

УДК 681.51+519.711

**СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ,
ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ СТАБИЛИЗАЦИЮ СИСТЕМ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ФАЗОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ**

© 2013 г.

А.А. Федюков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

TeleginSasha@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.12.2012

Рассматривается задача стабилизации с помощью регулятора по измеряемому выходу динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные. Показано, что решение задачи в случае поиска регулятора пониженного порядка сводится к поиску двух взаимно-обратных матриц, удовлетворяющих матричным неравенствам. Предложен алгоритм поиска этих матриц и показаны условия его сходимости. Построена модель перевернутого маятника на тележке и решены задачи стабилизации по измеряемому выходу полного и пониженного порядков в случае наличия ограничений на фазовые переменные объекта.

Ключевые слова: стабилизация, управление, линейные матричные неравенства.

Введение

В классической задаче стабилизации предполагают, что состояние динамической системы полностью известно, и управление строят в виде обратной связи по состоянию. Однако у реальных физических объектов и в реальных ситуациях полная информация о состоянии системы недоступна измерению, а известна лишь часть фазовых переменных или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации динамических объектов по измеряемому выходу. Существуют разные способы построения динамических регуляторов, в частности, способ с применением линейных матричных неравенств.

Известно [1], что поиск параметров регулятора сводится к задаче разрешимости системы матричных неравенств. Для случая поиска регулятора полного порядка эта задача принадлежит классу задач выпуклого программирования, и в настоящее время разработаны эффективные алгоритмы [1–4], которые позволяют с применением современных программ (например, программ для инженерных расчетов MATLAB) получить параметры регулятора.

Хотя существующие алгоритмы позволяют решать задачу стабилизации линейного объекта, возможна ситуация, что полученное с помощью этих алгоритмов решение физически не может быть реализовано. Это наводит на мысль, что должно быть наложено некоторое ограничение на фазовые переменные. За необходимость введения ограничений на фазовые переменные объекта говорит и то, что синтез линейных за-

конов управления на основе линейной математической модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства.

В данной работе предложен подход к синтезу закона управления, который обеспечивает стабилизацию механического объекта с фазовыми ограничениями при неполном измерении фазового состояния системы. Этот подход основан на применении аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования таких регуляторов. В качестве примера рассмотрена задача стабилизации перевернутого маятника на тележке при наличии ограничений на угол отклонения звена и на смещение тележки.

1. Постановка задачи стабилизации по выходу при фазовых ограничениях

Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$y = Cx, \quad z_0 = C_0x, \quad z_i = C_i x, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^S$ – управление, $y \in R^l$ – измеряемый выход системы, z_0 – управляемый выход, z_i – выходы, определяющие фазовые ограничения.

Требуется построить динамический регулятор вида

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r + B_r y, \\ u = C_r x_r + D_r y, \end{cases} \quad (2)$$

где $x_r \in R^k$ – состояние регулятора ($k \leq n$), $x_r(0) = 0$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (2) со степенью устойчивости, не меньшей β ($\beta > 0$), при котором для траекторий системы достигается минимальное значение $\gamma_0 > 0$, такое, что

$$\max_{t \geq 0} |z_0(t)| \leq \gamma_0,$$

а также удовлетворяются фазовые ограничения

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

2. Представление задачи в терминах линейных матричных неравенств

Представим уравнение замкнутой системы (1), (2) в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c, \quad A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$z_i = \bar{C}_i x_c, \quad \bar{C}_i = (C_i \quad 0), \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$, а начальные условия $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Введем область $E = \{x_c : x_c^T X x_c \leq 1\}$, ограниченную эллипсоидом $x_c^T X x_c = 1$, вписанным в область фазового пространства, заданную неравенствами $|z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m$. Пусть $V(x_c) = x_c^T(t) X x_c(t)$ – квадратичная функция Ляпунова с матрицей $X = X^T > 0$ системы (3), такая, что по любой траектории системы выполнено неравенство

$$\dot{V}(x_c) < -2\beta V. \quad (4)$$

Тогда матрица A_c замкнутой системы (3) является асимптотически устойчивой со степенью устойчивости, не меньшей β , и все траектории этой системы, выходящие из множества E , удовлетворяют фазовым ограничениям $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m$.

