УДК 517.988+517.977.8

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СХОДИМОСТИ В БАНАХОВЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.В. Чернов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

chavnn@mail.ru

Поступила в редакцию 30.01.2013

Доказываются некоторые утверждения о сходимости в банаховых идеальных пространствах измеримых функций, востребованные при исследовании дифференциальных свойств функционалов, определенных на решениях управляемых функционально-операторных уравнений, а также при оценке остаточных членов в формулах приращений таких функционалов, обосновании сходимости численных методов оптимального управления и т.д.

Ключевые слова: банахово идеальное пространство измеримых функций, сходимость.

Введение

Данная работа обобщает и развивает одно вспомогательное утверждение о сходимости в банаховом идеальном пространстве (БИП) измеримых функций, установленное ранее в [1, лемма 3.2] (далее оно сформулировано как лемма 1.1). Статья [1] была посвящена обоснованию сходимости метода условного градиента в применении к оптимизации распределенных систем. Подход [1] был основан на редукции управляемых распределенных систем к некоторому функционально-операторному уравнению в БИП. Остановимся на этом более подробно.

Пусть $n,m,\ell,s\in\mathsf{N}$ – заданные числа, $\Pi\subset\mathsf{R}^n$ – измеримое (в смысле Лебега) ограниченное множество, X, Y, U – некоторые БИП функций, измеримых на множестве Π; $\mathsf{X}\subset\mathsf{Z}$, $\mathsf{U}\subset\mathsf{Z}$; $\mathsf{D}\subset\mathsf{U}^s$ – выпуклое множество, $A:\mathsf{Z}^m\to\mathsf{X}^\ell$ – заданный линейный ограниченный оператор (ЛОО). Функционально-операторное уравнение, о котором шла речь, – это уравнение вида

$$x(t)=\theta(t)+A[f(.,x(.),u(.))](t),\quad t\in\Pi,\quad x\in\mathsf{X}^\ell. \tag{1}$$

Здесь $u\in\mathsf{D}$ – управление, $\theta\in\mathsf{X}^\ell$ – заданный элемент, $f(t,y,u):\Pi\times\mathsf{R}^\ell\times\mathsf{R}^s\to\mathsf{R}^m$ – заданная функция, непрерывно дифференцируемая по переменным $y\in\mathsf{R}^\ell$, $u\in\mathsf{R}^s$ и вместе с производными измеримая по $t\in\Pi$ и непрерывная по $\{y;u\}\in\mathsf{R}^\ell\times\mathsf{R}^s$ и такая, что:

F) для всех $y\in\mathsf{X}^\ell$, $u\in\mathsf{U}^s$ суперпозиция $f(.,y,u)$ принадлежит пространству Z^m.

Как показывают примеры [1–4], уравнение (1) является естественной формой описания широкого класса управляемых начально-краевых задач (НКЗ), связанных с полулинейными эволюционными уравнениями. В случае, когда установлена однозначная глобальная разрешимость уравнения (1) для всех $u\in\mathsf{D}$, имеет смысл рассматривать целевой функционал J как функционал, зависящий только от управления $J[u]=\mathsf{F}[x_u,u]$, где $u\in\mathsf{D}$ – управление, а $x_u\in\mathsf{X}^\ell$ – отвечающее ему (единственное) решение уравнения (1). Здесь $\mathsf{F}:\mathsf{X}^\ell\times\mathsf{D}\to\mathsf{R}$ – заданный функционал, удовлетворяющий некоторым естественным требованиям. Именно для такого случая в статье [1] на основе упомянутого утверждения [1, лемма 3.2] о сходимости в БИП доказана дифференцируемость целевого функционала по любому возможному направлению для множества в D, выведена формула производной. Эти результаты как раз и позволили получить достаточные условия сходимости метода условного градиента в задаче оптимизации уравнения (1).

Отметим, что, вообще говоря, производную функционала можно понимать и в совершенно ином смысле, а именно, как производную функции многих переменных, полученной из целевого функционала путем конечномерной аппроксимации управления. Именно такой подход применялся в работе [5] для решения задач оптимального управления сосредоточенными системами со свободным временем. При выводе условий, при которых упомянутая функция будет непрерывно дифференцируемой, как раз и понадобились утверждения о сходимости в БИП, доказываемые далее. Думается, что указанные утверждения представляют также и самостоятельный интерес.

