УДК 519.7

УПРАВЛЕНИЕ СИНХРОНИЗАЦИЕЙ СЕТЕЙ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

А.А. Селиванов

Санкт-Петербургский госуниверситет

antonselivanov@gmail.com

Поступила в редакцию 14.11.2012

Рассматривается задача асимптотической синхронизации сети нелинейных объектов с помощью консенсусной обратной связи по запаздывающим выходам. С помощью метода пассификации, теоремы Агаева–Чеботарёва и метода функций Ляпунова–Разумихина выведены достаточные условия синхронизации сети гипер-минимально-фазовых агентов с нелинейностями, удовлетворяющими условию Липшица. Структура сети предполагается фиксированной и такой, что орграф связей имеет входящее остовное дерево.

Ключевые слова: сетевые системы, синхронизация, запаздывание, пассифицируемость.

Введение

В последние годы наблюдается повышенный интерес к задачам управления сетевыми системами. Опубликовано множество обзорных статей [1, 2], монографий [3–7], издаются специальные выпуски журналов и проводятся конференции, посвящённые сетевому управлению. Такая популярность сетевых систем обусловлена прежде всего широтой области применения: сети роботов, формации летающих и подводных объектов, управление промышленными, электрическими и производственными сетями и т. д.

Одной из задач сетевого управления является синхронизация: обеспечение согласованного во времени поведения подсистем. Простейшим и наиболее распространённым законом управления в задачах синхронизации является так называемое «консенсусное управление», при котором управляющий сигнал для каждого узла строится как взвешенная сумма разностей состояний или выходов соседних узлов [2, 8–10]. При этом в случае сближения состояний узлов со временем говорят о достижении в сети *консенсуса*. В случае сетей агентов с динамикой произвольного порядка в большинстве известных работ строятся обратные связи по состоянию объекта. В [10] были выведены достаточные условия синхронизации линейных систем с помощью обратных связей по выходу, но без учёта запаздываний, возникающих из-за конечной скорости передачи информации между агентами сети. В [7] рассматривается задача синхронизации полупассивных систем при наличии запаздываний.

В настоящей работе результаты [10] обобщаются на случай нелинейных сетей с запаздываниями в связях. Регулятору подсистемы доступны выходы соседних узлов, приходящие с запаздыванием. В отличие от [7] подсистемы предполагаются гипер-минимально-фазовыми, что позволяет рассматривать гораздо более широкий круг задач. На основе теоремы о пассификации, теоремы Агаева–Чеботарёва и метода Ляпунова–Разумихина получены условия асимптотической синхронизации.

В работе используются стандартные обозначения. Евклидово пространство размерности n обозначено через $\mathbb{R}^n$ $\left(\mathbb{R} \geq 0 -\right.$ множество неотрицательных вещественных чисел); $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, через $\mathbb{C}^+$ обозначена открытая правая полуплоскость; I – единичная матрица подходящей размерности; A^T – транспонированная матрица A. Положительная определённость симметричной матрицы H ($H>0$) означает положительную определённость соответствующей квадратичной формы; $\lambda_{\max}(H)$ и $\lambda_{\min}(H)$, соответственно, наибольшее и наименьшее собственные числа симметричной матрицы H. Все нормы евклидовы.

1. Предварительные сведения

1.1 Сведения из теории графов

Приведем необходимые сведения из теории графов, в частности определение лапласовской матрицы и некоторые ее свойства (см. [5, 11–14]).

