УДК 519.81

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА ПАРЕТОВСКИХ ПУТЕЙ В ГРАФЕ

Ю.В. Бугаев, Ф.А. Музалевский

Воронежский госуниверситет инженерных технологий

bolshoy.fedya.88@gmail.com

Поступила в редакцию 30.10.2012

Приводится полиномиальная оценка мощности полного множества альтернатив задачи поиска оптимальных по векторному критерию путей в графе специального вида и в произвольном ориентированном графе.

Ключевые слова: графы, многокритериальная оптимизация, Парето-оптимальные пути, полное множество альтернатив.

Основным недостатком прямого обобщения метода динамического программирования на случай нескольких критериев является, по мнению ряда авторов [1, 2], проблема размерности и, как следствие, – нехватка вычислительных ресурсов. Так, в [1] теоретически показано, что использование такого подхода становится малоэффективным при количестве критериев больше трех вследствие лавинообразного возрастания числа конфликтующих решений.

Однако множество Парето редко соизмеримо с полным числом вариантов. Хотя несложно придумать пример процесса, в котором все возможные траектории будут оптимальны по Парето, в реальных же условиях такие примеры встречаются не часто. Поэтому теоретическая оценка сложности, приведенная на случай полного перебора, завышена, и построенные выводы имеют частный характер.

Отметим два недостатка изложенных в [1, 2] выводов.

1. В векторной оптимизации существуют две задачи – поиск эффективных решений и эффективных оценок. На практике обычно два решения, имеющие одинаковые оценки, равно привлекательны для лица, принимающего решение (ЛПР), в противном случае критериальные оценки не выполняют своего назначения – достаточно полно характеризовать качество каждой альтернативы. Как следствие, более распространена вторая задача. В литературе [3] её решение называют полным множеством альтернатив (ПМА).

Как правило, отображение множества решений на множество достижимых критериальных оценок инъективно, но не взаимно-однозначно. Иными словами, двум различным решениям соответствуют различные векторные оценки, но не наоборот. В результате мощность множества всех решений может быть на порядки выше, чем мощность ПМА.

2. В практически важных задачах значения критериальных оценок ограничены. Кроме того, после соответствующей нормировки их можно с определённой точностью считать целыми числами.

Очевидно, что с учётом перечисленных соображений для мощности ПМА часто бывает возможно найти приемлемую оценку сверху.

Начнём с простейшей задачи. Для определённости будем считать, что все критерии желательно минимизировать.

Теорема 1. Пусть в многодольном графе, вершины которого образуют n «слоёв», веса рёбер – натуральные числа не более некоторого d и количество критериев равно s. Тогда мощность ПМА задачи поиска Парето-оптимальных путей от начальной к конечной вершине не превосходит

$$N = (d \cdot n - n + 1)^s - (d \cdot n - n)^s. \qquad (1)$$

Доказательство. Очевидно, что длина пути к вершинам k-го слоя по каждому критерию заключена в пределах $k \le \Sigma \le k \cdot d$.

Покажем, что число паретовских путей не больше, чем число целочисленных точек на s ближайших к началу координат гранях гиперкуба $[k, k \cdot d]^s$. Обозначим это множество точек Г. Его аналитическое представление имеет вид:

$$\Gamma = \{\lambda \in E^s \mid k \le \lambda_i \le k \cdot d,\ \lambda_i - \text{целые},\ i = 1,\dots,s;\ \ \min \lambda_j = k\}.$$

Пусть P – множество критериальных оценок Парето-оптиальных путей. Построим отображение $\varphi: P \to \Gamma$ по следующему правилу:

$$\forall p \in P \quad \varphi(p)_i = p_i - \left(\min_j p_j - k\right).$$

Таблица

№ п/п	*Q*1	*Q*2	*Q*3	№ п/п	*Q*1	*Q*2	*Q*3
1	17	20	***8***	7	22	***14***	11
2	16	24	9	8	23	17	10
3	20	16	11	9	15	24	12
4	21	19	10	10	***13***	16	14
5	16	14	13	11	14	19	13
6	17	17	12				

