Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2013, № 1(3) , с. 278-283

УДК 517.977.1

СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А.И. Овсеевич[1], *А.К. Федоров*[1,2]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ovseev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 03.12.2012

Предлагается метод построения синтеза управления системой из произвольного числа линейных осцилляторов, основанный на сочетании трех стратегий управления. При больших энергиях используется управление, основанное на асимптотической теории областей достижимости линейных систем. По мере уменьшения энергии используется аналогичное управление с уменьшенной верхней границей. На последнем этапе используется метод функций Ляпунова для построения локального синтеза.

Ключевые слова: математическая теория управления, асимптотическая теория областей достижимости, метод функции Ляпунова.

Введение

Аналитическое решение задачи о быстрейшем успокоении линейного осциллятора является одним из классических достижений в математической теории управления [1]. В настоящей работе рассматривается следующая по сложности задача успокоения двух и более линейных осцилляторов, связанных общим управлением. По-видимому, в этом случае нереалистично надеяться на аналитическое построение оптимального синтеза, и даже нахождение численного решения – непростая задача. Поэтому мы ищем неоптимальное управление по обратной связи, приводящее систему в состояние равновесия. Полученное управление не лишено признаков оптимальности: отношение времени приведения в нуль с помощью этого управления к минимально возможному близко к единице, если начальная энергия системы достаточно велика.

Итак, в настоящей работе рассматривается задача о быстрейшем успокоении системы N линейных осцилляторов:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -\omega_i^2 x_i + u, \ |u| \le 1, \ i = 1,\dots,N, \end{cases} \qquad (1)$$

с особым вниманием к случаю N=2. Мы предполагаем, что нет никаких резонансов, т.е. нетривиальных соотношений между частотами вида

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\omega_i = 0, 0 \ne m = (m_1,\dots,m_N) \in \mathbb{Z}^N, \qquad (2)$$

где m – целочисленный вектор. При N=2 это означает, что соотношение частот иррационально.

Механической моделью для (1) служит система из N маятников, подвешенных к тележке, передвигающейся с ускорением u.

1. Задача оптимального быстродействия

Предположим, что нам необходимо перевести систему (1) в терминальную точку за кратчайшее время. Это частный случай задачи быстродействия для линейной системы [1, 2]

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x \in \mathbb{R}^{2N}, \ u \in \mathbb{R}, \ |u| \le 1,$$

где матрица A и вектор B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -\omega_1^2 & 0 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -\omega_N^2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение линейной задачи быстродействия полностью сводится к краевой задаче принципа максимума Понтрягина, отвечающей гамильтониану

$$h(x,p) = (Ax,p) + (Bu,p) - 1,$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2N}$. Задача имеет вид:

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт №14.B37.21.0225.

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \dot{p} = -A^* p,$$
$$u = \operatorname{sign}\left(B^* p\right),\ x(0) = x_0,$$
$$x(T) = h(x, p) = 0.$$

Таким образом, приходится иметь дело с нелинейной краевой задачей $4N$-го порядка. Она сводится к решению системы $2N+1$ трансцендентных уравнений для составного $2N+1$-мерного вектора, что не просто до такой степени, что более разумно подумать о приближенных методах.

2. Предлагаемый метод

Предлагаемый в работе метод построения квазиоптимального синтеза управления системой (1) основывается на сочетании трех стратегий управления. Первоначально на большом времени и при больших энергиях используется управление, основанное на асимптотической теории областей достижимости линейных систем [3, 4] и известной асимптотической формуле для опорной функции множества достижимости системы (1). Формально найденное управление можно применять и при малых энергиях, но его квазиоптимальные свойства при этом теряются. Кроме того, это управление действует на систему примерно как сухое трение, поэтому в некоторых состояниях оно не дает возможности двигаться вообще. Иными словами, возникают зоны застоя – области фазового пространства, в которых не происходит движения под действием управления; чем больше верхняя граница для управлений, тем больше эти зоны. Поэтому по мере уменьшения энергии нами используется аналогичное управление с уменьшенной верхней границей. Тем самым, достигается некоторое уменьшение зоны застоя.