1. Формулировка основных результатов

Пусть $S = S(\Pi)$ – множество всех измеримых функций на множестве $\Pi \subset \mathrm{R}^n$. Напомним, что банахово пространство $E \subset S$ измеримых функций называется БИП, если из того, что $y \in E$, $x \in S$, $|x(t)| \leq |y(t)|$ для п.в. $t \in \Pi$, следует, что $x \in E$, $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. БИП $Z = Z(\Pi)$ называется БИП с порядково непрерывной нормой [6, п. 4.3.2], если из того, что последовательность $\{z_n\} \subset Z$ для п.в. $t \in \Pi$ монотонно стремится к нулю, следует, что $\|z_n\|_Z \to 0$.

Частным случаем БИП с порядково непрерывной нормой являются лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1;\infty)$. Вообще, лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1;\infty]$ являются частным случаем БИП.

Теорема 1.1. *Пусть* $X_i = X_i(\Pi)$, $i = \overline{1,\ell}$, *– БИП,* $Z = Z(\Pi)$ *– БИП с порядково непрерывной нормой;* $X = X_1 \times \ldots \times X_\ell$; $V = [\alpha;\beta] \subset \mathrm{R}^s$, $V_\infty = \{u \in L_\infty^s(\Pi) : u(t) \in V\}$. *Предположим, кроме того, что задана функция* $g(t,y,v) : \Pi \times \mathrm{R}^\ell \times \mathrm{R}^s \to \mathrm{R}$, *измеримая по* $t \in \Pi$, *непрерывная по* $\{y;v\} \in \mathrm{R}^\ell \times \mathrm{R}^s$ *и такая, что*

$\mathbf{G}_1$) *для всех* $x \in X$, $u \in V_\infty$ *суперпозиция* $g(.,x,u) \in Z$;

$\mathbf{G}_2$) *для всех* $x \in X$ *и некоторого* $\bar{v} \in V$ *имеем* $g(.,x,\bar{v}) \equiv 0$.

Тогда для всех $x \in X$ *норма* $\|g(.,x,v)\|_Z \to 0$ *при* $v \to \bar{v}$, $v \in V$.

Далее мы обобщаем следующее утверждение [1, лемма 3.2].

Лемма 1.1. *Пусть* $X = X(\Pi)$, $U = U(\Pi)$ *— БИП,* $Z = Z(\Pi)$ *— БИП с порядково непрерывной нормой,* $s,\ell,m \in \mathrm{N}$ *— заданные числа, а функция* $g(t,x,v) : \Pi \times \mathrm{R}^\ell \times \mathrm{R}^s \to \mathrm{R}^m$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $\{x;v\}$, *причем* $g(t,0,v) \equiv 0$, *и, кроме того,* $g(.,y(.),u(.)) \in Z^m$ *для всех* $y \in X^\ell$, $u \in U^s$; $y_* \in X_+$, $u_* \in U_+$ *– заданные функции;*

$$D_\lambda = \{y \in X^\ell : |y(t)| \leq \lambda y_*(t)\}$$

при $\lambda \geq 0$; $D = \{u \in U^s : |u(t)| \leq u_*(t)\}$. *Тогда существует функция* $\nu(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to +0$, *такая, что справедлива оценка:*

$$\sup_{y \in D_\lambda, u \in D} \|g(.,y(.),u(.))\|_Z \leq \nu(\lambda).$$

Теорема 1.2. *Пусть* $X = X(\Pi)$, $U = U(\Pi)$ *– БИП,* $Z = Z(\Pi)$ *– БИП с порядково непрерывной нормой; функция* $g(t,x,v) : \Pi \times \mathrm{R}^\ell \times \mathrm{R}^s \to \mathrm{R}^m$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $\{x;v\} \in \mathrm{R}^\ell \times \mathrm{R}^s$, *причем* $g(t,0,v) \equiv 0$, *и кроме того,* $g(.,y(.),u(.)) \in Z^m$ *для всех* $y \in X^\ell$, $u \in U^s$,

$$D_\lambda = \{y \in X^\ell : |y(t)| \leq G[a(.,\lambda)](t), |y(t)| \leq b(t)\},$$

