МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.5+519.86+330.35:330.42

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА ПО СХЕМЕ «LEARNING-BY-DOING». I

Ю.А. Кузнецов, Т.С. Гребенкина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Yu-Kuzn@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 21.12.2012

Дается краткое описание концепции человеческого капитала и исследований математических моделей теории экономического роста, учитывающих процесс накопления человеческого капитала по схеме «learning-by-doing». Строится общая математическая модель экономического роста, обобщающая ряд подобных моделей включая классическую модель К. Эрроу. Для обобщенной модели экономического роста описаны постановки традиционных оптимизационных задач (социального планировщика и о равновесном конкурентном развитии экономики). Сформулирована общая задача, охватывающая основные постановки задачи об оптимальном развитии экономики.

Ключевые слова: экономический рост, физический капитал, человеческий капитал, механизмы формирования человеческого капитала, формирование человеческого капитала в процессе деятельности, оптимальное развитие экономики.

Введение

Хорошо известно, что к числу основных *стилизованных фактов* (*stylized facts*) современного экономического роста (то есть тенденций и закономерностей, типичных для современной *экономической динамики*) относится и следующий факт: в обеспечении высоких темпов экономического роста важную роль играют как *научно-технологический прогресс*, так и *образование и уровень квалификации рабочей силы* (см. подробнее [1–3]). Впрочем, роль уровня квалификации рабочей силы отмечалась ещё классиками экономической теории (А. Смит, Ж.Б. Сэй, Дж.С. Милль, Л. Вальрас, А. Пигу и др.; подробнее см., например, [4]). В явном виде концепция человеческого капитала была введена в экономическую науку только в 60-х годах XX столетия в работах Дж. Минцера, Т. Шульца, Г. Беккера и М. Блауга. На раннем этапе развития теории экономического роста традиционно рассматривались лишь такие экономические факторы, как *физический капитал* и *трудовые ресурсы* (а фактически – *численность* вовлеченных в производство работников).

В настоящее время человеческий капитал рассматривается как существенный *фактор экономического роста*. *Человеческий капитал* может быть охарактеризован как совокупность накопленных профессиональных *знаний, умений и навыков*, получаемых в процессе образования и повышения квалификации, которые впоследствии могут приносить доход – в виде заработной платы, процента или прибыли. Его передача может быть осуществлена с помощью (относительно длительного) процесса *обучения и практик*, призванных транслировать специфические знания и демонстрировать процедуры выработки новых навыков. Человеческий капитал носит отчетливо выраженный *индивидуальный* характер и *изначально* он воплощен в *отдельной* человеческой личности, а совокупный запас человеческого капитала в том или ином сообществе равен сумме запасов всех входящих в него индивидуумов.

Иногда в состав человеческого капитала включают не только личностные свойства человека, но и *социальный капитал*, воплощенный в отношениях между людьми. Основоположники теории человеческого капитала, в целом позитивно воспринявшие и поддержавшие концепцию социального капитала, тем не менее, никогда не смешивали эти два понятия. Различия и несводимость одного капитала к другому явным образом отмечены, например, в следующем высказывании Дж.С. Коулмена: «если физический капитал вполне осязаем, будучи воплощенным в наблюдаемой материальной форме, то человеческий капитал менее осязаем, поскольку он воплощен в навыки и знания, приобретенные индивидуумом; социальный капитал еще менее осязаем, поскольку он существует в *отношениях* между людьми» [5, p. S100]. *Социальный капитал* – это совокупность реальных или потенциальных ресурсов, связанных с установлением и поддержанием доверительных (*trust*) и взаимно обязывающих (*reciprocity*) связей с другими экономическими агентами из данного сообщества и приносящих членам этого сообщества экономическую выгоду; другими словами, социальный капитал – это ресурс, определяющийся инвестициями в социальные отношения и приносящий экономическими агентами из данного сообщества отдачу на рынке. Социальный капитал может быть охарактеризован также как совокупность неформальных социальных отношений, позволяющих развиваться *отношениям кооперации* среди экономических агентов (*actors*), имеющих своей целью возрастающий общественный продукт, который, как ожидается, будет нарастать (*accrue*) для той группы людей, которые включены (*embedded*) в эти социальные отношения (Bourdieu P., 1980; Coleman J.S., 1988; Burt R.S., 1992; Putnam R.D., 1993; Erickson B., 1995; Portes A., 1998; Радаев В.В., 2002, и др.).

Роль социального капитала в производственном процессе определяется тем, что производительный потенциал человеческого капитала опирается на знания и опыт людей и используется, в частности, для решения проблем, возникающих в ходе выполнения запланированной работы. Значительная часть времени, затрачиваемого на решение возникающих проблем, обычно тратится на взаимодействие людей друг с другом. Именно поэтому наряду с человеческим капиталом социальный капитал также является одним из важных факторов производства и, в принципе, также должен учитываться в математических моделях теории экономического роста.

В современной теории экономического роста человеческий капитал рассматривается как важный фактор экономического роста и развития, а механизм его производства и накопления – как существенная часть *эндогенных математических моделей экономического роста*. Начиная с работ классиков рассматриваются различные пути (механизмы) формирования и накопления человеческого капитала. Важнейшие концепции, описывающие влияние человеческого капитала и научно-технологического прогресса (НТП) на динамику экономических систем, восходят к работам К. Эрроу, П. Ромера, Х. Узава и Р. Лукаса (подробнее см., например, [1, 3, 6, 7]). По-видимому, впервые концепция человеческого капитала была включена в модель экономического роста в известной (и теперь уже считающейся классической) статье К. Эрроу [8]. В его модели рост технического знания был «непреднамеренным» (то есть *побочным*, *by-product*) последствием опыта создания новых средств производства, а механизм накопления человеческого капитала включает в себя обучение работников без отрыва от производства. Точнее, имеется в виду *обучение в процессе работы*, или *обучение на собственном опыте* (*«learning-by-doing»*). Подчеркнем, что процесс *обучения* («learning») в процессе работы, вообще говоря, не следует рассматривать как *индивидуальный* «информационно-методический» процесс; скорее это *социальный* или *организационный* процесс. Другой механизм накопления человеческого капитала описан в общетеоретическом плане Г. Беккером и связан с повышением квалификации работников путем их обучения «с отрывом от производства». Впервые эта концепция накопления человеческого капитала была включена в неоклассическую модель экономического роста в известной (и тоже считающейся классической) работе Р. Лукаса [9]. Подробнее об этой модели и её обобщениях см., например, в работах [3, 6, 7, 10, 11].