Введем матрицу $Y = X^{-1}$. Тогда на любой траектории системы (3) условие (4) эквивалентно следующему матричному неравенству:

$$A_c Y + Y A_c^T + 2\beta Y < 0, \quad Y > 0.$$

Обобщим результаты, полученные в [3]. Область в фазовом пространстве, полученную объединением всех множеств E , отвечающих всевозможным функциям Ляпунова вида (4), можно выделить, в терминах линейных матричных неравенств, следующим образом.

Утверждение 1. Если начальное состояние $x_c(0)$ и матрица $Y = Y^T > 0$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} Y & x_c(0) \\ x_c^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$A_c Y + Y A_c^T + 2\beta Y < 0, \quad (5)$$

$$\text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

то все траектории системы (3) с начальными условиями $x_c(0) \in E$ удовлетворяют фазовым ограничениям $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 0, 1, \dots, m$.

Здесь «trace» обозначает след матрицы.

Доказательство. Из первого неравенства (5) по лемме Шура следует, что $x_c^T(0) Y^{-1} x_c(0) \leq 1$ и $x_c(0) x_c^T(0) \leq Y$. Второе неравенство (5) означает, что $V(x) = x_c^T(t) Y^{-1} x_c(t)$ – квадратичная функция Ляпунова системы (3). Значит, для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $x_c^T(t) Y^{-1} x_c(t) \leq 1$. Применяя лемму Шура, получим, что $x_c(t) x_c^T(t) \leq Y$. Следовательно,

$$|z_i(t)|^2 = \text{trace}(\bar{C}_i x_c(t) x_c^T(t) \bar{C}_i^T) \leq \text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Отсюда с учетом третьего неравенства (5) следует справедливость **Утверждения 1**.

Введя параметры регулятора

$$\theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}, \quad (6)$$

представим матрицу замкнутой системы (3) в виде

$$A_c = A_0 + B_0 \theta C_0,$$

$$\text{где } A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь символ « I » обозначает единичную матрицу размера $(k \times k)$.

Второе неравенство (5) можно переписать в виде матричного неравенства

$$Y A_0^T + A_0 Y + Y C_0^T \theta^T B_0^T + B_0 \theta C_0 Y + 2\beta Y < 0. \quad (7)$$

В этом неравенстве матрицы θ и Y неизвестны, поэтому оно не является линейным относительно совокупности переменных θ и Y . В настоящее время не существует алгоритмов решения таких матричных неравенств. Но в то же время известны алгоритмы для численного решения линейных матричных неравенств (например, с помощью пакета для инженерных расчетов MATLAB). Если мы зафиксируем θ , то получим линейное матричное неравенство относительно Y . Аналогично, фиксируя Y , по-

лучим линейное матричное неравенство относительно неизвестных параметров регулятора θ .

Запишем неравенство (7) в виде

$$\psi + P^T \theta^T Q + Q^T \theta P < 0,$$

где $\psi = YA_0^T + A_0 Y + 2\beta Y$, $P = C_0 Y$ и $Q = B_0^T$.

Известно [1], что это неравенство разрешимо относительно матрицы θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$\begin{cases} W_{B_0^T}^T (YA_0^T + A_0 Y + 2\beta Y) W_{B_0^T} < 0, \\ W_{C_0 Y}^T (YA_0^T + A_0 Y + 2\beta Y) W_{C_0 Y} < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $W_{C_0 Y}$ и $W_{B_0^T}$ образуют базисы ядер матриц

$C_0 Y$ и B_0^T соответственно.