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (контракт №14.B37.21.0247)

Ориентированным графом $\mathcal{G}$ называется пара $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$, где $\mathcal{V}$ – множество вершин, а $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ – множество дуг. Пусть N – число вершин (мощность множества $\mathcal{V}$). Здесь и далее рассматриваются графы без петель, т. е. для любой вершины $\alpha\in\mathcal{V}$ выполнено $(\alpha,\alpha)\notin\mathcal{E}$. *Путём* длины j из вершины α_1 в вершину α_j называется упорядоченное множество $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j\}$, где $(\alpha_{i-1},\alpha_i)\in\mathcal{E}$ для каждого $i=2,\ldots,j$ и все вершины α_j различны. Вершина α достижима из вершины β, если $\alpha=\beta$ или в орграфе существует путь из вершины β в вершину α. Если для каждой вершины графа существует путь в любую другую вершину, то ориентированный граф называется *сильно связным*. В этом случаях компонента связности у графа будет одна. Орграф называется *входящим деревом*, если в каждую его вершину, кроме одной, называемой корнем, входит ровно одна дуга. *Входящим остовным деревом* орграфа $\mathcal{G}$ называется входящее дерево, составленное из дуг этого орграфа, такое, что в нем существует путь из корня в любую другую вершину $\mathcal{G}$ Аналогично вводится более общее понятие: *остовный входящий лес*. Остовный входящий лес $\mathcal{F}$ орграфа $\mathcal{G}$ называется максимальным входящим лесом, если в $\mathcal{G}$ нет остовного входящего леса с числом дуг, большим, чем в $\mathcal{F}$. Очевидно, что каждый максимальный входящий лес содержит минимально возможное число корней; это число называется лесной размерностью орграфа (по входящим деревьям) и обозначается через ν. Число дуг в любом максимальном входящем лесе равно, очевидно, $N-\nu$. Отметим, что лесная размерность по исходящим деревьям может, вообще говоря, отличаться от ν.

Орграф называется *взвешенным*, если каждой паре вершин $\alpha,\beta\in\mathcal{V}$ сопоставлено число $w(\alpha,\beta)\ge 0$ такое, что $w(\alpha,\beta)>0$, если $(\alpha,\beta)\in\mathcal{E}$, и $w(\alpha,\beta)=0$, если $(\alpha,\beta)\notin\mathcal{E}$. Матрица смежности $A(\mathcal{G})=[a_{ij}]$ представляет собой $(N\times N)$-матрицу, i,j-й элемент которой равен $w(\alpha_i,\alpha_j)$. Для вершины α_i введем *полустепень исхода*

$$d_{out}(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}\ .$$

Введем $(N\times N)$-матрицу

$$D(\mathcal{G})=\mathrm{diag}\{d_{out}(\alpha_1),d_{out}(\alpha_2),\ldots,d_{out}(\alpha_N)\}.$$

Лапласовской матрицей орграфа $\mathcal{G}$ называется матрица

$$L(\mathcal{G})=D(\mathcal{G})-A(\mathcal{G}).$$

Обозначим через 1_N вектор-столбец размерности N, состоящий из единиц. Как известно [5, 11–16], введенная матрица L обладает следующими свойствами:

1) матрица $L(\mathcal{G})$ имеет нулевое собственное число, которому соответствует правый собственный вектор $1_N : L(\mathcal{G})1_N=0$;

2) нулевое собственное число лапласовской матрицы L имеет единичную кратность, если соответствующий орграф сильно связен;

3) все собственные числа лапласовской матрицы принадлежат множеству $C^{+}\cup\{0\}$.

Важный результат был получен Р.П. Агаевым и П.Ю. Чеботаревым в 2000 г. [14], см. также [8].

Теорема 1 (Агаева–Чеботарева [14]**)** *Ранг лапласовской матрицы графа $\mathcal{G}$ равен $N-\nu$, где ν – лесная размерность графа по входящим деревьям. В частности, $rankL=N-1$, т. е. нулевое собственное число матрицы L имеет единичную кратность тогда и только тогда, когда орграф $\mathcal{G}$ имеет входящее остовное дерево.*

1.2. Метод пассификации

Приведём необходимые сведения о пассификации линейных систем [17, 18].

