УДК 531

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ СВЕРХУПРУГОЙ НЕСТАБИЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ СМЕСИ

 Л.А. Сараев[1], В.О. Левченко[1], Ю.А. Кузнецов[2]

[1]Самарский госуниверситет
[2]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

saraev@samsu.ru

Поступила в редакцию 30.11.2012

Представлена математическая модель сверхупругого деформирования нестабильной матричной смеси, учитывающая нелинейную зависимость условий прямого и обратного фазовых переходов от уровня структурных деформаций.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейная зависимость, сверхупругое деформирование, нестабильная матричная смесь.

Пусть упругая среда, в которой происходит фазовый переход первого рода, занимает объем V, ограниченный поверхностью S. Объем зарождающейся и развивающейся новой фазы обозначим V_1, объем старой фазы – V_2. Рассмотрим модель, согласно которой под действием внешних нагрузок новая фаза зарождается и вырастает из старой, при этом обе фазы обладают самостоятельной несущей способностью и образуют матричную смесь.

При фазовом превращении $\left(V_1 \to V_2\right)$ в материале новой фазы под воздействием внешних нагрузок возникают и развиваются необратимые структурные деформации $\alpha_{ij}(\mathbf{r})$, вызванные перестройкой кристаллической и доменной структуры материала. Эти деформации являются ограниченными предельными сдвигами двойниковых доменов $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$, $\alpha = \sqrt{\alpha_{ij}\,\alpha_{ij}}$, где $\alpha_{\max}$ – максимальный уровень структурных деформаций. Закон Гука такой среды имеет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = 2\,\mu_1\left(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}\right) + \delta_{ij}\,\lambda_1\,\varepsilon_{pp}\,, \quad \mathbf{r} \in V_1, \\ &\sigma_{ij} = 2\,\mu_2\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\,\lambda_2\,\varepsilon_{pp}\,, \ \mathbf{r} \in V_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – тензоры напряжений и полных деформаций; μ_s, λ_s $(s=1,\,2)$ – параметры Ламе компонентов.

В качестве условия фазового перехода первого компонента во второй принимаются поверхности нагружения:

$$\begin{aligned} &\left(s_{ij} - 2n_+(\alpha)\alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - 2n_+(\alpha)\alpha_{ij}\right) = k_+^{\,2}(\alpha)\,, \ \left(V_2 \to V_1\right), \\ &\left(s_{ij} - 2n_-(\alpha)\alpha_{ij}\right)\left(s_{ij} - 2n_-(\alpha)\alpha_{ij}\right) = k_-^{\,2}(\alpha)\,, \ \left(V_1 \to V_2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$k_{+,-}(\alpha) = k_{+,-}^{\infty} + \left(k_{+,-}^{0} - k_{+,-}^{\infty}\right)\left(1 - e^{-\lambda_{+,-}\alpha}\right),$$

$$n_{+,-}(\alpha) = n_{+,-}^{\infty} + \left(n_{+,-}^{0} - n_{+,-}^{\infty}\right)\left(1 - e^{-\lambda_{+,-}\alpha}\right),$$

$k_{+,-}^{0,\infty}$ – начальный и конечный пределы прямого и обратного фазовых переходов соответственно; $n_{+,-}^{0,\infty}$ – начальный и конечный коэффициенты упрочнения; $\lambda_{+,-}$ – параметр, характеризующий скорость перемещения поверхностей (2) в шестимерном пространстве напряжений. Экспериментальные наблюдения показывают, что эти характеристики зависят от температуры и их значения определяют тип поведения нестабильной среды (сверхупругость, эффект «памяти формы» или обычное пластическое течение).

Геометрическая структура такого двухкомпонентного материала описывается случайной изотропной индикаторной функцией координат $\kappa(\mathbf{r})$, равной нулю в точках первого компонента и единице в точках второго. С помощью этой функции локальный закон Гука для среды записывается в виде

$$\begin{aligned} &s_{ij}(\mathbf{r}) = 2\left(\mu_1 + [\mu]\kappa(\mathbf{r})\right)e_{ij}(\mathbf{r}) - 2\,\mu_1\,\alpha_{ij}(\mathbf{r}), \\ &\sigma_{pp}(\mathbf{r}) = 3\left(K_1 + [K]\kappa(\mathbf{r})\right)\varepsilon_{pp}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.2013 «Математические модели и методы нелинейной динамики в задачах механики и экономики».

$$s_{ij} = \sigma_{pp} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\cdot\sigma_{ij}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij}\varepsilon_{pp},$$

$$K_s = \frac{2}{3}\mu_s + \lambda_s \triangleright \frac{n!}{r!(n-r)!},$$

квадратными скобками обозначены разрывы величин при переходе фазовой границы – $[f] = f_2 - f_1$. Структурные деформации удовлетворяют условию несжимаемости $\alpha_{pp}(r) = 0$.