где $b \in X^+$, $G : U \to X$ *– положительный ЛОО, а функция* $a(.,\lambda) \in U^+$ *не возрастает по* $\lambda \in [0;1]$, *причем* $\|a(.,\lambda)\|_U \leq \mu(\lambda)$, *где* $\mu(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to +0$; $D = \{u \in U^s : |u(t)| \leq c(t)\}$, $c \in U^+$. *Тогда существует функция* $\nu(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to +0$, *такая, что справедлива оценка:*

$$\sup_{y \in D_\lambda, u \in D} \|g(.,y(.),u(.))\|_Z \leq \nu(\lambda).$$

2. Доказательство основных результатов

Прежде всего, приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть* $S(\Pi)$ *– пространство измеримых п.в. конечных функций на* Π, $l \in \mathrm{N}$, $a(.), b(.) \in S^l(\Pi)$ *– измеримые на* Π l*-вектор-функции,* $a(t) \leq b(t)$ *для п.в.* $t \in \Pi$, *а функция* $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathrm{R}^l \to \mathrm{R}$ *измерима по* $t \in \Pi$ *и непрерывна по* $y \in \mathrm{R}^l$. *Тогда функция*

$$\varphi(t) \equiv \max_{y \in [a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$$

измерима на Π *и существует* $\theta(.) \in M[a;b] \equiv \{y \in S^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)]\}$, *такая, что для п.в.* $t \in \Pi$ *справедливо равенство:* $\Phi(t,\theta(t)) = \varphi(t)$.

Доказательство леммы 2.1 следует, например, непосредственно из [7, предложение Д1.2, с. 326, и теорема Д1.4, с. 327].

Лемма 2.2. *Пусть* $X = X(\Pi)$ *– БИП с порядково непрерывной нормой, и, кроме того,* $\{x_k\} \subset X$, $\varphi \in X$, *и для п.в.* $t \in \Pi$ $x_k(t) \to 0$ *при* $k \to \infty$, $|x_k(t)| \leq \varphi(t)$. *Тогда* $\|x_k\|_X \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Лемма 2.2 доказана в [2, лемма 4.1]. Для лебеговых пространств это известный факт (теорема Лебега о сходимости).

Доказательство теоремы 1.1. Выберем произвольно элемент $x \in X$, а также последовательность векторов $v[k] \subset V$, $v[k] \to \bar{v}$ при $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность функций $z_k(.) = | g(.,x,v[k]) |$. Из условий Каратеодори относительно функции g следует, что $z_k(t) \to 0$ при $k \to \infty$ для п.в. $t \in \Pi$. По лемме 2.1 существует измеримая вектор-функция $\omega \in V_\infty$, такая, что

$$0 \le z_k(t) \le \max_{v \in V} | g(t,x(t),v) | =$$
$$= | g(t,x(t),\omega(t)) | \equiv \varphi(t), \quad t \in \Pi.$$

При этом, согласно предположению $\mathbf{G}_1$), $\varphi \in Z$. Тогда, пользуясь леммой 2.2, заключаем, что $\|z_k\|_Z \to 0$ при $k \to \infty$. В силу произвольности выбора последовательности $v[k]$ и определения предела функции по Гейне получаем, что функция $\psi(v) = \|g(.,x,v)\|_Z \to 0$ при $v \to \bar{v}$, $v \in V$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

1. Зафиксируем произвольно $u(.) \in D$. Заметим, что для всех $y \in D_\lambda$, $\lambda \in [0;1]$, имеем: $| g(.,y(.),u(.)) | \le \psi(.,\lambda)$, где

$$\psi(t,\lambda) = \max\{ | g(t,x,v) | : \ | x | \le G[a(.,\lambda)](t),$$
$$| x | \le b(t), \ \ | v | \le c(t) \},$$
$$\psi(t,\lambda) \le \Psi(t) = \max\{ | g(t,x,v) | :$$
$$| x | \le b(t), \ \ | v | \le c(t) \}.$$

При этом согласно лемме 2.1 функция $\psi(.,\lambda)$ измерима при всех $\lambda \in [0;1]$, а функция $\Psi(t)$ измерима, и, более того, существуют измеримые функции $\hat{y}(t)$, $\hat{u}(t)$, такие, что
$| \hat{y}(t) | \le b(t), \ \ | \hat{u}(t) | \le c(t), \ \ \Psi(t) = | g(t,\hat{y}(t),\hat{u}(t)) |$.
Отсюда понятно, что $\Psi(.) \in Z$, а следовательно, и $\psi(.,\lambda) \in Z$ при каждом $\lambda \in [0;1]$ в силу идеальности пространства Z. Таким образом, для всех $\lambda \in [0;1]$ имеет смысл норма $\|\psi(.,\lambda)\|_Z \equiv \nu(\lambda)$.