Рассмотрим линейную систему с одним входом и несколькими выходами (single-input-multiple-outputs – SIMO):

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad z=Cx, \qquad (1)$$

где $x=x(t)\in\mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u=u(t)\in\mathbb{R}$ – управляющее воздействие (вход); $z=z(t)\in\mathbb{R}^l$ – измеряемый вектор выходов; A, B, C – постоянные вещественные матрицы размеров $n\times n$, $n\times 1$, $l\times n$ соответственно.

Задача пассификации для системы (1) понимается как нахождение $(1\times l)$-матрицы K такой, что система, замкнутая обратной связью $u=-Kz+v$, строго пассивна по отношению к вспомогательному выходу $\sigma=G^Tz$ (G – вектор размерности l): для некоторого $\rho>0$ и любых $T>0$ неравенство $\int_0^T(\sigma v-\rho|x|^2)dt\ge 0$ выполнено вдоль траекторий системы (1) с начальным условием $x(0)=0$. Как следует из леммы Якубовича–Калмана–Попова и из свойств пассивных систем [19–22], пассифицируемость системы эквивалентна существованию матрицы *K*, обеспечивающей *строгую положительную вещественность* (SPR) замкнутой системы: ее передаточная функция

$$W(s) = G^T C(sI_n - A + BKC)^{-1} B$$

от входа v к выходу $\sigma = G^T z$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} \mathrm{Re} W(i\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \\ \lim_{\omega \to +\infty} \omega^2 \, \mathrm{Re} W(i\omega) > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Важность свойств пассивности и пассифицируемости в теории управления определяется их тесной связью с устойчивостью и стабилизируемостью (см. [19–21, 23]).

Определение 1. *Система* (1) *называется минимально фазовой по выходу* $\sigma = G^T z$, *если многочлен*

$$\varphi_0(s) = \det \begin{bmatrix} sI_n - A & -B \\ G^T C & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

гурвицев (все его корни имеют отрицательные вещественные части), и гипер-минимально-фазовой (ГМФ), если она минимально-фазовая и $G^T CB > 0$.

Если передаточная функция системы (1) от входа u к выходу $\sigma = G^T z$ имеет вид $\bar{W}(s) = b(s)/a(s)$, где $b(s), a(s)$ – многочлены степеней *k*, *n* соответственно, $k \le n$, то система гипер-минимально-фазовая, если и только если $b(s)$ – гурвицев многочлен, $k = n - 1$ и $b(0) > 0$.

Теорема 2. (Теорема пассификации [17, 18])

Следующие утверждения эквивалентны:

A1. Существуют положительно-определенная $(n \times n)$*-матрица H и* $(1 \times l)$*-матрица K такие, что выполняются соотношения:*

$$H(A + BKC) + (A + BKC)^T H < 0, \quad HB = C^T G; \tag{4}$$

B1. Система (1) гипер-минимально-фазовая по отношению к выходу $\sigma = G^T z$;

C1. Существует обратная связь

$$u = Kz + v, \tag{5}$$

делающая замкнутую систему (1), (5) строго пассивной по отношению к выходу $\sigma = G^T z$.

При выполнении условия B1 матрица *K* в *(4)* может быть найдена в виде $K = -\varkappa G^T$, где $\varkappa$ – достаточно большое положительное число.

При этом нижняя граница $\varkappa_0$ для $\varkappa$ имеет вид [18; 23]:

$$\varkappa > \varkappa_0 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^1} \mathrm{Re}(G^T W(i\omega))^{-1}. \tag{6}$$

Очевидно следующее следствие.

Следствие 1. *Если система* (1) *гипер-минимально-фазовая по отношению к выходу* $\sigma = G^T z$, *то существуют положительно-определенная* $(n \times n)$*-матрица H и числа* $\varkappa > 0$, $\varepsilon > 0$ *такие, что выполняются соотношения:*

$$HA + A^T H - 2\varkappa C^T G G^T C < -\varepsilon I, \quad HB = C^T G. \tag{7}$$

Обобщение теоремы 2 на случай нескольких входов (MIMO) можно найти в [18]. Для нескольких входов в определение гипер-минимально-фазовости включается дополнительное требование симметрии $(G^T CB)^T = G^T CB$. Центральной частью теоремы является эквивалентность A1 и B1, которая для MIMO систем была установлена в [17].