Заметив, что $W_{C_0 Y}^T = Y^{-1} W_{C_0}$, и подставив это выражение во второе неравенство (8), преобразуем его к виду

$$W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0 + 2\beta X) W_{C_0} < 0, \quad Y = X^{-1}.$$

3. Алгоритм поиска взаимно-обратных матриц

Таким образом, поиск регулятора (6), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (2) со степенью устойчивости, не меньшей β , и при котором для траектории системы с начальным состоянием x_0 удовлетворяются фазовые ограничения, сводится к разрешимости относительно матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ системы линейных матричных неравенств

$$\begin{cases} L_1(X, Y) = \begin{pmatrix} Y & x_c(0) \\ x_c^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \\ L_2(X, Y) = W_{B_0^T}^T (YA_0^T + A_0 Y + 2\beta Y) W_{B_0^T} < 0, \\ L_3(X, Y) = W_{C_0}^T (A_0^T X + X A_0 + 2\beta X) W_{C_0} < 0, \\ \text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, m, \end{cases} \quad (9)$$

в которых $Y = X^{-1}$ (т.е. таких, что $XY = I$), а столбцы матриц W_{C_0} и $W_{B_0^T}$ образуют базисы ядер матриц C_0 и B_0^T соответственно, т.е. $C_0 W_{C_0} = 0$ и $B_0^T W_{B_0^T} = 0$.

Если условия (9) выполнены и такие матрицы найдены, то параметры θ искомого регулятора (6) находятся как решения линейного матричного неравенства (7) относительно переменной θ .

Неравенства (9) являются линейными матричными неравенствами относительно матриц X и Y . Но есть еще одно условие на матрицы, а именно, $Y = X^{-1}$, которое не является линейным и, соответственно, не позволяет легко ре-

шать эту задачу специальными программными средствами. Обозначим задачу поиска взаимно-обратных матриц X и Y , удовлетворяющих условию (9), как **Задача 1**.

Для ее решения сначала рассмотрим другую задачу.

Задача 2: найти

$$\lambda_{\min} = \min \{ \lambda : X - Y^{-1} \leq \lambda I, \quad X = X^T > 0,$$

$$Y = Y^T > 0, \quad L_1(X, Y) \geq 0, \quad L_i(X, Y) < 0, \quad i = 2, 3,$$

$$L_4(X, Y) \leq 0, \quad \text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, m \},$$

$$\text{где } L_4(X, Y) = \begin{pmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{pmatrix}.$$

Дополнительное линейное матричное неравенство $L_4(X, Y) \leq 0$ в силу леммы Шура эквивалентно неравенствам $X \geq 0$ и $X \geq Y^{-1}$. Поэтому в случае, когда в **Задаче 2** $\lambda_{\min} = 0$, соответствующие матрицы $X > 0$ и $Y > 0$ являются также решением **Задачи 1**.

Для решения **Задачи 2** требуется минимизировать линейную функцию при ограничениях, одно из которых,

$$X - Y^{-1} \leq \lambda I, \quad (10)$$

не является выпуклым и, следовательно, не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство вновь не позволяет решать **Задачу 2** методами выпуклой оптимизации.

В связи с этим рассмотрим еще одну вспомогательную задачу.

Задача 3: найти

$$\lambda_{\min} = \min \{ \lambda : F(X, Y, G_1, G_2) \leq \lambda I,$$

$$X = X^T > 0, \quad Y = Y^T > 0, \quad L_1(X, Y) \geq 0,$$

$$L_i(X, Y) < 0, \quad i = 2, 3, \quad L_4(X, Y) \leq 0,$$

$$\text{trace}(\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, m \},$$

где

$$F(X, Y, G_1, G_2) = X + Y + 2G_1 + 2G_2 + G_1 Y G_1 + G_2 X G_2,$$

$G_i = G_i^T$, $i = 1, 2$, – некоторые заданные матрицы.

В **Задаче 3** по сравнению с **Задачей 2** вместо неравенства (10) стоит линейное матричное неравенство $F(X, Y, G_1, G_2) \leq \lambda I$. Представим функцию $F(X, Y, G_1, G_2)$ в виде

$$\begin{aligned} F(X, Y, G_1, G_2) &= (G_1 + Y^{-1})Y(G_1 + Y^{-1}) + \\ &+ (G_2 + X^{-1})X(G_2 + X^{-1}) + \\ &+ (X - Y^{-1}) + (Y - X^{-1}). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в силу неравенства $X \geq Y^{-1}$ функция $F(X, Y, G_1, G_2) \geq 0$, и когда матрицы $G_1 = -Y^{-1}$, $G_2 = -X^{-1}$ и величина

$\lambda_{\min} = 0$, то соответствующие решения X и Y **Задачи 3** являются и решением **Задачи 2**.