Индикаторная функция $\kappa(\mathbf{r})$, напряжения, полные и структурные деформации предполагаются статистически однородными и эргодическими полями, поэтому их математические ожидания совпадают со средними значениями по полному объему V и объемам фаз V_s:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{V}\int_V f(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

$$\langle f\rangle_s = \frac{1}{V_s}\int_{V_s} f(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (s=1,\,2),$$

угловыми скобками обозначена операция усреднения.

Для установления макроскопических определяющих уравнений рассматриваемой среды и вычисления ее эффективных характеристик необходимо установить связь между макроскопическими напряжениями и макроскопическими полными и структурными деформациями. С этой целью необходимо усреднить по полному объему V локальный закон Гука (3):

$$\begin{gathered}\langle s_{ij}\rangle = 2\langle\mu\rangle\langle e_{ij}\rangle + 2[\mu]\langle\kappa' e'_{ij}\rangle - 2\mu_1\langle\alpha_{ij}\rangle,\\ \langle\sigma_{pp}\rangle = 3\langle K\rangle\langle\varepsilon_{pp}\rangle + 3[K]\langle\kappa'\varepsilon'_{pp}\rangle.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V. Соотношения (4) показывают, что для установления эффективного закона Гука необходимо выразить величины $\langle\kappa' e'_{ij}\rangle$ через макроскопические деформации $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$. Это достигается статистическим усреднением системы деформирования среды, состоящей из локальных уравнений (3), уравнений равновесия и соотношений Коши, связывающих компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещений $u_i(\mathbf{r})$. Граничными условиями такой системы являются условия отсутствия флуктуаций величин на поверхности S объема V, а сама система сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений, ядрами которой являются вторые производные тензора Грина [1]

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}_{ik,lj}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\tau'_{kl}(\mathbf{r}_1)\cdot d\,\mathbf{r}_1. \tag{5}$$

Вычислим моменты $\langle\kappa' e'_{ij}\rangle$. Умножая уравнения (5) на $\kappa'(\mathbf{r})$, усредняя их затем по объему V и применяя гипотезу сингулярного приближения, находим

$$\begin{gathered}\langle\kappa' e'_{ij}\rangle = -\frac{\alpha c_1 c_2 [m]}{1-\alpha[m][c]}\langle e_{ij}\rangle - \frac{\alpha c_2 m_1}{1-\alpha[m][c]}\langle\alpha_{ij}\rangle,\\ \langle\kappa' e'_{ij}\rangle = -\frac{\gamma c_1 c_2 [q]}{1-\gamma[q][c]}\langle\varepsilon_{pp}\rangle.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{2}{15}\cdot\frac{4-5\langle\nu\rangle}{1-\langle\nu\rangle}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}\cdot\frac{1+\langle\nu\rangle}{1-\langle\nu\rangle},$$

$$\nu_s = \frac{1}{2}\cdot\frac{3K_s - 2\mu_s}{3K_s + 2\mu_s}, \qquad m_s = \frac{\mu_s}{\langle\mu\rangle},$$

$$q_s = \frac{K_s}{\langle K\rangle}, \quad c_s = \frac{V_s}{V}$$

– объемные содержания фаз.

Подстановка формул (6) в соотношения (4) дает макроскопический закон Гука рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\langle s_{ij}\rangle = 2\mu^*\langle e_{ij}\rangle - 2\mu^\alpha\langle\alpha_{ij}\rangle,\ \langle\sigma_{pp}\rangle = 3K^*\langle\varepsilon_{pp}\rangle. \tag{7}$$

Здесь

$$\mu^* = \langle\mu\rangle\left(1 - \frac{\alpha c_1 c_2 [m]^2}{1-\alpha[m][c]}\right),$$

$$K^* = \langle K\rangle\left(1 - \frac{\gamma c_1 c_2 [q]^2}{1-\gamma[q][c]}\right),$$

$$\mu^\alpha = \mu_1\left(1 + \frac{\alpha c_2 [m]}{1-\alpha[m][c]}\right),$$

звездочкой обозначены эффективные модули упругости микронеоднородной среды.

