МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ЧИСЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

М.В. Долов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

dynamics@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 21.01.2013

Доказано, что для алгебраически неинтегрируемых полиномиальных векторных полей степени выше четырех точная оценка числа неприводимых алгебраических инвариантных кривых не достигается в классе полей, имеющих только линейные частные интегралы.

Ключевые слова: алгебраическая интегрируемость, частные интегралы, алгебраические дифференциальные уравнения, полиномиальные векторные поля, алгебраическая кривая.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y), \qquad (1)$$

где P и Q – взаимно простые полиномы, коэффициенты которых и переменные x, y в общем случае комплексные, $\max(\deg P, \deg Q) = n$.

По определению система (1) алгебраически интегрируема, если все инвариантные множества системы (1) – алгебраические.

Теорема 1 [1]. *Если система* (1) *имеет конечное число* $S(n)$ *различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических инвариантных кривых, то* $S(n) \le (n^2+n+2)/2$, *причем оценка точная для* $n = 2$.

Точность оценки $S(3)$ доказана в [2, 3], при этом установлено, что равенства $S(2) = 4$, $S(3) = 7$ достигаются в классе систем (1) с линейными частными интегралами, коэффициенты которых могут быть комплексными в случае вещественных систем.

Вопрос о точности оценки $S(n) \le \le (n^2+n+2)/2$ при $n \ge 4$ открыт. Для доказательства точности оценки достаточно показать, что при любом конечном $n \ge 4$ существует алгебраически неинтегрируемая система (1) с $(n^2+n+2)/2$ различными неприводимыми алгебраическими инвариантными кривыми. Система (1) алгебраически неинтегрируема, если имеет хотя бы одну трансцендентную инвариантную кривую. Для вещественных систем (1) трансцендентные кривые существуют, если у (1) есть либо состояние покоя типа фокус, либо предельный цикл, в частности, особый предельный цикл.

При исследовании алгебраической неинтегрируемости эффективно могут использоваться первые интегралы Дарбу, в частности, лемма 1 и теорема 1 из [4] и теорема Мироненко [5, с. 40].

Основной результат данной работы содержит

Теорема 2. *Для* $n \ge 5$ *не существует системы* (1) *с взаимно простыми полиномами P и Q с* $n(n+1)/2$ *различными линейными частными интегралами.*

Отсюда следует, что если при $n \ge 5$ оценка для $S(n)$ в теореме 1 точная, то число различных линейных частных интегралов меньше $n(n+1)/2$ и алгебраически неинтегрируемая система (1) допускает не менее двух неприводимых алгебраических частных интегралов степени не менее двух.

Алгебраически интегрируемые системы

Теорема 3. *Для алгебраической интегрируемости системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы система* (1) *допускала общий интеграл*

$$F(x,y) = CG(x,y), \qquad (2)$$

где $F(x,y)$ *и* $G(x,y)$ – *взаимно простые полиномы*, $C \in \mathbf{C}$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть система (1) алгебраически интегрируема. Тогда берем $S = (n^2+n+2)/2$ различных непроводимых над полем комплексных чисел алгебраических частных интегралов $\phi_j(x,y)=0$, $j=\overline{1,S}$. По первой теореме Дарбу [6, с. 288] система (1) допускает первый интеграл Дарбу

$$\Gamma_1=\phi_1^{\beta_1}...\phi_k^{\beta k}=C, \tag{3}$$

где $\beta_j\neq 0$, $\beta_j\in\mathbf{C}$, $1\le k\le S$.

Если с точностью до обозначений β_j/β_1, $j=\overline{1,k}$, есть действительные рациональные числа, то утверждение доказано. В противном случае берем другую совокупность различных неприводимых алгебраических частных интегралов $\varphi_j(x,y)=0$, $j=\overline{1,S}$, причем такую, что среди φ_j нет полинома ϕ_1, содержащегося в Γ_1. Как и в предыдущем случае, согласно первой теореме Дарбу система (1) наряду с (3) имеет первый интеграл Дарбу: $\Gamma_2=\varphi_1^{\alpha_1}...\varphi_r^{\alpha_r}=C$, где $\alpha_j\neq 0$, $\alpha_j\in\mathbf{C}$, $1\le r\le S$. Тогда по лемме [1] система (1) допускает первый интеграл в классе рациональных функций. Необходимость доказана.

Достаточность. Так как в общем интеграле (2) $F(x,y)$ и $G(x,y)$ – полиномы, то всякое инвариантное множество системы (1) – алгебраическое. Теорема доказана.

Считая в общем случае коэффициенты полиномов P и Q и переменные x, y комплексными и используя теорему 3, как и в [5], можно показать, что имеет место

Теорема 4 (Мироненко В.И.). *Если r различных неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых* $R_j(x,y)=0$, $j=\overline{1,r}$, $\deg R_j=m_j$, *инвариантны для системы* (1) *и*

$$\sum_{j=1}^{r}m_j>\frac{1}{24}m(m+1)(m+2)\times \times(8+3(m+3)(n-1)), \tag{4}$$

где $m=\max m_j$, *то система* (1) *алгебраически интегрируема и порядок кривых не выше m*.