Опишем кратко основные «экспериментальные факты», лежащие в основе математических моделей экономического роста с учетом накопления человеческого капитала по схеме «learning-by-doing». В их основе лежит хорошо известный и многократно подтвержденный многочисленными эмпирическими исследованиями эффект увеличения производительности труда отдельных работников и фирмы в целом по мере роста выпуска «однотипной продукции» в «почти постоянных» (в организационном и технологическом смысле) условиях. В работе [8] приводятся сведения о росте производительности труда при производстве самолетов определенного «фиксированного» типа. Например, оказывается, что производительность труда при изготовлении корпуса самолёта № N (считая их от начала производства) оказывается примерно пропорциональной величине $N^{1/3}$. В экономической литературе такого рода явления принято обозначать термином *эффект Хорндаля* (*Horndal effect*) [12, 13]. Графическое представление соответствующих зависимостей (скажем, уровня производительности труда «репрезентативного» работника (или обратной ей величины) от количества произведенных фирмой единиц техники) принято называть *кривыми обучения* (освоения) – *learning curve* (см., например, рис. 1). Очень много данных на эту тему докумен-

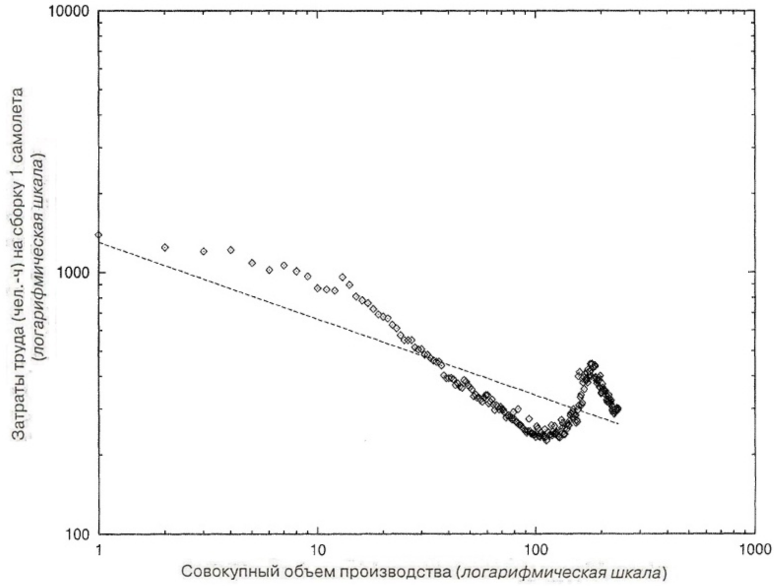

Рис. 1. Кривая обучения при производстве самолетов Локхид L-1011 TriStar [15]

тально зафиксировано в авиационной промышленности, особенно военной. В литературе имеются и другие, также очень многочисленные, примеры подобных закономерностей (см., например, [14, 15]). Быть может, самый ранний пример эффекта «learning-by-doing» – это описанное в работах [12, 13] производство на текстильной фабрике Lawrence Mill № 2 в период 1834–1855 годов, где наблюдалось увеличение производительности труда в среднем на 2% в год в течение приблизительно двадцати лет несмотря на отсутствие инвестиций в новую технику.

В модели К. Эрроу речь в первую очередь идет о реализации *внутреннего эффекта*, создающегося непосредственно в процессе производства человеческого капитала; он заключается в прямом влиянии этого человеческого капитала на эффективность производства. В качестве характеристики человеческого капитала (его «эквивалентного» *proxy*) *в данной модели* выступает *производительность труда работников*, рост которой определяется повышением *квалификации работников* в результате их обучения в процессе работы. Ясно, однако, что наряду с этим может иметься также и *внешний эффект* процесса «learning-by-doing», когда на производство на данной фирме оказывается положительное влияние роста «среднего» по экономике уровня человеческого капитала, обусловленного данным эффектом.

Модель К. Эрроу экономического роста с учетом накопления человеческого капитала исследовалась и обобщалась в многочисленных работах. Значительный интерес к этой концепции проявляется и в современной научной литературе (подробнее см., например, [3, 6, 7]). В работе [16], опубликованной приблизительно через полгода после работы К. Эрроу [8] и в значительной степени оставшейся незамеченной вплоть до самого недавнего времени, также были предложены оригинальные эндогенные модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала (достаточно подробный их анализ имеется, например, в работах [17–19]). Модели Франкеля, во многом аналогичные модели К. Эрроу [8], по сути, предвосхитили и появившиеся около двадцати лет спустя модели П. Ромера (см. [20, 21]), хотя, как отмечается в [19], в свое время по существу и не оказали никакого влияния на теорию экономического роста. Отметим здесь также работы [14, 22–26].

Важнейшие математические модели экономического роста, связанные с понятием человеческого капитала, в действительности в той или иной мере отождествляют человеческий капитал с той его гранью, которая характеризует (в широком смысле) *эффективность* труда экономического агента или даже (более узко) его *производительность* труда.