1.3 Теорема Ляпунова–Разумихина

При доказательстве устойчивости систем с запаздываниями, как правило, используется либо метод функционалов Ляпунова–Красовского, либо метод функций Ляпунова–Разумихина. Здесь будет использована теорема Ляпунова–Разумихина.

Теорема 3 (Ляпунова–Разумихина [24]) *Пусть* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ *отображает* $\mathbb{R} \times (\text{ограниченные множества в } \mathcal{C})$ *в ограниченные множества* $\mathbb{R}^n$ *и* $p, u, v, w : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *непрерывные неубывающие, положительные для* $s > 0$ *функции,* $p(s) > s$ *для* $s > 0$ *и* $u(0) = v(0) = 0$. *Нулевое решение уравнения* $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ *равномерно асимптотически устойчиво, если существует непрерывная функция* $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0$, *которая положительно определена*

$$u(\|x\|) \le V(t, x) \le v(\|x\|), \tag{8}$$

такая, что

$$\begin{gathered} \dot{V}(t, x(t)) \le -w(x(t)), \text{ если} \\ V(t + \theta, x(t + \theta)) < p(V(t, x(t))), \\ \forall \theta \in [-h, 0]. \end{gathered} \tag{9}$$

Если к тому же $lim_{s \to \infty} u(s) = \infty$, *то оно глобально равномерно асимптотически устойчиво.*

2. Постановка задачи

Рассмотрим сеть, состоящую из *N* подсистем, каждая из которых описывается уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t) + \varphi(t, x_i(t)), \\ y_i(t) &= Cx_i(t), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\forall i = 1,\ldots,N$ $x_i \in \mathbb{R}^n$ – состояние i-й подсистемы, $u_i \in \mathbb{R}$ – управление, $y_i \in \mathbb{R}^l$ – вектор измерений, постоянные матрицы *A*, *B*, *C* имеют соответствующие размерности, время $t \in [0, +\infty)$.

Предположение 1. *Функция* $\varphi(t, x)$ *для всех* $t \in [0, +\infty)$ *удовлетворяет глобальному условию Липшица по второму аргументу с постоянной* L_φ, *т. е.* $\forall t \in [0, +\infty)$ $\forall x', x'' \in \mathbb{R}^n$

$$\|\varphi(t, x') - \varphi(t, x'')\| \le L_\varphi \|x' - x''\|.$$

Рассмотрим орграф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V}$ – множество вершин, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ – множество дуг. Для каждого $i = 1,\ldots,N$ вершина $v_i \in \mathcal{V}$ ассоциирована с *i*-й подсистемой. Будем считать, что дуга (v_i, v_j) принадлежит множеству дуг $\mathcal{E}$, если информация поступает от *i*-й подсистемы к *j*-й. Предполагается, что в орграфе нет петель, т. е. $(v_i, v_j) \notin \mathcal{E}$ для всех $i = 1,\ldots,N$. Орграф $\mathcal{G}$ будем называть *орграфом связей*. Множество соседей *i*-го узла обозначим через $\mathcal{N}_i = \{k = 1,\ldots,N \mid (v_i, v_k) \in \mathcal{E}\}$. Будем предполагать, что информация от *j*-го узла доходит до *i*-го узла за время $\tau > 0$. Тогда можно построить регулятор вида:

$$u_i(t) = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (y_i(t-\tau) - y_j(t-\tau)), \tag{11}$$

где $K \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ – вектор-строка коэффициентов усиления.

Далее будет рассмотрена задача асимптотической синхронизации агентов по состояниям. Задача состоит в том, чтобы найти такой вектор-строку *K*, что для любого решения замкнутой системы (10), (11) выполнено:

$$\lim_{t \to \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = 0, \quad i, j = 1,\ldots,N. \tag{12}$$

3 Основной результат

Обозначим $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, $s \in \mathbb{C}$. Поставленная задача будет решена при выполнении следующих предположений.