На последнем этапе используется подход к построению локального синтеза [5, 6], основанный на использовании общих функциях Ляпунова. Этот метод работает в некоторой достаточно малой окрестности терминальной точки. Для того чтобы попасть в эту малую окрестность, необходимо, чтобы она содержала внутри себя зоны застоя управления, используемого на предыдущем этапе. Достигнутое на втором этапе управления уменьшение зоны застоя оказывается достаточным для этой цели.

3. Управление системой при больших энергиях

Хорошо известная геометрическая интерпретация принципа максимума Понтрягина [7] состоит в том, что импульс (вектор сопряженных переменных) p в точке x представляет собой внутреннюю нормаль к области достижимости $D(T(x))$. Здесь $T(x)$ – время достижения нуля исходя из x, или, что то же самое, время достижения x исходя из нуля, а $D(T)$ – множество точек, достижимых из нуля за время T. Мы хотим использовать в качестве импульсов нормали к *приближенной* области достижимости. Это возможно сделать благодаря асимптотической теории областей достижимости линейных систем, развитой в [3]. Один из основных результатов [3], примененный к нашей системе N осцилляторов, состоит в следующем. Пусть импульс p записан в виде $p=(p_i)$, где $p_i=(\xi_i,\eta_i)$, а ξ_i – переменная, двойственная к x_i; η_i, – переменная, двойственная к y_i. Пусть

$$z_i = \sqrt{\eta_i^2 + \omega_i^{-2}\xi_i^2}.$$

В таком случае опорная функция H_T области достижимости $D(T)$ имеет при $T\to\infty$ асимптотику вида

$$H_T(p) = T\oint\left|\sum_{i=1}^{N} z_i \cos(\varphi_i)\right| d\varphi + o(T),\quad z = (z_1,\ldots,z_N) \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

где введено следующее обозначение

$$\oint f(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi} f(x)\,dx_1\ldots dx_N.$$

Ключевым для справедливости формулы (3) является условие (2). Опорная функция любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ определяется как

$$H_\Omega(\xi) = \sup_{x\in\Omega}(\xi, x)$$

и задает выпуклое замкнутое множество Ω однозначно.

Идея нашего приближенного метода построения синтеза управления состоит в том, чтобы использовать в качестве приближения к области достижимости $D(T)$ множество $T\Omega$, где опорная функция выпуклого компакта Ω задается главным членом асимптотики (3):

$$H(z) = \oint\left|\sum_{i=1}^{N} z_i \cos(\varphi_i)\right| d\varphi.$$

В таком случае при N=1 и N=2 получаем соответственно

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}|z|,$$
$$H_2(z) = \oint\left|z_1\cos(\varphi_1) + z_2\cos(\varphi_2)\right| d\varphi.$$

Если фазовый вектор лежит на границе, то справедливо следующее уравнение для опорной функции:

$$T^{-1}x = \frac{\partial H(p)}{\partial p}. \tag{4}$$

Отметим, что опорная функция дифференцируема и уравнение (4) имеет ровно одно решение ввиду гладкости границы Ω, установленной в работе [4].

Поскольку вектор $p(x)$ является внешней нормалью к множеству $T\Omega$ в точке x, предлагаемое *квазиоптимальное* управление задается формулой

$$u(x) = -\operatorname{sign}\left(B^* p(x)\right). \tag{5}$$

4. Асимптотическая оптимальность управления

Начнем с определения «полярной» системы координат, в которой особенно хорошо описывается движение под действием управления (5). В случае N=1 мы получим стандартную полярную систему координат на плоскости. С этой целью введем в качестве аналога сферы замыкание $\omega=\partial\Omega$ множества Ω. Каждый ненулевой вектор x из $\mathbb{R}^{2N}$ может быть единственным образом описан в виде $x=\rho\varphi$, где $\rho=\rho(x)$ – положительный множитель и $\varphi\in\omega$. Пара ρ, φ представляет собой координатную запись x, и $\rho(\varphi)=1$ – уравнение, задающее «сферу» ω.