В первой части настоящей работы строится общая математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала по схеме «learning-by-doing», обобщающая ряд подобных моделей включая и классическую модель К. Эрроу. Для обобщенной модели экономического роста описываются основные постановки традиционных оптимизационных задач (социального планировщика и о равновесном конкурентном развитии экономики). Сформулирована общая задача, охватывающая основные постановки задачи об оптимальном развитии экономики.

Общая математическая модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала в процессе работы («learning-by-doing)

Охарактеризуем понятие *производительность труда* и попутно введем некоторые определения и обозначения. Производственная функция (ПФ), по определению, описывает величину выпуска (вычисляемого за определенный и фиксированный период времени) как функцию используемых экономических факторов. Наряду с важнейшими «стандартными» экономическими факторами – используемым в производстве физическим капиталом K и трудовыми ресурсами L – производственная функция *в действительности* зависит от множества остальных («неучтенных» явно) экономических факторов. Следовательно, в действительности *многофакторную* производственную функцию следует записывать в виде $Y = G(U, K, L)$, где Y – выпуск, а U – «неучтенные» переменные. Практически очень часто используется некоторая стандартная (и инвариантная относительно «остальных» экономических факторов) форма зависимости производственной функции от переменных K и L, в которой разделены «классические» экономические факторы (ЭФ) и «все остальные» ЭФ. Часто производственную функцию $Y = G(U, K, L)$ записывают в *мультипликативном* виде

$$Y = G(U, K, L) = A(U)F(K, L), \qquad (1)$$

где функция $F(K, L)$ является положительно однородной функцией в области $K, L > 0$, то есть для любого вещественного $\lambda > 0$ имеет место соотношение $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$[1], а $A(U)$ – некоторый множитель, зависящий от всех «неучтенных» переменных и осуществляющий сдвиг изоквант выпуска ПФ при изменении переменных U. Величину $A(U)$ в формуле (1), отражающую зависимость выпуска от «остальных» экономических факторов, называют *совокупной факторной производительностью* (*СФП*) (*Total Factor Productivity*, *TFP*) [27, p. 330]. Представление (1) производственной функции формально очень сходно с описанием изменений неоклассической ПФ, обусловленных научно-технологическим прогрессом (НТП), нейтральным в смысле Хикса (см., например, [3, § 1.3]). Считается, что интерпретация изменения СФП как меры технологических изменений восходит к работам [28, 29].

Впрочем, как указывается, например, в [30], отмеченное выше формальное сходство представления (1) с описанием НТП, нейтрального в смысле Хикса, не должно вводить в заблуждение, и «правильная» интерпретация СФП не может целиком связываться с технологическими изменениями – такое возможно только при некоторых «идеальных» условиях. В действительности все определяющие СФП переменные и параметры «перемешаны», и они не могут быть «классифицированы» в рамках данной концепции. Как отмечается в [30, p. 458; 27, p. 330], величина совокупной факторной производительности TFP является, в сущности, остатком, измеряющим *степень невежества или степень незнания* (*measure of our ignorance*) переменных U – в том смысле, что изменения выпуска, обусловленные данными переменными, *не* могут быть объяснены на основе данных о наблюдаемых (измеряемых) переменных K и L.

В простейшем случае $L = N$, где N – общая численность работников, *производительность труда* (*labour productivity*) есть, по определению, величина выпуска на одного работающего (*per capita*), то есть

$$y = \frac{Y}{N} = \frac{A(U)F(K, N)}{N} =$$
$$= A(U)F(\frac{K}{N}, 1) \equiv A(U)f(k),$$

$k = K/N$, где k – капиталовооруженность работника.

Заметим, что фактически одной из «входных переменных» производственной функции *всегда* является уровень управления (менеджмента). В действительности он также воплощен в уровне производительности труда, хотя практически никогда явно не учитывается и не измеряется[2]. Впрочем, роль уровня управления (менеджмента) в обеспечении высокой производительности труда известна очень давно (см., например, [27, p. 336]).

Опишем вид производственной функции (при этом подразумевается, что все фигурирующие ниже переменные относятся к некоторому моменту времени t). В рассматриваемой ниже постановке задачи трудовые ресурсы L удобно трактовать в некотором обобщенном смысле – не как общую численность работников, занятых производственной деятельностью, а как некоторые «эффективные трудовые ресурсы», определяющиеся как численностью работников, так и эффективностью («производительностью») их труда. Эта эффективность носит «индивидуальный характер» и может быть описана величиной l – эффективностью труда «репрезентативного экономического агента», так что эффективные трудовые ресурсы L представляются в виде $L = lN$, где N – численность занятых производственной деятельностью работников. Тогда если K – физический капитал, то величина выпуска Y запишется в виде $Y = AF(K,L) \equiv AF(K,lN)$, где двухфакторная ПФ $F(K,L) \in \mathbf{CRS}$, A – совокупная факторная производительность.

В рамках рассмотрения эффекта «learning-by-doing» следует считать, что величины l и A изменяются из-за наличия двух процессов: роста индивидуального производственно-технического опыта работников, непосредственно занятых в производстве, и накопления как опыта менеджеров, так и таких качеств коллектива работников, как слаженность, взаимозаменяемость, взаимопонимание и т.д. Если первый носит индивидуальный характер и непосредственно влияет на уровень человеческого капитала коллектива работников $H(t)$, то второй может трактоваться как организационный и социальный аспект производственной деятельности. Заметим, что подобная трактовка эффекта «learning-by-doing» в настоящее время достаточно популярна (см., например, [31, 32]).