Предположение 2. *У орграфа связе* $\mathcal{G}$ *существует входящее остовное дерево.*

Предположение 3. *Существует вектор* $g \in \mathbb{R}^l$ *такой, что функция* $g^T W(s)$ *– гиперминимально-фазовая.*

Первое предположение налагает условие на структуру сети. Второе предположение накладывает условие на линейную часть локальной динамики подсистем. Из следствия 1 можно сделать вывод, что существуют матрица $H = H^T > 0$ и числа $\varkappa > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что выполняются соотношения (7) с $G = g$. Значение величины ε играет ключевую роль при оценке нелинейности $\varphi(t, x)$.

Теорема 4. *Пусть существуют* $L_\varphi > 0$ *и* $g \in \mathbb{R}^l$ *такие, что выполнены предположения 1, 2 и 4, причём* $2L_\varphi < \varepsilon \lambda_{max}^{-1}(H)$, *где* ε , *H удовлетворяют* (7). *Тогда, если* $k > 0$ *достаточно велико и* $k\tau$ *достаточно мало, управление* (11) *с вектором коэффициентов усиления* $K = -kg^T$ *обеспечивает выполнение цели* (12).

Доказательство.

Пусть L – матрица Лапласа, соответствующая орграфу связей $\mathcal{G}$. Используя обозначения:

$$x(t) = \mathrm{col}(x_1(t),\ldots,x_N(t)),$$
$$u(t) = \mathrm{col}(u_1(t),\ldots,u_N(t)),$$
$$\bar{\varphi}(t, x) = \mathrm{col}(\varphi(t, x_1),\ldots,\varphi(t, x_N)),$$

систему (10) можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = (I_N \otimes A)x(t) + (I_N \otimes B)u + \bar{\varphi}(t, x), \tag{13}$$

а регулятор (11) в виде

$$u(t) = (L \otimes KC)x(t-\tau), \tag{14}$$

где $A \otimes B$ означает произведение Кронекера матриц *A* и *B*. Подставляя (14) в (13), получаем уравнение замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (I_N \otimes A)x(t) + \\ &+ (L \otimes BKC)x(t-\tau) + \bar{\varphi}(t, x). \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотри ($N \times N$)-матрицу вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Заметим, что $M^{-1} = M$.

Кроме того, поскольку L – матрица Лапласа, то

$$MLM=\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & \Lambda & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix},$$

где $\Lambda\in\mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, а символом * обозначены элементы, значения которых в дальнейшем нам будут не важны.

Проверим, что $\Lambda+\Lambda^T>0.$

Действительно, спектр матрицы Лапласа L лежит в $\mathbb{C}^+\bigcup\{0\}$. По предположению 2 у орграфа связей существует входящее остовное дерево, а значит, в силу теоремы 1, нулевое собственное число матрицы L имеет единичную кратность. Очевидно, что спектры матриц L и MLM совпадают и

$$\det(MLM-\lambda I)=-\lambda\det(\Lambda-\lambda I).$$

Таким образом, если $\det(\Lambda)=0$, то $\lambda=0$ – собственное число второй кратности, что противоречит предположению 2. Итак, все собственные числа матрицы Λ лежат в $\mathbb{C}^+$, а значит, $\Lambda+\Lambda^T>0$. Сделаем замену переменной:

$$\bar z(t)=(M\otimes I_n)x(t). \tag{17}$$

Поскольку $M^{-1}=M$, то $x(t)=(M\otimes I_n)\bar z(t)$. Система (15) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{\bar z}(t)&=(I_N\otimes A)\bar z(t)+\\&+(MLM\otimes BKC)\bar z(t-\tau)+\\&+(M\otimes I_n)\bar\varphi(t,x).\end{aligned}\tag{18}$$