2. Заметим, что для п.в. $t \in \Pi$ функция $\psi(t,\lambda)$ не возрастает при убывании $\lambda \in [0;1]$, так как множество, по которому берется максимум, сужается в силу монотонности функции $a(t,\lambda)$ по $\lambda \in [0;1]$ и положительности ЛОО G. Тогда в силу идеальности пространства Z функция $\nu(\lambda)$ тоже, в свою очередь, не возрастает при убывании λ и, очевидно, ограничена снизу: $\nu(\lambda) \ge 0$. В таком случае, как известно, существует предел $\lim\limits_{\lambda \to +0} \nu(\lambda) = \nu_0 \ge 0$.

3. Установим далее, что $\nu_0 = 0$. Для этого достаточно построить последовательность $\lambda_k \to +0$ (монотонно), такую, что $\nu(\lambda_k) \to 0$. Выберем для начала произвольную последовательность $\lambda_k \to +0$ (монотонно), а затем уже выделим из нее подпоследовательность, обладающую указанным свойством. Заметим, что $\|G[a(.,\lambda)]\| \le \|G\| \times \|a(.,\lambda)\|_U \le \|G\| \cdot \mu(\lambda) \to +0$ при $\lambda \to +0$.

В таком случае, определяя последовательность $z_k(t) = G[a(.,\lambda_k)](t)$, получаем, что $\|z_k\|_X \to 0$. Тогда по теореме о регуляторе сходимости в БИП (см., например, [6, лемма IV.3.2, с. 138]) найдутся подпоследовательность $k_r \to +\infty$, функция $z \in X_+$ и числовая последовательность $\beta_r \to 0$ (монотонно), такие, что $| z_{k_r}(t) | \le \beta_r \cdot z(t)$ для п.в. $t \in \Pi$. Стало быть, справедлива оценка

$$\psi(t,\lambda_{k_r}) \le \max\{ | g(t,x,v) | :$$
$$| x | \le \beta_r z(t), \ \ | v | \le c(t) \} \equiv \bar{\psi}_r(t),$$
$$\bar{\psi}_r(t) \le \bar{\Psi}(t) = \max\{ | g(t,x,v) | :$$
$$| x | \le \beta_1 z(t), \ \ | v | \le c(t) \}.$$

Аналогично п. 1 нетрудно показать, что $\bar{\psi}_r(.) \in Z$. Осталось проверить, что $\|\bar{\psi}_r\|_Z \equiv \equiv \bar{\gamma}_r \to 0$ при $r \to \infty$.

4. Не ограничивая общности рассуждений, можем считать далее, что $\beta_1 \le 1$, $z(t) = b(t)$ и, соответственно, $\bar{\Psi}(t) = \Psi(t)$. Выберем любую последовательность $\gamma_\tau \to 0$ (монотонно) при $\tau \to \infty$. Согласно теореме Скорца–Драгони (см., например, [8, VIII.1]), найдется последовательность компактов $Q_\tau^1 \subset \Pi$, таких, что $\operatorname{mes}(\Pi \setminus Q_\tau^1) < \gamma_\tau$ и на множестве $Q_\tau^1 \times \mathrm{R}^\ell \times \mathrm{R}^s$ функция $g(t,x,v)$ непрерывна. Аналогичным образом по теореме Н.Н. Лузина найдется последовательность компактов $Q_\tau^2 \subset \Pi$: $\operatorname{mes}(\Pi \setminus Q_\tau^2) < \gamma_\tau$, и на множестве Q_τ^2 функции $b(t)$ и $c(t)$ непрерывны (это пересечение компактов, отвечающих каждой из этих двух функций). Далее обозначим $Q_\tau = Q_\tau^1 \cap Q_\tau^2$, $\Pi_\tau = \bigcup\limits_{j=1}^{\tau} Q_j$. Тогда $\operatorname{mes}(\Pi \setminus \Pi_\tau) < \ < 2\gamma_\tau$. При этом $\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \ldots \subset \Pi_\tau \subset \ldots \subset \Pi$. Тогда последовательность характеристических функций $\chi_{\Pi \setminus \Pi_\tau}(t) \to 0$ монотонно при $\tau \to \infty$, а сле-