По лемме 1 из [4] для алгебраически неинтегрируемых, но интегрируемых по Дарбу систем (1) сумма степеней неприводимых алгебраических инвариантных кривых, определяемых неприводимыми полиномами, не содержащимися в аналитическом выражении интеграла Дарбу, не более $n-1$. Отсюда и из первой теоремы Дарбу и из теоремы 1 [4] следует

Теорема 5. *Если для алгебраически неинтегрируемой системы* (1) *оценка S*(*n*) *в теореме* 1 *точная, то система* (1) *имеет первый интеграл Дарбу* (3), *в котором* $\frac{n^2-n+4}{2}\le k\le\frac{n^2+n+2}{2}$, *величины* $\beta_j\neq 0$ *и такие, что при любом* ν *из* $\{1,2,\dots,k\}$ *среди чисел* β_j/β_ν *для* $1\le j\le k$ *есть хотя бы одно отличное от вещественного рационального.*

Примером к теореме 5 является алгебраически неинтегрируемая система [4]: $\dot{x}=x+xy+y^2$, $\dot{y}=y-xy+x^2+2y^2$, допускающая первый интеграл Дарбу $(y-x+1)(x+iy)^{-i/2}(x-iy)^{i/2}=C$ и частные интегралы $\phi_1=y-x+1=0$, $\phi_2=x+iy=0$, $\phi_3=x-iy=0$, $\phi_4=y-x=0$.

Доказательство теоремы 2

Лемма. *Если дифференциальное уравнение* $Q(x,y)dx-P(x,y)dy=0$, *где P и Q – полиномы*, $\max(\deg P, \deg Q)=n\ge 2$, *допускает общий интеграл* (2), *где F*(*x*,*y*) *и G*(*x*,*y*) *– линейные функции, то P и Q имеют общий делитель, тождественно не равный постоянной.*

Доказательство аналогично [3, с. 29]. Однопараметрическое семейство кривых (2) при $D(F,G)/D(x,y)\neq 0$ является общим решением уравнения $(x+\beta)\,dy-(y+\alpha)\,dx=0$, где $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$, а при $D(F,G)/D(x,y)=0$ – уравнения $dy=\gamma\,dx$, где $\gamma\in\mathbf{C}$, получающихся исключением параметра C из (2) и из результата дифференцирования (2) по x в предположении, что $y=y(x)$. Так как (2) является общим решением одного из найденных уравнений и уравнения $Q(x,y)dx-P(x,y)dy=0$, то полиномы P и Q не могут быть взаимно простыми, ибо $(x+\beta)Q\equiv(y+\alpha)P$ либо $Q\equiv\gamma P$ соответственно. Лемма доказана.

Эта лемма и теорема 4 существенно используются при доказательстве теоремы 2.

Допустим существование систем (1) с взаимно простыми P и Q и с $n(n+1)/2$ различными линейными частными интегралами. Полагая в (4) $m_j=m=1$, $r=n(n+1)/2$, получим неравенство $n^2-5n+2>0$, выполняющееся при $n\ge 5$. Отсюда и из теоремы 4 следует, что при $n\ge 5$ и наличии $n(n+1)/2$ линейных частных интегралов система (1) алгебраически интегрируема и имеет общий интеграл (2), где $F(x,y)$ и $G(x,y)$ – линейные функции. Согласно лемме, у полиномов P и Q есть общий делитель, тождественно не равный постоянной. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы 2.

В монографии [7, гл. 2, § 3] содержится

Теорема 6 (Худай-Веренов М.Г.). *Если система* (1) *при* $n\ge 3$ *имеет* $n(n+3)/2$ *линейных частных интегралов* $a_jx+b_jy+c_j=0$, *то все интегралы алгебраические.*

Замечание. **1**. При наличии $n(n+3)/2$ любых различных неприводимых алгебраических инвариантных кривых система (1) алгебраически интегрируема в силу теоремы 1.

2. По теореме 2 для взаимно простых полиномов P и Q при $n \geq 5$ не существует систем (1) с $n(n+3)/2$ линейными частными интегралами.

3. Для $n = 3$ максимальное число различных линейных частных интегралов (в том числе с комплексными коэффициентами) системы (1) равно 8 [8, 9]. Поэтому при $n = 3$ нет систем (1) с девятью линейными частными интегралами.

4. Для $n = 4$ с точностью до линейного обратимого преобразования найдены системы (1), допускающие 11 линейных частных интегралов. Все эти системы алгебраически интегрируемы.

Список литературы

1. Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 838–839.

2. Долов М.В., Бубнова И.В. Системы с линейными частными интегралами // Изв. РАЕН. Дифференц. уравнения. 2006. № 11. С. 79–80.

3. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Ч. I. Метод. пособие. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. 37 с.

4. Долов М.В., Косарев В.В. Интегралы Дарбу и аналитическая структура решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 4. С. 697–700.

5. Мироненко В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Минск: Изд-во БГУ. 103 с.

6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II. 1936. М.–Л. 563 с.

7. Худай-Веренов М.Г. О функциях, определяемых дифференциальными уравнениями. Ашхабад: Ылым, 1990.

8. Долов М.В., Павлюк Ю.В. К вопросу об алгебраической интегрируемости полиномиальных векторных полей // Тр. СВМО. 2004. Т. 6. № 1. С. 40–50.

9. Долов М.В., Чистякова С.А. О числе линейных интегралов кубической системы с вырожденной бесконечностью // Тр. СВМО. 2007. Т. 9. № 2. С. 62–74.

ON AN ACCURATE ESTIMATE OF THE NUMBER OF ALGEBRAIC CURVES OF ALGEBRAICALLY NONINTEGRABLE POLYNOMIAL VECTOR FIELDS

M.V. Dolov

It is proved that for algebraically nonintegrable polynomial vector fields of a degree greater than 4 an accurate estimate of irreducible algebraic invariant curves is not achieved in the class of fields having only linear particular integrals.

Keywords: algebraic integrability, particular integrals, algebraic differential equations, polynomial vector fields, algebraic curve.