Поскольку для $i=2,\dots,N$ $\bar z_i=x_1-x_i$, достаточно исследовать устойчивость решения с $\bar z_i\equiv 0$ $\forall i=2,\dots,N$. Обозначим

$$z(t)=\begin{pmatrix}\bar z_2(t)\\ \vdots\\ \bar z_N(t)\end{pmatrix},$$
$$\Phi(t,\bar z_1,z)=\begin{pmatrix}\varphi(t,\bar z_1)-\varphi(t,\bar z_1-z_2)\\ \vdots\\ \varphi(t,\bar z_1)-\varphi(t,\bar z_1-z_N)\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot z&=(I_{N-1}\otimes A)z+(\Lambda\otimes BKC)z(t-\tau)+\\&+\Phi(t,\bar z_1,z).\end{aligned}\tag{20}$$

По предположению 3 существует $g\in\mathbb{R}^l$, такой что $g^TW(s)$ – гипер-минимально-фазовая, а значит, существуют H и $\varkappa$ такие, что выполнены соотношения (7). Рассмотрим функцию:

$$V(z)=z^T(t)(I_{N-1}\otimes H)z(t).$$

Условие (8) выполнено с $u(s)=s^2\lambda_{min}(H)$ и $v(s)=s^2\lambda_{max}(H)$. Кроме того, выполняется равенство $\lim_{s\to\infty}u(s)=\infty$. Проверим, когда выполняется условие (9). Производная в силу системы равна

$$\begin{aligned}\dot V&=z^T(t)\Big(I_{N-1}\otimes\{A^TH+HA\}\Big)z(t)+\\&+2z^T(t)(\Lambda\otimes HBKC)z(t-\tau)+\\&+2z^T(t)(I_{N-1}\otimes H)\Phi(t,\bar z_1,z)=\\&=z^T(t)\Big(I_{N-1}\otimes\{A_*^TH+HA_*+\\&+2\varkappa C^Tgg^TC\}\Big)z(t)-\\&-2kz^T(t)(\Lambda\otimes C^Tgg^TC)z(t-\tau)+\\&+2z^T(t)(I_{N-1}\otimes H)\Phi(t,\bar z_1,z),\end{aligned}\tag{21}$$

где $K=-kg^T$, $A_*=A-\varkappa Bg^TC$.

Подставим в (21) $z(t-\tau)=z(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot z(s)\,ds$:

$$\begin{aligned}\dot V&=z^T(t)\Big(I_{N-1}\otimes\{A_*^TH+HA_*\}\Big)z(t)+\\&+z^T(t)\Big(\{2\varkappa I_{N-1}-\\&-k\big[\Lambda+\Lambda^T\big]\}\otimes\{C^Tgg^TC\}\Big)z(t)+\\&+2kz^T(t)(\Lambda\otimes C^Tgg^TC)\int_{t-\tau}^{t}\dot z(s)\,ds+\\&+2z^T(t)(I_{N-1}\otimes H)\Phi(t,\bar z_1,z).\end{aligned}\tag{22}$$

В силу (7) первое слагаемое меньше, чем $-\varepsilon\|z(t)\|^2$. Поскольку $\Lambda+\Lambda^T>0$, второе слагаемое можно сделать неположительным, выбрав $k\ge 2\varkappa/\lambda_{min}\big[\Lambda+\Lambda^T\big]$. Четвёртое слагаемое удовлетворяет неравенству:

$$\begin{aligned}&2\left|z^T(t)(I_{N-1}\otimes H)\Phi(t,\bar z_1,z)\right|\le\\&\le 2\lambda_{\max}(H)L_\varphi\|z\|^2.\end{aligned}\tag{23}$$

Теперь оценим третье слагаемое:

$$\begin{aligned}\int_{t-\tau}^{t}\dot z(s)\,ds&=\int_{t-\tau}^{t}(I_{N-1}\otimes A)z(s)-\\&-k(\Lambda\otimes Bg^TC)z(s-\tau)+\Phi(t,\bar z_1,z)\,ds.\end{aligned}\tag{24}$$