Тогда алгоритм поиска взаимно-обратных матриц можно представить следующим образом:

Алгоритм.

Шаг 1) полагаем $j = 0$.

Шаг 2) фиксируем матрицы $G_1 = G_1^{(j)}$ и $G_2 = G_2^{(j)}$.

Шаг 3) решаем **Задачу 3**, например, с помощью команды `mincx` пакета Matlab и находим λ_{j+1} , X_j , Y_j .

Шаг 4) задаем $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$ и $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$.

Шаг 5) если разность между двумя итерациями $|\lambda_j - \lambda_{j-1}| < \varepsilon$, где ε – некоторое заданное значение, то взаимно-обратные матрицы $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ найдены, и **Алгоритм** останавливается. Иначе полагаем $j = j+1$ и переходим на **Шаг 2)**.

Сходимость алгоритма доказана в **Утверждении 2**.

Утверждение 2. Для любых начальных матриц $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ числовая последовательность λ_j , генерируемая алгоритмом, является невозрастающей, и существуют следующие пределы:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = Y_*.$$

Доказательство. Рассмотрим изменение спектрального радиуса матрицы $F(X, Y, G_1, G_2)$ по траектории алгоритма. Обозначим $\rho_j = \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))$.

Представим

$$\Delta \rho = \rho_{j+1} - \rho_j = \rho(F(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))$$

в виде

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \Delta \rho_1 + \Delta \rho_2 = \\ &= [\rho(F(X_{j+1}, Y_{j+1}, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \\ &\quad - \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}))] + \\ &\quad + [\rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)})) - \\ &\quad - \rho(F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}))]. \end{aligned}$$

Поскольку на $(j+1)$ -й итерации λ принимает минимальное значение при $X = X_{j+1}$, $Y = Y_{j+1}$, то выражение в первых квадратных скобках неположительно в силу алгоритма.

Рассмотрим разность двух матриц, фигурирующих во вторых квадратных скобках. Используем то, что $G_1^{(j)} = -Y_{j-1}^{-1}$, $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$,

$G_2^{(j)} = -X_{j-1}^{-1}$, $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} F(X_j, Y_j, G_1^{(j+1)}, G_2^{(j+1)}) - F(X_j, Y_j, G_1^{(j)}, G_2^{(j)}) = \\ = -Y_j^{-1} + 2Y_{j-1}^{-1} - Y_{j-1}^{-1}Y_jY_{j-1}^{-1} - X_j^{-1} + \\ + 2X_{j-1}^{-1} - X_{j-1}^{-1}X_jX_{j-1}^{-1} = -(Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1})Y_j(Y_j^{-1} - Y_{j-1}^{-1}) - \\ - (X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1})X_j(X_j^{-1} - X_{j-1}^{-1}) \leq 0. \end{aligned}$$

Поскольку из неравенства $A - B \leq 0$ следует, что $\rho(A) \leq \rho(B)$, получаем, что $\Delta \rho \leq 0$, т.е. что последовательность ρ_j является невозрастающей.

Из неравенства $L_3(X, Y) \leq 0$ следует, что $X \geq Y^{-1}$, следовательно, функция $F(X, Y, G_1, G_2) \geq 0$, и, следовательно, $\rho_j \geq 0$.

Последовательность ρ_j является невозрастающей и ограниченной снизу, следовательно, она сходится, откуда в силу непрерывности функции спектрального радиуса и следует существование указанных в теореме пределов.

Из **Утверждения 2** следует, что при остановке алгоритма возможны две ситуации. В случае, когда $\lambda_* = 0$, $X_*Y_* = I$ и матрицы X_* , Y_* являются решениями **Задачи 1**. Во втором случае, когда $\lambda_* > 0$, нельзя сделать определенного вывода о разрешимости **Задачи 1**. В этом случае целесообразно повторить алгоритм поиска взаимно-обратных матриц при других начальных условиях $G_1 = G_1^{(0)}$ и $G_2 = G_2^{(0)}$, как это обычно делают в задачах глобальной оптимизации.

