УДК 531

НЕЛИНЕЙНОЕ УПРОЧНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕСТАБИЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ СТРУКТУР

Л.А. Сараев [1], А.В. Мантуленко [1], Ю.А. Кузнецов [2]

[1] Самарский госуниверситет
[2] НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

saraev@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 30.11.2012

Предложена математическая модель процесса изотермических фазовых превращений первого рода в упругой среде. Согласно этой модели, элементы формирующейся новой фазы расположены в объеме старой фазы не равномерно, а образуют скопления сферической формы.

Ключевые слова: математическая модель, фазовые превращения первого рода в упругой среде.

Пусть упругая среда, в которой происходит фазовый переход первого рода, занимает объем V, ограниченный поверхностью S. Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы обозначим V_f, объем старой фазы – V_m.

Кроме того, обозначим объем, занимаемый скоплениями включений, W_f, а объем оставшийся части матрицы – W_m. Таким образом, вся рассматриваемая среда представляет собой двухкомпонентную фазовую структуру, в которой включениями являются объемы скоплений, а каждый элемент скоплений включений, в свою очередь, представляет собой двухкомпонентный композит с равномерным распределением зародышей. При этом выполняются элементарные соотношения

$$V_m + V_f = V,\ W_m + W_f = V, \left(V_m > W_m, V_f < W_f\right).$$

При фазовом превращении $\left(V_f \to V_m\right)$ в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Эти деформации являются ограниченными предельными сдвигами двойниковых доменов $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$, $\alpha = \sqrt{\alpha_{ij}\,\alpha_{ij}}$, где $\alpha_{\max}$ – максимальный уровень структурных деформаций. Закон Гука такой среды имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu_m\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\,\lambda_m\,\varepsilon_{pp}\ ,\ \mathbf{r}\in V_m \\ \sigma_{ij} &= 2\mu_f\left(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}\right) + \delta_{ij}\,\lambda_f\,\varepsilon_{pp}\ ,\ \mathbf{r}\in V_f \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – тензоры напряжений и полных деформаций, $\mu_s, \lambda_s\ (s=1,2)$ – параметры Ламе компонентов.

В качестве условий фазовых переходов второго компонента в первый и обратно принимаются поверхности нагружения

$$\begin{aligned} &\left(s_{ij} - 2n_+(\alpha)\alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - 2n_+(\alpha)\alpha_{ij}\right) = k_+^{\,2}(\alpha)\ , \\ &\qquad\left(V_m \to V_f\right); \\ &\left(s_{ij} - 2n_-(\alpha)\alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - 2n_-(\alpha)\alpha_{ij}\right) = k_-^{\,2}(\alpha)\ , \\ &\qquad\left(V_f \to V_m\right). \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь

$$k_{+,-}(\alpha) = k_{+,-}^{\infty} + \left(k_{+,-}^{0} - k_{+,-}^{\infty}\right)\left(1 - e^{-\lambda_{+,-}\alpha}\right),$$
$$n_{+,-}(\alpha) = n_{+,-}^{\infty} + \left(n_{+,-}^{0} - n_{+,-}^{\infty}\right)\left(1 - e^{-\lambda_{+,-}\alpha}\right),$$

$k_{+,-}^{0,\infty}$ – начальный и конечный пределы прямого и обратного фазовых переходов соответственно, $n_{+,-}^{0,\infty}$ – начальный и конечный коэффициенты упрочнения, $\lambda_{+,-}$ – параметр, характеризующий скорость перемещения поверхностей (2) в шестимерном пространстве напряжений. Экспериментальные наблюдения показывают, что эти характеристики зависят от температуры и их значения определяют тип поведения нестабильной среды (сверхупругость, эффект «памяти формы» или обычное пластическое течение).

Геометрическая структура такого двухкомпонентного материала описывается случайной изотропной индикаторной функцией координат $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в точках старой фазы и единице в точках новой. С помощью этой функции локальный закон Гука для среды записывается в виде

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.2019 «Проблемы динамического состояния сложных сред и конструкций».

$$s_{ij}(\mathbf{r})=2\left(\mu_m+[\mu]\kappa(\mathbf{r})\right)e_{ij}(\mathbf{r})-2\mu_m\alpha_{ij}(\mathbf{r}),$$
$$\sigma_{pp}(\mathbf{r})=3\left(K_m+[K]\kappa(\mathbf{r})\right)\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Здесь

$$s_{ij}=\sigma_{pp}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\cdot\sigma_{ij},\quad e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{pp},$$

$$K_{m,f}=\frac{2}{3}\mu_{m,f}+\lambda_{m,f},$$

квадратными скобками обозначены разрывы величин при переходе фазовой границы – $[Q]=Q_f-Q_m$. Структурные деформации удовлетворяют условию несжимаемости $\alpha_{pp}(r)=0$.