Воспользуемся условием (9) с $p>1$, $p(s)=ps$, $h=2\tau$. Если $V(z(t+\theta))<pV(z(t))$ для $\forall\theta\in[-2\tau,0]$, то $|z(t+\theta)|<q|z(t)|$ с

$q=\sqrt{p\dfrac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}$. Тогда

$$\left|\int_{t-\tau}^{t}\dot z(s)\ ds\right|\le q\tau\|z(t)\|\left(\lambda_A+k\lambda_1\lambda_B\lambda_C+L_\varphi\right), \quad (25)$$

где

$$\lambda_A=\sqrt{\lambda_{max}\left(A^TA\right)},\ \lambda_1=\sqrt{\lambda_{max}\left(\Lambda^T\Lambda\right)},$$

$$\lambda_B=\sqrt{B^TB},\ \lambda_C=\sqrt{\lambda_{max}\left(C^Tgg^TC\right)},$$

Таким образом,

$$2kz^T(t)\left(\Lambda\otimes C^Tgg^TC\right)\int_{t-\tau}^{t}\dot z(s)\ ds\le$$
$$\le 2k\lambda_1\lambda_C^2q\tau\left(\lambda_A+k\lambda_1\lambda_B\lambda_C+L_\varphi\right)\|z(t)\|^2. \quad (26)$$

Итак,

$$\dot V(t)\le\left(2\lambda_{\max}(H)L_\varphi-\varepsilon\right)\|z(t)\|^2+$$
$$+z^T(t)\left(\left\{2\varkappa I-k\left[\Lambda+\Lambda^T\right]\right\}\otimes\left\{C^Tgg^TC\right\}\right)z(t)+ \quad (27)$$
$$+2k\lambda_1\lambda_C^2q\tau\left(\lambda_A+k\lambda_1\lambda_B\lambda_C+L_\varphi\right)\|z(t)\|^2.$$

Из условий теоремы следует, что $2\lambda_{\max}(H)L_\varphi-\varepsilon<0$. Как видно, если

$k\ge 2\varkappa/\lambda_{min}\left[\Lambda+\Lambda^T\right]$

и

$$0\le k\tau<\frac{\varepsilon-2\lambda_{\max}(H)L_\varphi}{2\lambda_1\lambda_C^2q\left(\lambda_A+k\lambda_1\lambda_B\lambda_C+L_\varphi\right)},$$

то выполняются условия теоремы Ляпунова–Разумихина (9). Следовательно, $z(t)\equiv 0$ глобально равномерно асимптотически устойчиво, а, значит, синхронное решение системы (10), (11) глобально равномерно асимптотически устойчиво, т. е. достигается цель управления (12).

Заключение

Рассмотрена задача асимптотической синхронизации сети нелинейных динамических систем с помощью консенсусной обратной связи по запаздывающим выходам. Требуется чтобы линейная часть локальной динамики была гипер-минимально-фазовая, т. е. система была пассифицируема. Нелинейность, входящая в уравнение локальной динамики объекта, удовлетворяет условию Липшица. При этом чем «более устойчивой» можно сделать линейную часть подсистемы, тем большее значение может принимать постоянная Липшица. Структура сети предполагается постоянной и такой, что орграф связей имеет входящее остовное дерево.

Рассмотренный регулятор обладает рядом преимуществ. Во-первых, используются только выходы соседних узлов, размерность которых может быть меньше размерности вектора состояний. Более того, учитывается время, которое необходимо на передачу информации между агентами сети. Во-вторых, управление является скалярной функцией и не требуется, чтобы оно входило во все уравнения локальной динамики.

При помощи метода пассификации, теоремы Агаева–Чеботарёва и теоремы Ляпунова–Разумихина выведены достаточные условия асимптотической синхронизации. Оказывается, что при достаточно большом коэффициенте усиления и достаточно малом произведении запаздывания на коэффициент усиления наступает синхронизация.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (контракт N 14.B37.21.0247) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №11-08-01218.