В случае поиска регулятора полного порядка, т.е. при $n = k$, поиск стабилизирующего регулятора сводится к решению задачи выпуклого программирования. Он может быть осуществлен следующим образом.

Матрицы X и Y , входящие в линейные матричные неравенства (9), имеют размерность $2n$, где n – размерность матрицы A . В соответствии с блочной структурой матрицы A_0 представим матрицы X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix},$$

а матрицы $W_{B_0^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_{C_0} = \begin{pmatrix} W_C \\ 0 \end{pmatrix}$.

Тогда неравенства (8) примут вид

$$W_{B^T}^T (Y_{11}A^T + AY_{11} + 2\beta Y_{11})W_{B^T} < 0,$$

$$W_C^T (A^T X_{11} + X_{11}A + 2\beta X_{11})W_C < 0. \quad (11)$$

Здесь матрицы X_{11} и Y_{11} размера $(n \times n)$ не являются взаимно-обратными, но являются блоками взаимно-обратных матриц.

Известна форма Фробениуса для обращения блочной матрицы. Из нее следует, что при выполнении неравенства $Y_{11} - X_{11}^{-1} = V > 0$, которое по лемме Шура эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} X_{11} & 1 \\ 1 & Y_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad (12)$$

выбор соответствующих Y_{12} и Y_{22} может быть осуществлен следующим образом: $Y_{12} = Y_{22} = V$.

Первое неравенство (9), т.к. $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

будет эквивалентно неравенству

$$\bar{x}_0^T Y^{-1} \bar{x}_0 = \bar{x}_0^T X \bar{x}_0 = x_0^T X_{11} x_0 \leq 1. \quad (13)$$

С учетом структуры матриц \bar{C}_i последние $m+1$ неравенства (9) преобразуются в неравенства

$$\text{trace}(C_i Y_{11} C_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (14)$$

Таким образом, для поиска регулятора полного порядка вида (6), который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (2) со степенью устойчивости, не меньшей β , и при котором для траектории системы с начальным состоянием x_0 выполнено условие $\max_{t \geq 0} |z_0(t)| \leq \gamma_0$ и удовлетворяются фазовые ограничения

$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, m$, необходимо:

1. Решить систему линейных матричных неравенств (11)–(14) относительно матриц $X_{11} = X_{11}^T > 0$ и $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ при заданном начальном состоянии x_0 ;

2. Восстановить матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \\ Y_{11} - X_{11}^{-1} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \end{pmatrix};$$

3. Подставить эту матрицу в неравенство (7) и, решив линейное матричное неравенство относительно неизвестной матрицы θ , найти параметры регулятора (6).

Из **Утверждения 1** следует, что если для заданного начального состояния x_0 найдены матрицы X и Y , удовлетворяющие неравенствам (9), и построен регулятор, то для всех значений x_0 , принадлежащих множеству $E = \{x: x^T X x \leq 1\}$, этот же регулятор обеспечивает выполнение для заданного γ_0 условия

$$\max_{t \geq 0} |z_0(t)| \leq \gamma_0, \quad (15)$$

а также фазовых ограничений $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i,$

$i = 1, \dots, m$.

Решая задачу минимизации значения γ_0 условия (15), получим минимальное значение γ_0^* , при котором матричные неравенства (9) выполнены.

3. Математическая модель перевернутого маятника на тележке

Рассмотрим плоский перевернутый маятник, изображенный на рис. 1. Звено маятника имеет длину l , а масса на конце звена равна m . Угол отклонения звена маятника от вертикали обозначим φ . Тележка имеет массу M и смещается в плоскости качания маятника относительно начала координат на величину x под воздействием внешней силы $U(t)$.