Индикаторная функция $\kappa(\mathbf{r})$, напряжения, полные и структурные деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему V, объемам фаз $V_{m,f}$ и W_f [1]:

$$\langle Q\rangle=\frac{1}{V}\int_V Q(\mathbf{r})d\mathbf{r},\quad \langle Q\rangle_f=\frac{1}{W_f}\int_{W_f} Q(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

$$\langle Q\rangle_{m,f}=\frac{1}{V_{m,f}}\int_{V_{m,f}} Q(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

угловыми скобками обозначена операция осреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений материала и вычисления его эффективных характеристик необходимо усреднить по полному объему W_f локальный закон Гука (3):

$$\langle s_{ij}\rangle_w=2\mu_m\langle e_{ij}\rangle_w+2[\mu]\frac{c_v}{c_w}\langle e_{ij}\rangle_f-2\mu_m\langle\alpha_{ij}\rangle_w,$$
$$\langle\sigma_{pp}\rangle_w=3K_m\langle\varepsilon_{pp}\rangle_w+3[K]\langle\varepsilon_{pp}\rangle_f. \quad (4)$$

Здесь $c_v=V_f/V$ – объемное содержание зародышей новой фазы, $c_w=W_f/V$ – объемное содержание скоплений включений.

Соотношения (4) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle e_{ij}\rangle_f, \langle\varepsilon_{pp}\rangle_f$ через макроскопические деформации.

Для этого усредним систему интегральных уравнений равновесия, ядрами которой являются вторые производные тензора Грина [2]:

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r})=\int_{W_f}\mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\tau'_{kl}(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1. \quad (5)$$

Умножая уравнения (5) на $\kappa'(\mathbf{r})$, усредняя их затем по объему V, принимая во внимание изотропность структуры композита, и используя известное соотношение

$$\langle f\rangle_2=\langle f\rangle+c_2^{-1}\langle k'f'\rangle,$$

находим [2]

$$\langle e_{ij}\rangle_f=\frac{1}{1+\alpha_m\left(1-\frac{c_v}{c_w}\right)(m-1)}\times$$
$$\times\left(\langle e_{ij}\rangle_w+m\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_w}\right)\alpha_m\langle\alpha_{ij}\rangle_w\right), \quad (6)$$
$$\langle\varepsilon_{pp}\rangle_f=\frac{1}{1+\gamma_m\left(1-\frac{c_v}{c_w}\right)(q-1)}\langle\varepsilon_{pp}\rangle_w.$$

Здесь

$$\alpha_m=\frac{2}{15}\cdot\frac{4-5\nu_m}{1-\nu_m},\ \gamma_m=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+\nu_m}{1-\nu_m},$$

$$\nu_m=\frac{1}{2}\cdot\frac{3K_m-2\mu_m}{3K_m+2\mu_m},$$

$$m=\frac{\mu_f}{\mu_m},\ q=\frac{K_m}{K_f},\ c_s=\frac{V_s}{V}.$$

Подстановка формул (6) в соотношения (4) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\langle s_{ij}\rangle_w=2\mu_w\langle e_{ij}\rangle_w-2\mu_w^{\alpha}\langle\alpha_{ij}\rangle_w,$$
$$\langle\sigma_{pp}\rangle_w=3K_w\langle\varepsilon_{pp}\rangle_w. \quad (7)$$

Здесь

$$\mu_w=\mu_m\left(1+\frac{\frac{c_v}{c_w}(m-1)}{1+\alpha_m\left(1-\frac{c_v}{c_w}\right)(m-1)}\right),$$

$$\mu_w^{\alpha}=\frac{\mu_m}{1+\alpha_m\left(1-\frac{c_v}{c_w}\right)(m-1)},$$

$$K_w=K_m\left(1+\frac{\frac{c_v}{c_w}(q-1)}{1+\gamma_m\left(1-\frac{c_v}{c_w}\right)(q-1)}\right).$$

Аналогично рассчитываются формулы для эффективных модулей упругости всего композита, образованного матрицей W_m и скоплениями W_f.

Макроскопический закон Гука в этом случае имеет вид

$$\langle s_{ij}\rangle=2\mu^*\langle e_{ij}\rangle-2\mu^{\alpha}\langle\alpha_{ij}\rangle,\ \langle\sigma_{pp}\rangle=3K^*\langle\varepsilon_{pp}\rangle. \quad (8)$$

Здесь

$$\mu^* = \mu_m \left(1 + \frac{c_w \left(\mu_w - \mu_m \right)}{\mu_m + \alpha_m \left(1 - c_w \right) \left(\mu_w - \mu_m \right)} \right),$$
$$K^* = K_m \left(1 + \frac{c_w \left(K_w - K_m \right)}{K_m + \gamma_m \left(1 - c_w \right) \left(K_w - K_m \right)} \right). \quad (9)$$

Для определения макроскопических условий прямого и обратного фазовых превращений в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношения (2) по объему новой фазы V_f

$$\left\langle s_{ij} - 2n_{+,-}\left(\alpha\right)\alpha_{ij} \right\rangle_f \left\langle s_{ij} - 2n_{+,-}\left(\alpha\right)\alpha_{ij} \right\rangle_f = = k_{+,-}{}^2 \left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right). \quad (10)$$