Важно отметить, что множество ω инвариантно относительно свободного (неуправляемого) движения рассматриваемой системы, что следует из аналогичной инвариантности опорной функции под действием эволюции сопряженных переменных, описываемых уравнением Понтрягина

$$\dot{p} = -A^* p.$$

Последняя инвариантность очевидна, поскольку опорная функция зависит только от переменных z_i, являющихся интегралами движения. Инвариантность множества ω эквивалентна инвариантности однородной функции ρ, так что справедливо уравнение

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, Ax\right) = 0.$$

Следовательно, при движении под действием управления (5) полная производная ρ имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, Ax + Bu\right) = \\ &= \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, Bu\right) = -\left|\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, B\right)\right|,\end{aligned} \tag{6}$$

где последнее равенство следует из того, что производная $\partial\rho/\partial x$ является внешней нормалью к множеству $\rho\Omega$. Заметим, что «радиус» ρ «полярной» системы координат монотонно не возрастает. Для любого другого допустимого управления получим

$$\dot{\rho} \geq -\left|\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, B\right)\right|. \tag{6'}$$

Эволюция для переменной φ в силу нашей системы описывается уравнением вида

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= A\varphi + \frac{1}{\rho}\left(Bu - \varphi\dot{\rho}\right) = \\ &= A\varphi + \frac{1}{\rho}\left(Bu + \varphi\left|\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}, B\right)\right|\right).\end{aligned} \tag{7}$$

При этом очевидно, что если предположить, что ρ достаточно велико, то член в правой части есть $O(1/\rho)$ и оказывает малое влияние на движение φ по «сфере». Последний вывод справедлив для любого допустимого управления, а не только для выбранного нами управления (5).

Заметим, что $p = \partial\rho/\partial x$ является однородной функцией степени нуль и потому есть функция от переменной φ. Геометрически p есть внешняя нормаль к поверхности ω в точке φ. Из леммы Эйлера немедленно получаем уравнение

$$H_\Omega(p) = (p, \varphi) = \rho(\varphi) = 1.$$

Тем самым, для функции ρ выполнено уравнение типа эйконала. Заметим, что рассматриваемое уравнение двойственно к уравнению поверхности ω:

$$\rho\left(\frac{\partial H_\Omega(p)}{\partial p}\right) = 1.$$

Именно это уравнение может быть использовано для усреднения по времени правой части уравнения (6).

Начнем с некоторых эвристических соображений. Пусть $\rho=\rho(x)$ велико. Пренебрегая вторым членом правой части уравнения (7), рассмотрим свободное движение для вектора, описываемого уравнением

$$\dot{\varphi} = A\varphi.$$

Из инвариантности функции ρ относительно неуправляемого движения следует, что движение вектора $p = \partial\rho/\partial x$ описывается уравнением Понтрягина. Усреднение состоит в вычислении

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left|p(t), B\right| dt.$$

Но это среднее, согласно [3], есть значение опорной функции. Тогда последнее выражение равно единице. Следовательно, в «среднем»

$$\dot{\rho} = -1.$$

В том же приближении при использовании любого другого допустимого управления

$$\dot{\rho} \geq -1.$$

Поскольку условие управления движением имеет вид ρ=0, то в рамках сделанных приближений управление (5) является оптимальным. Точное утверждение об асимптотической оптимальности управления (5) состоит в следующем.