Составим математическую модель плоского однозвенного перевернутого маятника на тележке. Обозначим x_1, y_1 координаты массы маятника. Непосредственно из рис. 1 находим, что

$$x_1 = x - l \sin \varphi, \quad y_1 = l \cos \varphi.$$

Тогда кинетическая T и потенциальная V энергии маятника будут иметь следующий вид:

$$T = \frac{m}{2} [(\dot{x} - l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2] + \frac{M}{2} \dot{x}^2,$$

$$V = mgl \cos \varphi.$$

Введем функцию Лагранжа $L = T - V$ и напишем уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ и

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = U$ для нашей системы:

$$-\ddot{x} \cos \varphi + l\ddot{\varphi} - g \sin \varphi = 0, \quad (16)$$

$$(m + M)\ddot{x} - ml\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = U.$$

Выражение (16) можно переписать в виде

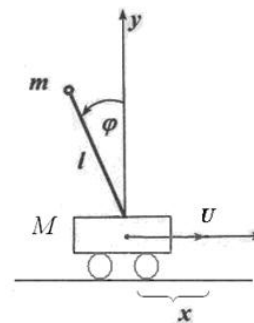


Рис. 1

Таблица 1

β	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2
γ_0	0.0878	0.0838	0.0860	0.1002	0.2556

Таблица 2

Динамический регулятор							Полоса замкнутой системы
$\theta = 10^4$	-2.3912	-0.0909	2.7590	-2.2587	-2.1571	0.0853	-12058 ± 14255i
	0.0037	-0.0000	-0.0043	0.0036	0.0035	-0.0003	-1.65 ± 5.05i
	-4.3549	0.4753	-4.1261	3.6418	3.5572	-0.4833	-0.41 ± 0.79i
	-3.8642	0.4937	-4.6922	4.1053	4.0003	-0.5012	-0.13 ± 0.19i
	3.8704	-0.4937	4.6851	-4.0995	-3.9945	0.5006	

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} g(m+M) - ml\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ gml\cos\varphi - ml^2\dot{\varphi}^2 \end{pmatrix} \sin\varphi + \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ l \end{pmatrix} U,$$

где $\Delta = l(m+M) - ml\cos^2\varphi$.

Ограничимся малым углом φ отклонения звена маятника от вертикали и малой скоростью отклонения звена $\dot{\varphi}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g}{l} \left(1 + \frac{m}{M}\right) & 0 \\ \frac{g}{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{lM} \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} U.$$

Обозначим $\mu = \frac{m}{M}$. Введем безразмерное

время $\bar{t} = \sqrt{\frac{g}{l}}t$ и новые безразмерные величины

$$x_H = \frac{1}{l}x, u = \frac{1}{gM}U. \text{ Получим уравнения:}$$

$$\ddot{\varphi} = (1 + \mu)\varphi + u, \ddot{x}_H = \mu\varphi + u.$$

Будем считать, что можем измерить только угол отклонения звена маятника от вертикали и величину x_H , т.е.

$$y_1 = \varphi, y_2 = x_H.$$

5. Результаты численного эксперимента

Численное решение проводилось в MATLAB. Начальное отклонение звена маятника $\varphi = 0.035$. Задано фазовое ограничение на угол отклонения звена маятника φ (в радианах) от вертикали $\max_{\bar{t} \geq 0} |\varphi(\bar{t})| \leq \pi/60$.

5.1. Задача стабилизации по измеряемому выходу полного порядка при фазовом ограничении

В таблице 1 представлена зависимость минимального значения γ_0 , при котором

$\max_{\bar{t} \geq 0} |x_H(\bar{t})| \leq \gamma_0$, от степени устойчивости β .

Проведены исследования при значениях параметра μ в промежутке $0.01 \leq \mu \leq 1$. При фиксированном значении β зависимость значения γ_0 от параметра μ не обнаружена. Полученные при этом графики $\varphi(\bar{t})$, $x_H(\bar{t})$ качественно не отличаются.

Рисунок 2 представляет собой график угла отклонения $\varphi(\bar{t})$ звена маятника (в радианах).

На рис. 3 приведен график $x_H(\bar{t})$.