Подстановка в условие (10) локального закона Гука (3) и применение правила механического смешивания дают макроскопические поверхности нагружения

$$\left(\left\langle s_{ij} \right\rangle - 2n^*_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) \left\langle \alpha_{ij} \right\rangle_f \right) \times \times \left(\left\langle s_{ij} \right\rangle - 2n^*_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) \left\langle \alpha_{ij} \right\rangle_f \right) = k^{*2}_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) \quad (11)$$

и ассоциированный с ней закон деформирования

$$\left\langle s_{ij} \right\rangle = k^*_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) \nu_{ij} + 2n^*_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) \left\langle \alpha_{ij} \right\rangle_f ,$$
$$\nu_{ij} = \frac{\left\langle \dot\alpha_{ij} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \dot\alpha_{kl} \right\rangle \left\langle \dot\alpha_{kl} \right\rangle}}. \quad (12)$$

Здесь

$$k^*_{+,-} = \frac{k_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right)}{m} \left(1 + \left(\alpha_m \left(1 - \frac{c_v}{c_w} \right) + \frac{c_v}{c_w} \right) (m-1) \right)$$

– эффективный начальный предел фазового перехода,

$$n^*_{+,-} = n_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) + + \mu^* \left(\frac{k^*_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right)}{k_{+,-}\left(\left\langle \alpha \right\rangle_f \right) c_v} \left(1 - \left(1 - \frac{c_v}{c_w} \right) \alpha_m \right) - 1 \right)$$

– эффективный коэффициент упрочнения, характеризующий скорость перемещения поверхности (9) в шестимерном пространстве макронапряжений.

Структурные средние деформации $\left\langle \alpha_{ij} \right\rangle_f$ необходимо выразить через объемное содержание новой фазы c_v и величину $\alpha_{\max}$.

Известно, что в процессе фазового перехода можно выделить два этапа. На первом этапе происходит интенсивное образование зон новой фазы (зародышей), которое сопровождается быстрым прогрессирующим ростом концентрации зародышей при относительно небольшом уровне структурных деформаций α_{ij}. На втором этапе насыщения образование новой фазы замедляется и происходит в основном за счет объемного роста самих зародышей, внутри которых структурные деформации α_{ij} развиваются до своих максимальных значений.

Деление процесса фазового превращения на два этапа достаточно условно, так как на практике оба процесса наблюдаются параллельно с преобладанием одного из них в разных стадиях развития уровней структурных деформаций. С достаточной степенью точности этот процесс может быть описан кинетическим уравнением

$$\frac{d\alpha}{dc_v} = h\left(1-\alpha\right)^{\lambda} c_v \quad (0 \le \lambda \le 1). \quad (13)$$

Параметр роста λ служит показателем разделения этапов фазового перехода и является материальной константой рассматриваемой нестабильной среды. Из решения уравнения (13) и очевидных условий $c_v\big|_{\alpha=0} = 0$ и $c_v\big|_{\alpha=\alpha_{\max}} = c_w$ находим зависимость роста уровня структурных деформаций от концентрации новой фазы

$$\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = 1 - \left(1 - c_v^2\right)^{1/(1-\lambda)} \quad (14)$$

или

$$c_v = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} - 1 \right)^{1-\lambda}}. \quad (15)$$

Уравнения (14), (15) представляют собой так называемую логистическую кривую, график которой до определенной концентрации зародышей является вогнутым, что означает прогрессирующий рост новой фазы, а затем становится выпуклым, что означает замедленный рост – насыщение.

Поскольку величина λ остается постоянной на протяжении всего процесса фазового перехода, то ее значение может быть измерено на границе упругого поведения и нелинейного упрочнения нестабильной среды. Затем это вычисленное значение λ должно быть использовано в уравнениях (12) во всем диапазоне развития структурных деформаций $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$.

Соотношение (10) принимает вид

$$\left\langle s_{ij} \right\rangle = \left(k^*_{+,-} + 2n^*_{+,-}\alpha_{\max}\left(1 - (1-c_v)^{1/(1-\lambda)} \right) \right) \nu_{ij}. \quad (16)$$

Список литературы

1. Сараев Л.А. Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов // Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2000. 182 с.

2. Сараев Л.А., Глущенков В.С. Неупругие свойства многокомпонентных композитов со случайной структурой // Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та, 2004. 164 с.

3. Сараев Л.А., Фартушнова Е.А. Уравнения изотермических фазовых превращений в твердых телах с микроструктурой // Тр. II Междунар. симп. ОМА–II «Фазовые превращения в твердых растворах и сплавах»: Сочи, 2001. С. 289–292.

4. Сараев Л.А., Ильина Е.А., Михеев А.Г. К теории сверхупругого поведения композиционных материалов с нестабильными компонентами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Самара, 2004. № 26. С.108-114.

NONLINEAR HARDENING OF UNEVENLY DISTRIBUTED UNSTABLE PHASE STRUCTURES

L.A. Sarayev, A.V. Mantulenko, Yu.A. Kuznetsov

The mathematical model of process of isothermal phase transformations of the first sort in the elastic environment is offered. According to this model elements of a being formed new phase are located in volume of an old phase not evenly, and form congestions of a spherical form.

Keywords: mathematical model, phase transformations of the first sort in the elastic environment