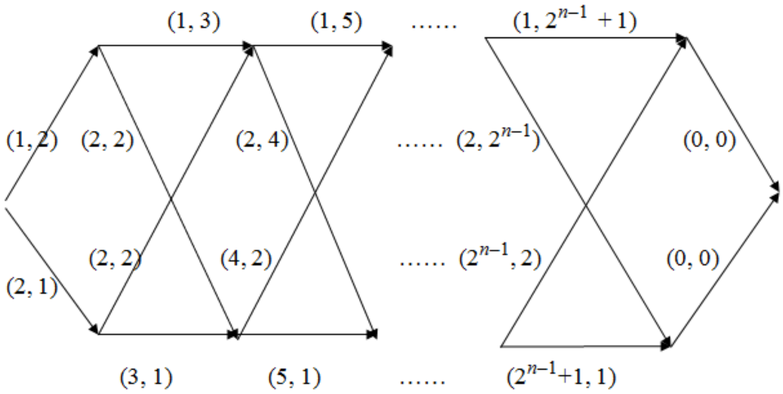

Рис. Пример графа, в котором все пути Парето-оптимальны

В силу целочисленности p_i $\varphi(p)$ также будет иметь целочисленные координаты, и $\min_j \varphi(p)_j =$ $= k$, т.е. $\varphi(p) \in \Gamma$.

Очевидно, что φ инъективно, т.е. двум различным точкам соответствуют различные образы. Действительно, предположим противное, т.е. точкам $p, q \in P$ соответствует один образ $\lambda =$ $= \varphi(p) = \varphi(q)$. Это означает, что $p_i - \min p_i = q_i -$ $- \min q_i$, т.е. $p_i - q_i = \min p_i - \min q_i = a$ для всех i.

Тогда при $a \le 0$ будет $p_i \le q_i \ \forall\ i$. Поскольку $p \ne q$, это означает, что точка p будет лучше по Парето, чем q. При $a \ge 0$ будем иметь обратное отношение. В итоге получаем противоречие с тем, что обе точки паретовские.

Таким образом, между P и Γ существует инъективное отображение, а это значит, что $|P| \le |\Gamma|$.

Остаётся определить $|\Gamma|$. Количество точек по каждой координате равно $(k{\cdot}d - k + 1)$. Тогда $(d{\cdot}k - k + 1)^s$ – число точек, заполняющих весь s-мерный куб. Но т.к. мы имеем дело с совокупностью из s граней, ближайших к началу координат, то от этого числа надо отнять число узлов, заполняющих куб, содержащий $(d{\cdot}k - k)$ точек по каждой координате, т.е. $(d{\cdot}k - k)^s$. Окончательно $|\Gamma| = N = (d{\cdot}n - n + 1)^s - (d{\cdot}n - n)^s$. Теорема доказана.

Отметим, что оценка (1) справедлива для любого числа вершин m в слое. Если $m \le \sqrt[n]{N}$, т.е. если общее число m^n различных путей меньше N, то и количество паретовских путей не может превышать m^n.

Приведём числовые примеры. Пусть $d = 10$, $m = 10$, $n = 10$, $s = 2$. Тогда $N = 181$, т.е. составляет ничтожную долю от числа возможных путей 10^{10}. Даже при существенно больших значениях параметров графа мы не получим астрономических чисел. Так, при $d = 100$, $m =$ $= 1000$, $n = 1000$, $s = 2$ будет $N = 198001$, что для современных компьютеров не слишком много.

Итак, если допустить, что число критериев s ограничено (а так обычно на практике и бывает, т.е. чаще всего $s \le 5$), то число паретовских путей с различными критериальными оценками ограничено полиномом не очень высокой степени.