Была получена область в восьмимерном фазовом пространстве, при выборе в любой точке которой начального состояния и при использовании регулятора θ гарантируем стабилизацию маятника на тележке при наличии фазовых ограничений. Сечение области плоскостями $x_H = 0$, $\dot{x}_H = 0$, $x_r = 0$ и $\dot{x}_r = 0$ представлено на рис. 4.

5.2. Задача стабилизации по измеряемому выходу пониженного порядка при фазовом ограничении

Поставим задачу нахождения регулятора первого порядка вида (2), при котором $\max_{\bar{t} \geq 0} |x_H(\bar{t})| \leq \gamma_0$. При решении получаем следующие результаты.

Значение $\gamma_0 = 0.1$. В таблице 3 приведен полученный при $\beta = 0.02$, $\mu = 0.1$ динамический регулятор первого порядка, который гарантирует стабилизацию объекта при фазовых ограничениях, и полюса замкнутой системы (3), определяющие качество переходного процесса.

Рисунок 5 представляет собой график угла отклонения $\varphi(\bar{t})$ звена маятника (в радианах). На рис. 6 приведен график $x_H(\bar{t})$. На них также приведены графики функций на интервале $0 \leq \bar{t} \leq 1$, позволяющие определить частоту колебаний.

Таблица 3

Динамический регулятор	Полоса замкнутой системы
$\theta = \begin{pmatrix} -0.5893 & -131.2730 & 53.5873 \\ -0.3135 & -697.9728 & 123.9385 \end{pmatrix}$	- 0.5041 - 0.0212 ± 23.931i - 0.0214 ± 0.4409i