Подобный опыт работников и менеджеров имеет своим источником определенный тип производства – так сказать, «крупносерийного» производства, когда производственный процесс включает в себя многократное повторение некоторой совокупности определенных (и фактически почти одних и тех же) технологических действий – «многократную репетицию»; поэтому каждая новая произведенная единица выпускаемой продукции «добавляет» и к навыкам работника, и к навыкам менеджера. Как уже отмечалось выше, это явление принято обозначать термином *эффект Хорндаля* (*Horndal effect*) [12–14].

Предположим, далее, что эффективность труда «репрезентативного экономического агента» l и совокупная факторная производительность A (обе формируемые в рамках эффекта «learning-by-doing») определяются соответственно соотношениями $l = l_0 g^{\chi_l}$ и $A = A_0 g^{\chi_A}$, где χ_l, χ_A – положительные постоянные, характеризующие процесс обучения в ходе деятельности работников и менеджеров. Приведенные зависимости являются, по существу, *кривыми обучения* (*learning curve*) работников и менеджеров. Здесь g – некоторый индекс («*learning index*»), характеризующий как рост индивидуальной эффективности труда работников, так и организационных и социальных аспектов производственной деятельности.

Следуя традиции, заложенной в работе [9, p. 18], выделим в явном виде «внутренний» и «внешний» эффекты процесса «learning-by-doing». *Внутренний эффект* процесса «learning-by-doing» определяет рост *индивидуальной* эффективности труда «репрезентативного экономического агента»; *внешний эффект* связан с организационными и социальными аспектами производственной деятельности, на которые не могут повлиять *индивидуальные* решения «репрезентативного экономического агента» о накоплении своего человеческого капитала. Внешний эффект процесса «learning-by-doing» определяется средним (по экономической системе) уровнем индекса («*average level of learning index*») g_a.

Поскольку речь идет о поведении «репрезентативного экономического агента», то, в принципе, должно быть справедливо равенство $g = g_a$. Однако удобно (как и в работе [9]) сохранить «двойные обозначения» для более четкого разделения внутренних и внешних эффектов процесса «learning-by-doing». В результате получаем, что величина выпуска Y запишется в виде $Y = A_0 g_a^{\chi_A} F(K, l_0 g^{\chi_l} N)$. Ограничимся рассмотрением простейшего (и вместе с тем – одного из важнейших) случая, когда $F(K,L)$ является функцией типа Кобба–Дугласа, то есть имеет вид $F(K,L) = K^{\beta} L^{1-\beta}$, $\beta \in (0,1)$. Тогда величина выпуска Y запишется как $Y = A_0 l_0^{1-\beta} g_a^{\chi_A} g^{(1-\beta)\chi_l} K^{\beta} N^{1-\beta} \equiv A g_a^{\chi_A} g^{(1-\beta)\chi_l} K^{\beta} N^{1-\beta}$, где $A = A_0 l_0^{1-\beta}$. Для удельного (*per capita*) выпуска $y = Y/N$ соответственно получим

$$y = A g_a^{\chi_A} g^{(1-\beta)\chi_l} k^{\beta}, \qquad k = K/N, \tag{2}$$

где k – капиталовооруженность работника.

Предполагается, что выпуск Y «тратится» на инвестиции в капитал (накопление) I и потребление $C = cN$, где c – «душевое» (*per capita*) потребление, так что $Y = I + C$. Тогда динамика накопления капитала будет задаваться следующим обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt} = I(t) - \mu_K K(t) =$$
$$= Y(t) - c(t)N(t) - \mu_K K(t),$$
$$K(0) \equiv K(t)\big|_{t=+0} = K_0 > 0, \tag{3}$$

где μ_K – коэффициент выведения физического капитала (*depreciation rate*).

Характеристикой опыта может служить некоторый индекс («*learning index*»), описывающий величину дисконтированного кумулятивного объема материальных потоков, «прошедших» («освоенных») за предыдущий период в производственном секторе, например, величина вида $G(t)=\varphi\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu_G(t-s)}M(s)ds$, где $M(t)$ – характеристика потока материальных объектов деятельности рабочей силы в момент времени t, а постоянная μ_G характеризует влияние «прошлых освоенных» материальных потоков на текущее значение индекса. Ясно, что индекс $G(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dG(t)}{dt}=\varphi M(t)-\mu_G G(t),$$

$$G(t)\big|_{t=+0}=\varphi\int_{-\infty}^{0} e^{\mu_G s}M(s)ds\equiv G_0>0. \qquad (4)$$

В соответствии с традицией, восходящей к работам [8, 16, 20, 21] (см. также [33]), в качестве величины потока материальных объектов $M(t)$ используется величина потока инвестиций в физический капитал $I(t)=Y(t)-C(t)$; вполне аналогичную роль может играть и величина ВВП (полного выпуска $Y(t)$) (см., например, работы [22, 34, 35]). Наконец, в работе [36] предпочтение отдается несколько иной характеристике – в качестве $M(t)$ используется «чистый» поток инвестиций $I_{net}(t)=Y(t)-$ $-C(t)-\mu_K K(t)$.

Для того чтобы охватить все подобные трактовки объема освоенных материальных потоков, будем использовать в качестве $M(t)$ обобщенную характеристику – величину $M(t)=Y(t)-\Sigma C(t)-\gamma K(t)$. Ясно, что перечисленные выше варианты трактовки величины $M(t)$ отвечают приведенным ниже вариантам выбора параметров $\Sigma,\ \gamma$.