Теорема 1. Рассмотрим уравнение эволюции (6) под действием управления (5). Пусть

$$M = \min\{\rho(0), \rho(t), t\}.$$

Тогда имеем

$$\frac{\rho(t)-\rho(0)}{t} = 1 + o(1), \ \ M \to \infty.$$

При использовании любого допустимого управления

$$\frac{\rho(t)-\rho(0)}{t} \le 1 + o(1).$$

5. Эффективное вычисление управления

Заметим, что предыдущее обсуждение в первую очередь касается системы из произвольного количества N осцилляторов, связанных общим управлением. Случай N=2, однако, является особым, поскольку только в этом случае можно эффективно решать уравнение (4). В координатной форме оно имеет вид:

$$T^{-1}(x_i, y_i) = z_i^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial z_i}\right)\left(\frac{\xi_i}{\omega_i^2}, \eta_i\right), \ \ i = 1, \dots, N.$$

Для решения уравнения (4) следует первым делом вычислить точку j сферы S^{N-1} с положительно однородными координатами

$$(z_1 : \dots : z_N).$$

Здесь сфера S^{N-1}реализуется как множество направлений ненулевых векторов в $\mathbb{R}^N$. Для этого определим «энергетический» вектор

$$e_i = \sqrt{\omega_i^2 x_i^2 + y_i^2}$$

и получим в качестве следствия уравнения (4) следующее уравнение

$$T^{-1} e_i = \left(\frac{\partial H}{\partial z_i}\right),$$

имеющее, согласно [5], единственное решение, которое, впрочем, сложно найти. В любом случае получаем, что T есть функция «энергетического» вектора. При N=2 уравнение (4) одномерно: данными задачи является точка $(e_1, e_2) \in S^1$ и требуется найти точку $j \in S^{N-1}$. Поэтому его можно эффективно решить. Ниже мы приведем детали решения, связанные с вычислением эллиптических интегралов.

При этом правую часть можно рассматривать как некоторую функцию g, процедура вычисления которой, как функции от фазового вектора, фактически описана выше. Считая g_i известной, получим окончательную форму для импульса:

$$(\xi_i, \eta_i) = \frac{z_i}{Tg_i}\left(\omega_i^2 x_i, y_i\right).$$

Если нам известна точка j, то направление импульса определяется формулой, написанной выше однозначно: неизвестный положительный множитель T^1 не играет роли. Управление в таком случае зависит только от направления импульса, и его можно эффективно найти. Оно имеет вид

$$u(x) = -\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{N} g_i^{-1} z_i y_i\right).$$

При N=1 управление имеет вид сухого трения; в дальнейшем используется управление

$$u_U(x) = U u(x), \ U \le 1.$$

Теорема 2. Производные от опорной функции H по параметру z_i, т.е. интегралы

$$\frac{\partial H}{\partial z_1} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{k \sin^2(\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2(\varphi)}}, \ k = -\frac{z_1}{z_2}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-k^2\cos^2(\varphi)}\, d\varphi, \tag{9}$$

рассматриваемые как мероморфные функции от k, переходят друг в друга, поскольку при замене $z_1 \to z_2$ происходит замена параметров $k \to k^{-1}$. Их можно интерпретировать как интегралы от мероморфной дифференциальной формы:

$$\alpha = \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{y}$$

на эллиптической кривой

$$E = \left\{y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)\right\},$$

взятые по замкнутым путям; γ_1 соединяет (-1,0) и (1,0), а γ_2 соединяет $(-k^{-1},0)$ и $(k^{-1},0)$. Форма α неголоморфна: имеет полюс 2-го порядка на бесконечности, так что это дифференциал второго рода. Сама опорная функция имеет вид

$$H = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \frac{(z_2^2 - z_1^2)\,d\varphi}{\sqrt{z_2^2 - z_1^2\cos(\varphi)}}, \ |z_1| \le |z_2|,$$

и выражается через период голоморфной формы dx/y на кривой E.

Прямым следствием теоремы 2 является ключевое уравнения для k,

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{\int_{\gamma_2} \alpha}{\int_{\gamma_1} \alpha}$$

которое необходимо для определения квазиоптимального управления.