довательно, и $\chi_{\Pi\setminus\Pi_\tau}(t)\Psi(t)\to 0$ монотонно при $\tau\to\infty$ для п.в. $t\in\Pi$. Поэтому в силу порядковой непрерывности нормы пространства Z последовательность $\psi_\tau \equiv \left\|\chi_{\Pi\setminus\Pi_\tau}\Psi\right\|_Z \to 0$ при $\tau\to\infty$. Тогда, фиксируя произвольно $\varepsilon>0$, получаем, что существует $\tau_\varepsilon\in\mathrm{N}$, такое, что $0\le\psi_\tau<\varepsilon/2$ для всех $\tau\ge\tau_\varepsilon$. Рассмотрим компакт $H_\varepsilon=\Pi_{\tau_\varepsilon}$. По построению функции $b(t)$ и $c(t)$ непрерывны на этом компакте, а следовательно, по теореме Вейерштрасса существуют

$$\max_{t\in H_\varepsilon} b(t)\equiv b_\varepsilon,\quad \max_{t\in H_\varepsilon} c(t)\equiv c_\varepsilon,$$

и по обозначению $b_\varepsilon+c_\varepsilon=a_\varepsilon$.

При этом на множестве $H_\varepsilon\times\mathrm{R}^\ell\times\mathrm{R}^s$ функция $g(t,x,v)$ непрерывна, а следовательно, согласно теореме Кантора равномерно непрерывна на компакте $H_\varepsilon\times[-a_\varepsilon;a_\varepsilon]^{\ell\times s}$. Но в таком случае существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для всех $t\in H_\varepsilon$, $x\in[-a_\varepsilon;a_\varepsilon]^\ell$, $v\in[-a_\varepsilon;a_\varepsilon]^s$ выполняется неравенство

$$|\,g(t,x,v)-g(t,0,v)\,|=|\,g(t,x,v)\,|<\frac{\varepsilon}{2\|1\|_Z}$$

при условии, что $|\,x\,|<\delta$.

Заметим, что согласно лемме 2.1 для каждого $r\in\mathrm{N}$ найдутся измеримые функции $x_r(t)$ и $u_r(t)$, такие, что

$$|\,x_r(t)\,|\le\beta_r b(t),\quad |\,u_r(t)\,|\le c(t),$$

$$\overline{\psi}_r(t)=|\,g(t,x_r(t),u_r(t))\,|,\quad t\in\Pi.$$

В частности, для $t\in H_\varepsilon$

$$x_r(t)\in[-a_\varepsilon;a_\varepsilon]^\ell,\quad |\,x_r(t)\,|\le\beta_r a_\varepsilon,$$

$$u_r(t)\in[-a_\varepsilon;a_\varepsilon]^s.$$

Поскольку $\beta_r\to+0$ при $r\to\infty$, то найдется номер $r_\varepsilon\in\mathrm{N}$: $\beta_r a_\varepsilon<\delta(\varepsilon)$ для всех $r\ge r_\varepsilon$, а стало быть, $0\le\overline{\psi}_r(t)<\dfrac{\varepsilon}{2\|1\|_Z}$ для всех $t\in H_\varepsilon$, $r\ge r_\varepsilon$. Таким образом,

$$\overline{\gamma}_r\le\left\|\chi_{H_\varepsilon}\overline{\psi}_r(.)\right\|_Z+\left\|\chi_{\Pi\setminus H_\varepsilon}\overline{\psi}_r(.)\right\|_Z\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2\|1\|_Z}\|1\|_Z+\left\|\chi_{\Pi\setminus H_\varepsilon}\Psi\right\|_Z=\frac{\varepsilon}{2}+\psi_{\tau_\varepsilon},$$

откуда $\overline{\gamma}_r<\varepsilon$ для всех $r\ge r_\varepsilon$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках гос. задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными вузами (шифр заявки 1.1907.2011).

Список литературы

1. Чернов А.В. О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1616–1629.

2. Чернов А.В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107.

3. Чернов А.В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.

4. Чернов А.В. О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1400–1414.

5. Чернов А.В. О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 6(1). С. 107–114.

6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

7. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.

8. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.

ON SOME PROPERTIES OF CONVERGENCE IN BANACH IDEAL SPACES

A.V. Chernov

Some statements are proved on convergence in Banach ideal spaces of measurable functions that are required in the study of differential properties of functionals defined on the solutions of controlled functional operator equations, as well as in estimating remainders in increment formulas for such functionals, in justifying the convergence of numerical methods for optimal control, etc.

Keywords: Banach ideal space of measurable functions, convergence.