I. $\Sigma=1,\ \ \gamma=0$ (Arrow K.J.–Frankel M.–Romer P.M. – Greiner A.).

II. $\Sigma=0,\ \ \gamma=0$ (Shell K.–Christiaans T.–Tsur Y., Zemel A.).

III. $\Sigma=1,\ \ \gamma=\mu_K$ (Göcke M.).

Ниже иногда будет удобно обозначать тот или иной вариант общей задачи соответствующей римской цифрой. Наряду с $M(t)$ и $G(t)$ целесообразно рассматривать соответствующие удельные (*per capita*) величины $m(t)=\dfrac{M(t)}{N(t)}$ и $g(t)=\dfrac{G(t)}{N(t)}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} g(t)&=\varphi\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu_G(t-s)}m(s)\frac{N(s)}{N(t)}ds= \\ &=\varphi\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu_g(t-s)}m(s)ds, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $\mu_g\equiv\mu_G+n$, n – темп роста населения, $m(t)=y(t)-\Sigma c(t)-\gamma k(t)$ и использовано равенство $N(t)=N_0e^{nt}$.

Заметим, что такое определение индекса g сродни понятию «*development modifier*», введенному в работе [16] (см. также [14]).

Переходя в соотношениях (3), (4) к удельным величинам – капиталовооруженности $k=K/N$ и удельному уровню «индекса человеческого капитала» («*learning index*») $g=G/N$ (см. (5)) и учитывая (2), получаем, что динамика рассматриваемой экономической системы описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dk(t)}{dt}&=Ag_a(t)^{\chi_A}g(t)^{(1-\beta)\chi_l}k(t)^{\beta}- \\ &-c(t)-\mu_k k(t), \end{aligned} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt}&=\varphi[Ag_a(t)^{\chi_A}g(t)^{(1-\beta)\chi_l}k(t)^{\beta}- \\ &-\Sigma c(t)-\gamma k(t)]-\mu_g g(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

с начальными условиями

$$k(t)\big|_{t=+0}=k_0>0,\ g(t)\big|_{t=+0}=g_0>0. \qquad (8)$$

Управляющим параметром в данной задаче служит выбираемый «репрезентативным экономическим агентом» уровень душевого потребления, а целью его управления является максимизация суммарной дисконтированной полезности на бесконечном горизонте планирования:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\rho t}\left(\frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)dt\to\max, \qquad (9)$$

где $c(t)$ – уровень потребления, ρ – параметр дисконтирования, $\sigma>0$, причем $1/\sigma$ – эластичность межвременного замещения потребления.

При этом должно быть выполнено равенство $g(t)=g_a(t),\ \forall t\geq 0$. Традиционно, по крайней мере, со времен работы [9], рассматриваются два основных (и различных в экономическом смысле) варианта «расшифровки» этого последнего условия, которые приводят к двум различным типам оптимальных траекторий.

В первом варианте предполагается, что существует некоторый гипотетический «социальный планировщик» («*social planner*»), выбирающий (с точки зрения интересов всего общества в целом) *оптимальный путь* или *оптимальную траекторию* («*optimal path*») экономической системы, «изначально» располагающий полной информацией о её развитии и, в принципе, способный воздействовать на все её составные части. Поэтому, решая сформулированную выше оптимизационную проблему, социальный планировщик может сразу же положить всюду в математической модели (6)–(9) $g(t)=g_a(t),\ \forall t\ge 0$.

Оптимизационную проблему, сформулированную в таком ключе, уместно называть «*задачей социального планировщика*».

Во втором (несколько более замысловатом) варианте «расшифровки» указанного условия рассматривается такая ситуация, когда «репрезентативный экономический агент», не располагающий полной информацией, ожидает, что накопление среднего по экономике уровня навыков будет следовать в каждый момент времени функции $g_a(t),\ \forall t\ge 0$, которую следует рассматривать как экзогенно заданную при решении сформулированной выше оптимизационной проблемы (6)–(9). Если «окажется», что $g(t)=g_a(t),\ \forall t\ge 0$, то есть *ожидаемое* и *реальное* (*фактическое*) поведение совпали, то можно говорить о том, что экономическая система находится в «*равновесии*», или, точнее, в «*конкурентном равновесии*» («*equilibrium*», «*competitive equilibrium*»).

Оптимизационную проблему, переформулированную в таком «более замысловатом» ключе, уместно называть в дальнейшем «*задачей о конкурентном равновесии*».

При этом, также следуя работе Р. Лукаса [9], в обоих вариантах данной оптимизационной проблемы в первую очередь рассматривается проблема существования «сбалансированных траекторий роста» («*Balanced Growth Path*», *BGP – траектория*).

Общая оптимизационная задача

Целесообразно исследовать вопрос о существовании сбалансированных оптимальных траекторий в модели экономического роста с учетом накопления человеческого капитала по схеме «learning-by-doing» (6)–(9) в некотором «унифицированном» виде, позволяющем с единых позиций рассмотреть обе постановки задачи – и «задачу планировщика», и «задачу о конкурентном равновесии».

С этой целью сначала сформулируем точные постановки обеих задач, а затем получим для каждой из них необходимые условия оптимальности. Это позволит, с одной стороны, увидеть, к чему сводятся различия в обеих задачах, а с другой – естественным образом сформулировать некоторую «обобщенную» проблему, включающую в себя (при частных значениях параметров) обе рассматриваемые задачи.

При изложении этих результатов мы будем использовать некоторые методические усовершенствования [3], основанные на использованных в работе [37] приемах «модернизированного» изложения классической модели Лукаса [9], послуживших основой для рассмотрения и обсуждения эффекта «неопределенности» в модели Лукаса.

<u>*Задача о конкурентном равновесии*</u>. Как следует из самой формулировки данной задачи, *на первом этапе* ее решения функция $g_a(t),\ \forall t\ge 0$, считается экзогенно заданной. В этих условиях «репрезентативный экономический агент» и решает оптимизационную проблему (6)–(9). Формально, полученные при её анализе необходимые условия оптимальности и уравнения (6), (7) определяют траекторию системы $\{k(t),g(t)\},\ \forall t\in[0,\infty)$, и соответствующее управление $c(t)$. Однако поскольку *на втором этапе* «должно оказаться», что имеет место равенство $g(t)=g_a(t),\ \forall t\in[0,\infty)$ (*по предположению*, экономическая система находится в конкурентном равновесии!), то, следовательно, на этом этапе «репрезентативный экономический агент» должен «учесть» упомянутое равенство в явном виде во всех соотношениях, полученных на первом этапе решения оптимизационной проблемы (6)–(9), и только затем приступать к построению искомого решения.