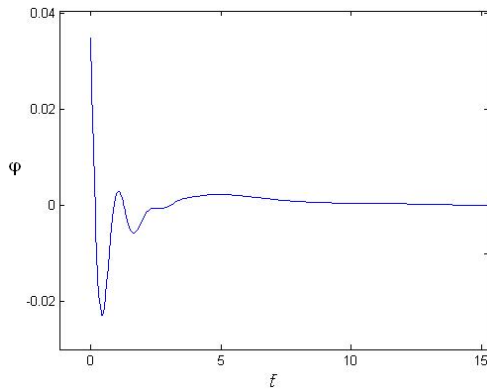


Рис. 2

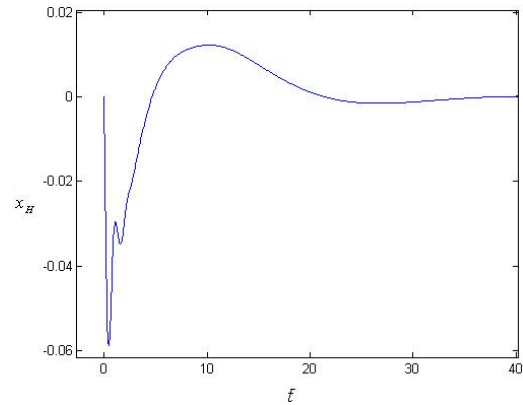


Рис. 3

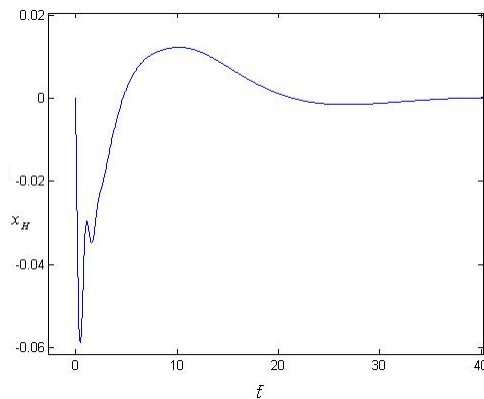


Рис. 4

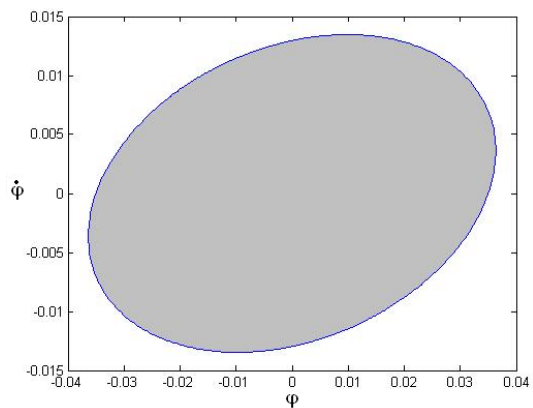


Рис. 5

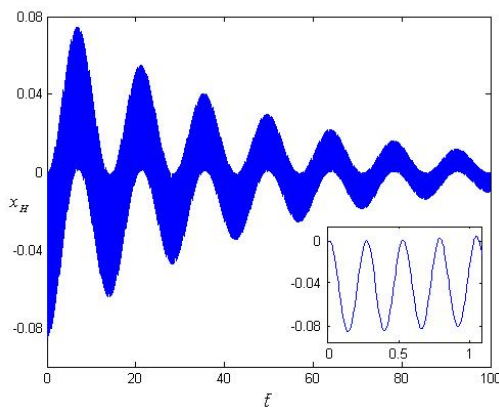


Рис. 6

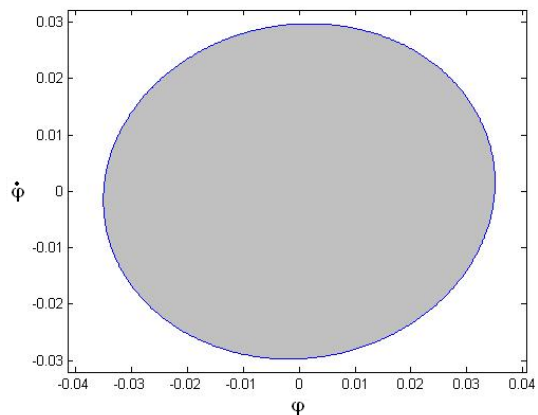


Рис. 7

Была получена область в пятимерном фазовом пространстве, при выборе в любой точке которой начального состояния и при использовании регулятора θ гарантируем стабилизацию маятника на тележке при наличии фазовых ограничений. Сечение области плоскостями $x_H = 0$, $\dot{x}_H = 0$, $x_r = 0$ и $\dot{x}_r = 0$ представлено на рис. 7.

6. Заключение

В работе предложен подход к синтезу на основе линейных матричных неравенств динамических регуляторов, которые обеспечивают стабилизацию механических систем, имеющих ограничения на фазовые переменные и функ-

ционирующих в условиях неопределенности. Сформулированы достаточные условия для существования таких регуляторов. Предложен алгоритм решения **Задачи 1**. Решена задача стабилизации перевернутого маятника на тележке при отсутствии полной информации о фазовом состоянии и при наличии ограничений на фазовые переменные объекта. Получены регуляторы первого и полного порядков. Первый регулятор проще в реализации и позволяет обеспечить примерно те же ограничения на фазовые переменные объекта, что и регулятор полного порядка. Вместе с тем при его применении происходит долгий колебательный процесс с высокой частотой колебаний при установлении стационарного режима.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 12-01-31147, 12-01-09330-моб_з, 10-01-00514 и 11-01-97022).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
2. Федюков А.А. Стабилизация по измеряемому выходу двузвенного перевернутого маятника // Вестник ННГУ. 2012. № 2. С. 177–183.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. С. 48–57.
4. Yong He, Qing-Guo Wang. An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control // IEEE Trans. Automatic Control. October, 2006. V. 51. № 10. P. 1678–1683.

SYNTHESIS OF DYNAMIC REGULATORS STABILIZING SYSTEMS WITH PHASE CONSTRAINTS

A.A. Fedyukov

The output feedback stabilization problem for a dynamic object with phase constraints is considered. It is shown that the solution of the problem in the case of a reduced-order controller is reduced to the search of two mutually inverse matrices satisfying matrix inequalities. A search algorithm for these matrices is proposed and its convergence conditions are shown. A model for an inverted pendulum on a cart has been constructed and its output feedback stabilization problems for full and reduced order controllers in the case of constraints on the object phase variables have been solved.

Keywords: stabilization, control, linear matrix inequalities.