6. Зоны застоя

Некоторые точки фазового пространства остаются на месте при использовании квазиоптимального управления. Множество таких точек естественно назвать зоной застоя. Ясно, что способ управления следует изменить до попадания в зону застоя. Описать это множество точно для конкретного управления достаточно сложно. Имеется, однако, очевидная верхняя оценка этого множества, справедливая для любых допустимых управлений, ограниченных константой U: зоны застоя располагаются на отрезке

$$\left\{A^{-1}Bu, |u| \le U\right\} =$$
$$= \left\{y_i = 0, \omega_i^2 x_i = \omega_j^2 x_j, \left|\omega_i^2 x_i\right| \le U, i, j = 1,\ldots,N\right\}.$$

Вполне вероятно, что зона застоя для предлагаемого управления не только содержится, но и совпадает с указанным множеством. Во всяком случае, для системы из одного маятника N=1 аналогом предлагаемого управления является сухое трение, и его зона застоя совпадает с данным множеством. При N=1 движение под действием управления не имеет никаких минимальных аттракторов (ω-предельных множеств траекторий), кроме точек зоны застоя. При N=1 последнее условие может выполняться не более чем в двух точках ξ одномерной «сферы» ω.

7. Синтез вблизи терминальной точки

Идея нашего подхода к построению локального синтеза восходит к [7]. Она использует предварительное приведение системы (1) к некоторому каноническому виду при помощи преобразований

$$A \mapsto A + BC,\ u \mapsto u - Cx,$$
$$A \mapsto D^{-1}AD,\ B \mapsto D^{-1}B, \tag{10}$$

соответствующих добавлению линейной обратной связи и замене координат (калибровке). Используем лемму Бруновского.

Лемма Бруновского. С помощью преобразований (10) система (1) приводится к виду

$$\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}u,$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ldots & \ldots & \\ & & & -2n+1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица линейной обратной связи имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \ldots & c_N & 0 \end{pmatrix},$$

$$c_k = (-1)^{N+1} \omega_k^{2N} \prod_{i \ne k} \left(\omega_i^2 - \omega_k^2\right)^{-1}.$$

Калибровочная матрица D переводит стандартный базис исходного пространства в базис

$$e_i = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}(A + BC)^{i-1} B,\ i = 1,\ldots,2N$$

и имеет следующий вид. Определим 2×2 матрицы:

$$d_{ij} = (-1)^{j-1} \lambda_i^{j-1} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(2(j-1))!} \\ \dfrac{1}{(2(j-1))!} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = \sum_{i \ne k} \omega_i^2.$$

тогда D является $N \times N$ матрицей (d_{ij}) из 2×2 блоков d_{ij}.

Следуя [6], введем матричную функцию времени, связанную с системой

$$\delta(T) = \operatorname{diag}\left(T^1, T^2, \ldots, T^{2N}\right)^{-1}.$$

В дальнейшем параметр T станет функцией фазового вектора. Введем матрицы

$$q = (q_{ij}),\ q_{ij} = \int_0^1 x^{i+y-2}(1-x)\,dx =$$
$$= \left[(i+j)(i+j-1)\right]^{-1}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{Q} = q^{-1},\ \mathfrak{C} = -\frac{1}{2}\mathfrak{B}^{*}\mathfrak{Q},\ \mathfrak{M} = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, 2N)$$

и управление по обратной связи, заданное формулой

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{C}\delta(T(\mathfrak{x}))\mathfrak{x}, \tag{12}$$

где функция T задана неявно уравнением

$$\left(\mathfrak{Q}\delta(T)\mathfrak{x}, \delta(T)\mathfrak{x}\right) = \kappa^2, \tag{13}$$

значение константы из правой части будет определено позднее.