Приведем, опуская детали, основные моменты исследования оптимизационной задачи (6)–(9) (случай задачи о конкурентном равновесии).

Первый этап. Функция Гамильтона–Понтрягина записывается в виде

$$H(k,g,\psi_0,\psi_k,\psi_g,c,t)=\psi_0 e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)+ \qquad (10)$$
$$+\psi_k\left\{Ak^{\beta}g_a^{\chi_A}g^{\chi_l(1-\beta)}-c-\mu_k k\right\}+$$
$$+\psi_g\left\{\varphi\left[Ak^{\beta}g_a^{\chi_A}g^{\chi_l(1-\beta)}-\Sigma c-\gamma k\right]-\mu_g g\right\}.$$

Считая задачу «невырожденной» ($\psi_0\equiv 1$), с помощью замены переменных $\psi_j(t)=e^{-\rho t}\theta_j(t)$, $j=k,g$, переходим от (10) к «текущему» гамильтониану

$$\hat{H}(k,g,\psi_0,\psi_k,\psi_g,c)=\left(\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)+ \qquad (11)$$
$$+\theta_k\left\{Ak^{\beta}g_a^{\chi_A}g^{\chi_l(1-\beta)}-c-\mu_k k\right\}+$$
$$+\theta_g\left\{\varphi\left[Ak^{\beta}g_a^{\chi_A}g^{\chi_l(1-\beta)}-\Sigma c-\gamma k\right]-\mu_g g\right\}.$$

Оптимальное распределение должно максимизировать «текущий» гамильтониан (11) в каждый момент времени t. При этом «теневые» цены $\theta_j(t)$, $j=k,g$, должны удовлетворять сопряженной системе

$$\frac{d\theta_k}{dt} = (\rho + \mu_k)\theta_k + \varphi\gamma\theta_g - \\ -(\theta_k + \varphi\theta_g)\beta A k^{\beta-1} g_a^{\chi_A} g^{\chi_l(1-\beta)}, \quad (12)$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = (\rho + \mu_g)\theta_g - (\theta_k + \varphi\theta_g)\times \\ \times[\chi_l(1-\beta)]A k^{\beta} g_a^{\chi_A} g^{\chi_l(1-\beta)-1}. \quad (13)$$

Следуя принятой в теории экономического роста традиции, ограничимся рассмотрением «внутреннего» решения задачи (так что для управления выполнено соотношение $c(t) > 0$, $\forall t \in [0,\infty)$). Тогда необходимые условия экстремума текущего гамильтониана могут быть выражены в виде уравнения $\hat{H}'_c(k, g, \psi_0, \psi_k, \psi_g) = 0$.

Эти условия, очевидно, принимают вид

$$c^{-\sigma} = \theta_k + \varphi\Sigma\theta_g. \quad (14)$$

Кроме того, должны удовлетворяться условия трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_k(t)k(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_g(t)g(t) = 0. \quad (15)$$

Второй этап. На этом этапе в явном виде используется равенство $g(t) = g_a(t)$, $\forall t \in [0,\infty)$, в результате чего полученная выше система (12), (13) записывается в виде

$$\frac{d\theta_k}{dt} = (\rho + \mu_k)\theta_k + \varphi\gamma\theta_g - \\ -(\theta_k + \varphi\theta_g)\beta A k^{\beta-1} g^{\chi}, \quad (16)$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = (\rho + \mu_g)\theta_g - \\ -(\theta_k + \varphi\theta_g)[\chi_l(1-\beta)]A k^{\beta} g^{\chi-1}, \quad (17)$$

где $\chi \equiv \chi_A + \chi_l(1-\beta)$. Условия (14), (15) сохраняют свой вид.

Кроме того, система (6), (7) принимает вид

$$\frac{dk}{dt} = A g^{\chi} k^{\beta} - c(t) - \mu_k k(t), \quad (18)$$

$$\frac{dg}{dt} = \varphi[A g^{\chi} k^{\beta} - \Sigma c(t) - \gamma k(t)] - \mu_g g(t). \quad (19)$$

Начальные условия (8) сохраняют свой вид.

Таким образом, для определения оптимальной «равновесной» траектории «репрезентативный экономический агент» должен использовать уравнения движения (18), (19), уравнения для сопряженных переменных («теневых цен») (16), (17), необходимые условия экстремума (14) и условия трансверсальности (15), а также начальные условия (8).

<u>*Задача планировщика*</u>. Из формулировки этой задачи следует, что в уравнениях (6)–(9) имеет место равенство $g(t) = g_a(t)$, $\forall t \in [0,\infty)$, так что они «изначально» принимают вид (18), (19) и дополняются начальными условиями (8); таким образом, уравнения динамики накопления капиталов в обеих задачах совпадают.