Выражения для μ^*, K^* показывают, что образующаяся новая и первоначальная фазы являются матричной смесью, так как для любых c_1, c_2 при $\mu_1 = 0,\ K_1 = 0$ и отдельно при $\mu_2 = 0,\ K_2 = 0$ величины μ^*, K^* тождественно в нуль не обращаются.

Для определения макроскопического условия фазового превращения в рассматриваемой среде и закона ее деформирования необходимо усреднить соотношение (2) по объему новой фазы V_1. Верхняя оценка этого условия имеет вид [1]:

$$\begin{gathered}\langle s_{ij} - 2n_{+,-}(\alpha)\alpha_{ij}\rangle_1 \langle s_{ij} - 2n_{+,-}(\alpha)\alpha_{ij}\rangle_1 =\\ = k_{+,-}{}^2(\langle\alpha\rangle_1)\end{gathered} \tag{8}$$

Подстановка в условие (8) локального закона Гука (3) и применение правила механического смешивания дает макроскопическую поверхность нагружения

$$\left(\left\langle s_{ij}\right\rangle-2n^*_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)\left\langle\alpha_{ij}\right\rangle_1\right)\times \\ \times\left(\left\langle s_{ij}\right\rangle-2n^*_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)\left\langle\alpha_{ij}\right\rangle_1\right)=k^{*2}_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right) \quad (9)$$

и ассоциированный с ней закон деформирования

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle=k^*_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)\nu_{ij}+2n^*_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)\left\langle\alpha_{ij}\right\rangle_1, \\ \nu_{ij}=\frac{\left\langle\dot{\alpha}_{ij}\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\dot{\alpha}_{kl}\right\rangle\left\langle\dot{\alpha}_{kl}\right\rangle}}. \quad (10)$$

Здесь

$$k^*\left(\langle\alpha\rangle_1\right)=k_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)\frac{\mu^*}{\mu^p}$$

– эффективный начальный предел фазового перехода,

$$n^*=n_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)\frac{k^*\left(\langle\alpha\rangle_1\right)}{k_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)}\times \\ \times\left(\mu_1+n_{+,-}\left(\langle\alpha\rangle_1\right)+\mu_1\frac{\alpha\, c_2\, m_1}{1-\alpha\,[m]\,[c]}\right)-\mu^p c_1$$

– эффективный коэффициент упрочнения, характеризующий скорость перемещения поверхности (9) в шестимерном пространстве макронапряжений.

Структурные средние деформации $\left\langle\alpha_{ij}\right\rangle_1$ необходимо выразить через объемное содержание новой фазы c_1 и величину $\alpha_{\max}$.

Процесс фазового перехода можно разбить на два этапа. На первом этапе происходит интенсивное образование зон новой фазы (зародышей). Этот процесс сопровождается быстрым ростом концентрации зародышей при относительно небольшом уровне структурных деформаций. На втором этапе образование новой фазы происходит в основном за счет объемного роста самих зародышей, внутри которых структурные деформации развиваются до своих максимальных значений. Деление процесса фазового превращения на два этапа достаточно условно, так как на практике оба процесса наблюдаются параллельно с преобладанием одного из них в разных стадиях развития уровней структурных деформаций. С достаточной степенью точности этот процесс может быть описан кинетическим уравнением

$$\frac{d\alpha}{dc_1}=h\alpha^{1-\xi} \quad (0\le\xi\le1). \quad (11)$$

Параметр роста ξ уравнения (11) служит показателем разделения этапов фазового перехода. Решение уравнения (11) с учетом граничных условий $c_1\big|_{\alpha=0}=0$, $c_1\big|_{\alpha=\alpha_{\max}}=1$ дает зависимость роста концентрации новой фазы от уровня структурных деформаций

$$c_1=\left(\frac{\alpha}{\alpha_{\max}}\right)^{\xi}. \quad (12)$$

Соотношение (10) принимает вид

$$\left\langle s_{ij}\right\rangle=\left(k^*_{+,-}+2n^*_{+,-}\left(c_1\right)^{\frac{1}{\xi}}\alpha_{\max}\right)\nu_{ij}. \quad (13)$$

Список литературы

1. Сараев Л.А. Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов / Самара: Изд-во Самар. гос. ун-та. 2000. 182 с.

TO CALCULATION OF EFFECTIVE PROPERTIES SUPERELASTIC UNSTABLE MATRIX MIX

L.A. Sarayev, B.O. Levchenko, Yu.A. Kuznetsov

The mathematical model of superelastic deformation of the unstable matrix mix, considering nonlinear dependence of conditions of direct and return phase transitions on level of structural deformations is presented.

Keywords: mathematical model, nonlinear dependence, superelastic deformation, unstable matrix mix.