T = T^*$.

Доказательство утверждений 8–10 проводится аналогично работе [2].

Список литературы

1. Krabs W., Sklyar G.M. On the controllability of a slowly rotating timoshenko beam // Journal of Analysis and its Applications. 1999. V. 18, № 1. P. 437–448.

2. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // ПММ, 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 240–249.

3. Кубышкин Е.П., Хребтюгова О.А. Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-контьнуальных систем // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. Вып. 1. С. 84–96.

CONTROL OF THE SOLUTION OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS ARISING FOR MODELING THE DYNAMICS HANDLING ROBOT

O.A. Hrebtyugova

An initial boundary value problem for linear differential equations of the hybrid system, which serves a mathematical model robot manipulator arm. Solved two problems of optimal control the behavior of solutions of initial-boundary value problem.

Keywords: optimal control, generalized solution, elastic rod, bar Tymoshenko, bending vibration, its own function.