Функция Гамильтона–Понтрягина записывается в виде

$$H(k, g, \psi_0, \psi_k, \psi_g, c, t) = \psi_0 e^{-\rho t}\left(\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right) + \\ + \psi_k\left\{A k^{\beta} g^{\chi} - c - \mu_k k\right\} + \\ + \psi_g\left\{\varphi\left[A k^{\beta} g^{\chi} - \Sigma c - \gamma k\right] - \mu_g g\right\}. \quad (20)$$

Как и в предыдущем случае, считая задачу невырожденной, с помощью замены переменных $\psi_j(t) = e^{-\rho t}\theta_j(t)$, $j = k, g$, переходим от (20) к текущему гамильтониану

$$\hat{H}(k, g, \psi_0, \psi_k, \psi_g, c) = \left(\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right) + \\ + \theta_k\left\{A k^{\beta} g^{\chi} - c - \mu_k k\right\} + \\ + \theta_g\left\{\varphi\left[A k^{\beta} g^{\chi} - \Sigma c - \gamma k\right] - \mu_g g\right\}. \quad (21)$$

Уравнения для сопряженных переменных («теневых цен») принимают вид

$$\frac{d\theta_k}{dt} = (\rho + \mu_k)\theta_k + \varphi\gamma\theta_g - \\ -(\theta_k + \varphi\theta_g)\beta A k^{\beta-1} g^{\chi}, \quad (22)$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = (\rho + \mu_g)\theta_g - (\theta_k + \varphi\theta_g)\chi A k^{\beta} g^{\chi-1}, \quad (23)$$

где, как и выше, $\chi \equiv \chi_A + \chi_l(1-\beta)$. Необходимые условия экстремума и условия трансверсальности сохраняют свой вид (см. (14), (15)).

Таким образом, для определения оптимальной траектории планировщик должен использовать уравнения движения (18), (19), уравнения для сопряженных переменных (22), (23), необходимые условия экстремума (14) и условия трансверсальности (15).

Сопоставляя в этих двух задачах соответственно уравнения движения, уравнения для сопряженных переменных, необходимые условия экстремума и условия трансверсальности, нетрудно заметить, что единственное отличие имеется в уравнениях для теневых цен человеческого капитала (уравнения (17) и (23)). Поэтому можно сформулировать некоторую обобщенную проблему об определении оптимальных траекторий в модели экономического развития с учетом накопления человеческого капитала, включающую в себя большую часть уравнений из обеих моделей в неизменном виде.

<u>*Общая оптимизационная задача*</u>. Уравнения движения:

$$\frac{dk}{dt} = A g^{\chi} k^{\beta} - c(t) - \mu_k k(t), \quad (24)$$

$$\frac{dg}{dt} = \varphi[A g^{\chi} k^{\beta} - \Sigma c(t) - \gamma k(t)] - \mu_g g(t). \quad (25)$$

Сопряженные уравнения и необходимые условия экстремума:

$$\frac{d\theta_k}{dt} = (\rho + \mu_k)\theta_k + \varphi\gamma\theta_g - (\theta_k + \varphi\theta_g)\beta A k^{\beta-1} g^{\chi}, \tag{26}$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = (\rho + \mu_g)\theta_g - (\theta_k + \varphi\theta_g)(\chi - \varepsilon) A k^{\beta} g^{\chi-1}, \tag{27}$$

$$c^{-\sigma} = \theta_k + \varphi\Sigma\theta_g. \tag{28}$$

Кроме того, должны удовлетворяться условия трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_k(t)k(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\theta_g(t)g(t) = 0. \tag{29}$$

Система уравнений (24)–(27) дополняется также начальными условиями

$$k(t)\big|_{t=+0} = k_0 > 0, \; g(t)\big|_{t=+0} = g_0 > 0. \tag{30}$$

Ясно, что из соотношений (24)–(30) при $\varepsilon = \chi_A$ получается задача о конкурентном равновесии, а при $\varepsilon = 0$ – задача социального планировщика.

Заметим, что, в принципе, возможно рассмотрение целого семейства задач вида (24)–(30) при произвольном $\varepsilon \in [0, \chi]$, в частности, при $\varepsilon = \chi$. Фактически именно такой предельный случай, дополненный к тому же условием $\theta_g(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0, \infty)$, рассматривается в работе [33]. В содержательном же плане такая постановка отвечает задаче о конкурентном равновесии, в которой «репрезентативный экономический агент», не располагающий вообще никакой информацией о росте запаса человеческого капитала (уровня навыков) и не предпринимающий попыток хоть как-то оценить его вклад в динамику экономического роста, тем не менее, ожидает, что его выбор уровня потребления с целью максимизации критерия качества (9) приведет его в *конкурентное равновесие* (так что будет выполнено равенство $g(t) = g_a(t)$, $\forall t \geq 0$). Поэтому, на деле решая задачу на оптимум функционала (9), он использует *односекторную* модель экономики, в которой запас человеческого капитала (уровень навыков) считается экзогенно заданным. Поведение такого «репрезентативного экономического агента» можно рассматривать как «недальновидное» или «непредусмотрительное».

Тем не менее, такая постановка задачи в содержательном плане по-своему поучительна, и именно с неё целесообразно начать исследование общей проблемы (24)–(30). Кроме того, такая «упрощенная» задача о «недальновидном экономическом агенте» в математическом плане не заметно проще общей проблемы (24)–(30) и допускает достаточно детальное аналитическое исследование. Изучению этой задачи посвящается следующая часть настоящей работы.

Примечания

1. Это свойство обычно трактуется как *отсутствие эффекта масштаба* (*constant return to scale, CRS*). Часто говорят, что положительно однородные производственные функции принадлежат классу **CRS** ($F(K, L) \in \mathbf{CRS}$).

2. «Management is an unmeasured input in most production functions, and hence is embodied in the productivity measure» [27, p. 339, 336].