Список литературы

1. *Olfati-Saber R., Fax J.A., Murray R.M.* Consensus and cooperation in networked multi-agent systems // Proceedings of the IEEE. 2007. V. 95, № 1. P. 215–233.

2. *Ren W., Beard R., Atkins E.* Information consensus in multivehicle cooperative control // Control Systems, IEEE, 2007. P. 71–82.

3. *Wu C.* Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems. Singapore: World Scientific, 2007.

4. *Ren W., Beard R.* Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: Theory and applications. London: Springer, 2007. P. 319.

5. *Bullo F., Cortes J., Martinez S.* Distributed control of robotic networks: a mathematical approach to motion coordination algorithms. Princeton University Press, 2009. P. 336.

6. *Cohen R., Havlin S.* Complex networks: structure, robustness and function. Cambridge University Press, 2010. P. 248.

7. *Steur E.* Synchronous Behavior in networks of coupled systems. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2011. P. 188.

8. *Чеботарёв П., Агаев Р.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // Автоматика и телемеханика. 2009. №. 3. С. 136–151.

9. Li Z., Duan Z., Chen G. et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A Unified Viewpoint // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2010. V. 57. № 1. P. 213–224.

10. *Джунусов И.А., Фрадков А.Л.* Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам // Автоматика и телемеханика.2011, №. 8.

С. 41–52.

11. *Mohar B.* Some applications of Laplace eigenvalues of graphs // Graph symmetry: algebraic methods and applications / Ed. by G. Hahn, G. Sabidussi. Kluwer Academic Publ, 1997. P. 225–275.

12. *Ren W., Beard R.W.* consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies // IEEE Transactions on automatic control. 2005. V. 50, № 5. P. 655–661.

13. *Olfati-Saber R., Murray R.M.* consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Transactions on automatic control. 2004. V. 49, № 9. P. 1520–1533.

14. *Агаев Р., Чеботарёв П.* Матрица максимальных исходящих лесов орграфа и её применения // Автоматика и телемеханика. 2000. №. 9. С. 15–43.

15. *Агаев Р., Чеботарёв П.* Лапласовские спектры орграфов и их приложения // Автоматика и телемеханика. 2005. №. 5. С. 47–62.

16. *Агаев Р., Чеботарёв П.* Остовные леса орграфа и их применение // Автоматика и телемеханика. 2001. №. 3. С. 108–133.

17. *Фрадков А.Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сибирский математический журн. 1976. Т. 17. №. 2. С. 436–445.

18. *Fradkov A.* Passification of Non-square Linear Systems and Feedback Yakubovich-Kalman-Popov Lemma // European journal of control. 2003. №. 6. C. 573–582.

19. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems part II: Linear systems with quadratic supply rates // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972.

20. *Willems J.C.* Dissipative dynamical systems part I: General theory // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1972.

21. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л., Хилл Д.Д.* Пассивность и пассификация нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. №. 3. С. 3–37.

22. *Yakubovich V.A., Fradkov A.L., Hill D.J., Proskurnikov A.V.* Dissipativity of T-periodic linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. № 6. P. 1039–1047.

23. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // Автоматика и телемеханика. 2006. №. 11. С. 3–37.

24. *Разумихин Б.С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. С. 500–512.

CONTROL OF SYNCHRONIZATION FOR NETWORKS WITH NONLINEARITIES AND DELAYED INTERCONNECTIONS

A.A. Selivanov

The task of asymptotic synchronization for a network of nonlinear systems with consensus feedback by delayed output is considered. With the help of the passification method, Agaev-Chebotarev theorem and Lyapunov-Razumikhin method sufficient conditions for synchronization of a network of hyper-minimum-phase objects with Lipschitz nonlinearities were obtained. The network structure is assumed to be fixed and such that there exists an incoming spanning tree.

Keywords: networks, synchronization, time-delay, passification.