Теорема 3. Верны следующие утверждения:

A) Матрица $\mathfrak{Q}$ из (11) задает общую квадратичную функцию Ляпунова для матриц $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{M}$.

B) Уравнение (12) однозначно определяет функцию T.

C) Управление (12) ограничено величиной

$$|\mathfrak{u}| \le \frac{\kappa}{2}\sqrt{\mathfrak{Q}_{11}},\quad \frac{\kappa}{2}\sqrt{\mathfrak{Q}_{11}} = \kappa\sqrt{5}.$$

D) Управление (9) переводит систему в нуль за время T.

E) Матричный элемент $\mathfrak{Q}_{11}$ имеет вид

$$\mathfrak{Q}_{11} = 2N(2N+1).$$

Теорема 4. Матрица $\mathfrak{Q}$ является целочисленной и четной. При N=4

$$\begin{pmatrix} 20 & -180 & 420 & -280 \\ -180 & 2220 & -5880 & 4200 \\ 420 & -5880 & 16800 & -12600 \\ -280 & 4200 & -12600 & 9800 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получается явный вид уравнения (10)

$$\begin{aligned} &T^8 - 20\mathfrak{x}_1^2 T^6 + 360\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 T^5 - \\ &-\left(2220\mathfrak{x}_2^2 + 840\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3\right)T^4 + \\ &+\left(11760\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 560\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_4\right)T^3 - \\ &-\left(8400\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_4 + 16800\mathfrak{x}_3^2\right)T^2 + \\ &+25200\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4 T - 9800\mathfrak{x}_4^2 = 0 \end{aligned}$$

Для того чтобы управление было ограничено величиной 1/2, нужно, чтобы

$$\kappa = \left(2\sqrt{5}\right)^{-1}.$$

Именно такая граница для управления используется на втором и третьем этапе. Для построения локального синтеза, согласующегося с предыдущим управлением, необходимо рассмотреть инвариантную область системы.

Теорема 5. Инвариантная область для системы (1)

$$\begin{aligned} G_\Theta &= \left\{\mathfrak{x} : T\left(\mathfrak{x}\right) \le \Theta\right\} = \\ &= \left\{\mathfrak{x} : \left(\mathfrak{Q}\delta\left(\Theta\right)\mathfrak{x}, \delta\left(\Theta\right)\mathfrak{x}\right) \le 1\right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

удовлетворяет условиям:

– область содержит зону застоя предшествующего управления;

– область содержится в полосе:

$$\left|Cx\right| \le 1/2,$$

что позволяет на последнем этапе применять управление, ограниченное по модулю величиной 1/2.

Заключение

Построено квазиоптимальное управление, приводящее систему из произвольного числа линейных осцилляторов в состояния равновесия, основанное на сочетании асимптотической теории областей достижимости линейных систем и локального синтеза.

Ограничения на объем статьи не позволяют привести детальные доказательства утверждений, и они будут опубликованы отдельно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-08-00435) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт N 14.B37.21.0225.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.

2. Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

3. Гончарова Е.В., Овсеевич А.И. Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. №1. С. 46–54.

4. Ovseevich A.I. Singularities of Attainable Sets // Rus. J. Math. Phys. 1998. Т. 5, № 3. С. 389–398

5. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434, № 3. С. 1–5.

6. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Матем. сб. 1979. Т. 109, № 4, С. 582–606.

7. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2004. 392 с.

FEEDBACK BOUNDED CONTROL FOR A SYSTEM OF OSCILLATORS

A.I. Ovseevich, A.K. Fedorov

A design method of feedback control for system of an arbitrary number of linear oscillators, based on a combination of three strategies is proposed. At high energies we use a control based on the asymptotic theory of reachable sets of linear systems. As the amount of energy used by a similar control with a reduced upper limit. At the last stage of the method of the Lyapunov functions for the construction of local feedback control.

Keywords: mathematical control theory, asymptotic theory of reachable sets, Lyapunov functions.