Список литературы

1. Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2nd Edition. Cambridge, Massachusetts–London, England: MIT Press, 2004. 654 p.
2. Шараев Ю.В. Теория экономического роста. М.: Издательство ГУ ВШЭ, 2006. 254 с.
3. Кузнецов Ю.А. Оптимальное управление экономическими системами. Н. Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2008. 449 с.
4. Автономов В., Ананьина О., Макашева Н. (Ред.) История экономических учений: Учебное пособие. М.:ИНФРА-М, 2007. 784 с.
5. Coleman J.S. Social Capital in the Creation of Human Capital // American Journal of Sociology. Vol. 94. Supplement. Organizations and Institutions: Sociological and Economic Approaches to the Analysis of Social Structure. 1988. P. 95–120.
6. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. I. 2011. № 17(224). С. 50– 61; II. 2011. № 18(225). С. 42–57.
7. Кузнецов Ю.А. Человеческий капитал, производительность труда и экономический рост // Экономический анализ: теория и практика. I. 2012. № 43 (298). С. 2–17; II. 2012. № 44(299). С. 2–14.
8. Arrow K.J. The Economic Implications of Learning by Doing // Review of Economic Studies. 1962. V. 29. № 1. P. 155–173.
9. Lucas R.E., Jr. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. 1988. V. 22. № 1. P. 3–42.
10. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. I. 2010. № 1. С. 168–175; II. 2010. № 2. С. 158–165. III. 2010. № 3(1). С. 177–190.
11. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 4. С. 46–57.

12. David P.A. The «Horndal effect» in Lowell, 1834–1856: A short-run learning curve for integrated cotton textile mills // Explorations in Economic History. 1973. V. 10. № 2. P. 131–150.

13. Lazonick W., Brush T. The «Horndal Effect» in early U.S. manufacturing // Explorations in Economic History. 1985. V. 22. № 1. P. 53–96.

14. Lucas R.E., Jr. Making a miracle // Econometrica. 1993. V. 61. № 2. P. 25–272.

15. Benkard C.L. Learning and Forgetting: The Dynamics of Aircraft Production // American Economic Review. 2000. V. 90. № 4. P. 1034–1054.

16. Frankel M. The production function in allocation and growth: a synthesis // American Economic Review. 1962. V. 52. № 5. P. 996–1022.

17. Cesaratto S. Saving and economic growth in neoclassical theory // Cambridge Journal of Economics. 1999. V. 23. № 6. P. 771–793.

18. Cesaratto S. Endogenous Growth Theory Twenty Years on: A Critical Assessment // Bulletin of Political Economy. 2010. V. 4. № 1. P. 1–30.

19. Cannon E. Economies of scale and constant returns to capital: a neglected early contribution to the theory of economic growth // American Economic Review. 2000. V. 90. № 1. P. 292–295.

20. Romer P.M. Increasing returns and long-run growth // Journal of Political Economy. 1986. V. 94. № 5. P. 1002–1037.

21. Romer P.M. Endogenous Technological Change // Journal of Political Economy, 1990. V. 98. № 5. P. 71–102.

22. Shell K. Toward A Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation // American Economic Review. 1966. V. 56. № 1–2. P. 62–68.

23. Jones C.I. Time Series Tests of Endogenous Growth Models // The Quarterly Journal of Economics. 1995. V. 110. № 2. P. 495–525.

24. Solow R.M. Learning from «Learning by doing»: Lesson for Economic Growth. Stanford (California): Stanford University Press, 1997. 94 p.

25. Eicher T., Turnovsky S.J. Convergence in Two-Sector Nonscale Growth Model // Journal of Economic Growth. 1999. V. 4. № 4. P. 413–428.

26. Eicher T., Turnovsky S.J. Transition Dynamics in a Two-Sector Nonscale Growth Model // Journal of Economic Dynamics and Control. 2001. V. 25. № 1–2. P. 85–113.

27. Syverson C. What Determines Productivity? // Journal of Economic Literature. 2011. V. 49. № 2. P. 326–365.

28. Solow R.M. A contribution to the theory of economic growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. V. 70. № 1. P. 65–94.

29. Solow R. Technical change and the aggregate production function // Review of Economics and Statistics. 1957. V. 39. № 3. P. 312–320.

30. Carlaw K.I., Lipsey R.G. Productivity, Technology and Economic Growth: What is The Relationship? // Journal of Economic Surveys. 2003. V. 17. № 3. P. 457–495.

31. Fioretti G. The organizational learning curve // European Journal of Operational Research. 2007. V. 177. № 3. P. 1375–1384.

32. Huberman B.A. The dynamics of organizational learning // Computational and Mathematical Organization Theory. 2001. V. 7. № 2. P. 145–153.

33. Greiner A. On the dynamics of an endogenous growth model with learning by doing // Economic Theory. 2003. V. 21. № 2. P. 205–214.

34. Christiaans T. Neoklassische Wachstumstheorie. Darstellung, Kritik und Erweiterung. Norderstedt: Books on Demand GmbH, 2004. 356 p.

35. Tsur Y., Zemel A. On the Dynamics of Knowledge-Based Economic Growth // Journal of Optimization Theory and Applications. 2007. V. 135. № 1. P. 101–115.

36. Göcke M. Learning-By-Doing Und Endogenes Wachstum. Heidelberg: Springer, Physica-Verlag, Wirtschaftswissenschaftliche Beiträge Nr. 180. 2000. 224 p.

37. Benhabib J., Perli R. Uniqueness and Indeterminacy: On the Dynamics of Endogenous Growth // Journal of Economic Theory. 1994. V. 63. № 1. P. 113–142.

ECONOMIC GROWTH MODEL WITH CONSIDERATION FOR HUMAN CAPITAL ACCUMULATION THROUGH LEARNING-BY-DOING. I.

Yu.A. Kuznetsov, T.S. Grebenkina

A brief description is given of the concept of human capital and the mathematical models of the theory of economic growth, taking into account human capital accumulation through learning-by-doing. A generalized mathematical model of economic growth constructed on the basis of a number of similar models, including K. Arrow's classical model, is put forward. For this generalized model, traditional problem settings (the social planner and competitive equilibrium) are described. A general optimal problem covering the main traditional problem settings is formulated.

Keywords: economic growth, physical capital, human capital, human capital formation mechanisms, human capital formation through learning-by-doing, optimal development of an economy.