Пусть теперь имеем произвольный граф, на рёбрах которого заданы векторные критериальные оценки, представляющие собой натуральные числа. Предположим, нам известны диапазоны значений длин Парето-оптимальных путей по каждому критерию $[q_i^{\min}, q_i^{\max}]$. Тогда, используя результаты теоремы 1, несложно показать, что имеет место верхняя оценка числа эффективных путей

$$N = \prod_{i=1}^{s}\left(q_i^{\max} - q_i^{\min} + 1\right) - \prod_{i=1}^{s}\left(q_i^{\max} - q_i^{\min}\right). \quad (2)$$

В этих условиях мы получаем полиномиальную оценку, даже если веса не ограничены, а полиномиально растут с увеличением числа вершин. Очевидно, в этом случае диапазоны длин путей также представляют собой полиномы. При условии ограниченности числа критериев формула (2) также даёт полиномиальную оценку мощности множества Парето-оптимальных оценок.

В конкретных задачах примерные граничные значения критериев можно определить с помощью алгоритмов скалярной оптимизации. Правда, так можно найти лишь точки частных минимумов, которые не дают точной картины диапазона критериев.

Например, граф из [4] имеет три критерия. Множество Парето-оптимальных путей на нём имеет 11 альтернатив (см. таблицу).

Выделены варианты, соответствующие частным минимумам. Согласно информации, содержащейся в этих точках, имеем следующие диапазоны критериев на множестве Парето: $Q1 \in [13, 22]$; $Q2 \in [14, 20]$; $Q3 \in [8, 14]$. Если искать пути максимального веса по каждому критерию, то получим значения 51, 55, 45 соответственно. На самом деле максимальные значения критериев на множестве Парето, как следует из таблицы, равны 23, 24, 14 соответственно. Таким образом, скалярно-оптимизационные методы не позволяют определить точный диапазон каждого критерия, и оценка количества Парето-оптимальных путей может быть либо занижена (если ориентироваться на частные минимумы), либо завышена (если ориентироваться на частные максимумы). Однако оценка (2) остаётся полиномиальной независимо от способа определения границ критериев.

В заключение приведём пример графа (см. рис.), в котором веса рёбер растут экспоненциально, все пути – паретовские, а следовательно, мощность ПМА экспоненциально возрастает при росте числа вершин.

Несложно убедиться, что сумма весов любого пути данного графа равна $Q1 + Q2 = 2^n + 2n - 1$, где n – число «слоёв», и оценки каждого пути представляют собой целочисленные точки на этой гиперплоскости с координатами от $(n, 2^n + n - 1)$ до $(2^n + n - 1, n)$. Это значит, что мощность ПМА равна 2^n.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2007–2013 гг.» по гос. контракту № 16.516.11.6040 от 21.04.11 г.

Список литературы

1. Величко Д.А. Методы многокритериального поиска оптимальных вариантов состава оборудования и технологии для производственных линий (на примере полупроводникового производства) Дисс. … канд. техн. наук. Воронеж: ВТИ, 1983. 219 с.
2. Сысоев В.В. Структурные и алгоритмические модели автоматизированного проектирования производства изделий электронной техники. Воронеж: ВТИ, 1993. 207 с.
3. Перепелица В.А. Многокритериальные задачи теории графов. Алгоритмический подход: Учебное пособие. Киев: УМК ВО, 1989. 67 с.
4. Сысоев В.В. Использование методов скалярной оптимизации для получения Парето-оптимальных решений в задачах структурного синтеза / В.В. Сысоев, С.Д. Андреещев // Математическое моделирование и оптимизация систем переменной структуры: Межвуз. сб. науч. тр. М.: МИХМ, 1989. С. 6–10.

POLYNOMIAL ESTIMATE OF CARDINALITY OF THE PARETO SET OF PATHS IN THE GRAPH

Yu.V. Bugaev, F.A. Muzalevsky

A polynomial cardinality estimate is given of the complete set of alternatives of the problem of finding the optimal vector criterion paths in the graph of a special form and in an arbitrary directed graph.

Keywords: graphs, multicriteria optimization, Pareto-optimal paths, complete set of alternatives.