УДК 519.7

МЕРЫ РИСКОВ В МНОГОЭТАПНЫХ ПРОБЛЕМАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

О.А. Галкина

Киевский национальный университета им. Т. Шевченко

o.a.galkina@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.11.2012

Оптимизация портфеля является проблемой распределения капитала между различными активами с целью максимизации прибыли от инвестиций и минимизации рисков. Характеристика рисков является достаточно сложной задачей. В данной работе рассмотрена многоступенчатая проблема оптимизации портфеля. Представлены современные характеристики рисков и построены меры рисков с необходимыми свойствами для их использования в стохастическом программировании.

Ключевые слова: мера рисков, многоступенчатая проблема, дисперсия, портфель.

1. Описание проблемы

Целью задачи многоступенчатой оптимизации портфеля является определение оптимального портфеля для заданного конечного горизонта инвестирования T, определенного набором этапов $T := \{1,...,T\}$. После начальной инвестиции в момент времени $t = 1$ портфель может быть сбалансирован по временным периодам $t = 2,...,T-1$ и погашен в конце последнего периода $t = T$. Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(R^k, F, (F)_{t\in T}, P)$. Общий доход представлен в виде $\xi := (\xi_1,...,\xi_t) \in R^{k_t}$, где подвекторы $\xi_t \in R^{k_t}$ являются совокупным доходом в момент времени $t \in T$. История всех совокупных доходов до времени t обозначается $\xi_t := (\xi_1,...,\xi_t) \in R^{k_t}$, где $k^t := \sum_{s=1}^{t} k_s$. Решение об инвестициях $w_t(\xi^t)$ принимается в момент времени t после того, как ξ^t были обнаружены, но пока будущие результаты $\{\xi_s\}_{s>t}$ не наблюдались. Мы связываем с процессом выявления ξ_t соответствующую фильтрацию $F_1 \subset ... \subset F_T$ из δ-алгебры на R^k. Более того, мы обозначим через P_t вероятности распределения ξ_t. Отметим, что одноэтапную модель можно рассматривать как частный случай многоступенчатой модели, в которой $\xi^T = \xi$ и $k^T = k$. Каждый инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при минимизации своих рисков. Ожидаемая доходность многоступенчатого портфеля $\overline{r_p}$ может быть рассчитана как среднее накопление капитала на этапе $t = T-1$, умноженное на среднюю прибыль на последнем этапе ξ_T, т.е.

$$\overline{r_p} = E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T). \qquad (1)$$

Используя предположение, что общие доходы на каждом этапе независимы, ожидаемую доходность запишем в виде

$$\overline{r_p} = E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1}))E(\xi_T). \qquad (2)$$

2. Меры рисков

Рассмотрим вероятностное фильтрованное пространство $(\Omega, F, (F)_{t\in T}, P)$ с $F_1 = \{\varnothing, \Omega\}$. Соответствующая фильтрация $F_1 \subset ... \subset F_T$ δ-алгебры на Ω может быть связана с процессом выявления ξ_t. Обозначим $L_t^\infty := L_T^\infty(\Omega, F_t, P)$, $t \in T$, векторное пространство всех ограниченных F_t-измеримых случайных переменных. Более того, определим Z_t как пространство всех F_t-измеримых функций $Z_t := \{Z : L_t^\infty \to R\}$. Риск в многоступенчатом стохастическом программировании задается последовательностью отображений

$$p_t : L_T^\infty \to L_t^\infty,\ t = 1,...,T-1,$$

где $p_t(X)$, $X \in L_T^\infty$, может рассматриваться как оценка убывающих рисков, связанных с позицией X, она обусловлена информацией о ξ_t, доступной в момент времени t. Далее представим многоступенчатую когерентную меру риска через понятие условной выпуклой меры риска.

Условная выпуклая мера риска

Изображение $p_t : L_T^\infty \to L_t^\infty$, $t = 1,...,T-1$, называется условной выпуклой мерой риска, если оно удовлетворяет следующим свойствам. Для каждого $X_1, X_2 \in L_T^\infty$ выполняется:

– условная инвариантность денежных средств для каждого $m_t \in L_t^\infty$

$$p_t(X_1 + m_t) = p_t(X_1) - m_t;$$

– монотонность

$$X_1 < X_2 \Rightarrow p_t(X_1) \ge p_t(X_2);$$

– условная выпуклость

$$\lambda \in L_t^\infty,\ 0 \le \lambda \le 1,$$

$$p_t(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \le \lambda p_t(X_1) + (1-\lambda)p_t(X_2);$$

– нормализация

$$p_t(0) = 0.$$

Когерентная мера риска

Условная выпуклая мера риска является когерентной, если выполняется свойство условной положительной однородности:

$$\forall \lambda \in L_t^\infty,\ \lambda \ge 0,$$

$$p_t(\lambda X_1) = \lambda p_t(X_1).$$

Динамическая выпуклая мера риска: последовательность $(p_t)_{t\in T}$ называется динамической выпуклой мерой риска, если p_t является условной выпуклой мерой риска для каждого $t \in T$.

Последовательная во времени мера риска: динамическая выпуклая мера риска $(p_t)_{t\in T}$ является последовательной во времени, если выполняется каждое из следующих эквивалентных условий:

– для всех $t = 1,...,T-1$ и для всех $X_1, X_2 \in L_T^\infty$

$$p_{t+1}(X_1) \ge p_{t+1}(X_2) \Rightarrow p_t(X_1) \ge p_t(X_2).$$

Иными словами, если портфель X_1 более рискованный, нежели портфель X_2, в момент времени $t+1$, то портфель X_1 должен быть более рискованным, нежели портфель X_2, также в момент времени t.

– для всех $t = 1,...,T-1$ и для всех $X_1, X_2 \in L_T^\infty$

$$p_{t+1}(X_1) = p_{t+1}(X_2) \Rightarrow p_t(X_1) = p_t(X_2).$$

Иными словами, если портфель X_1 столь же рискованный, как и портфель X_2, в момент времени $t+1$, то портфель X_1 должен быть в той же степени рискованным, что и портфель X_2, также в момент времени t.

– $(p_t)_{t\in T}$ является рекурсивной: $p_t = p_t(-p_{t+s})$, $t, s \ge 0$, $t, t+s \in T$.

Последнее определение временной последовательности особенно полезно для построения последовательной во времени многоступенчатой меры рисков ρ_t^I с использованием одноступенчатой меры рисков ρ. Построение можно обобщить в следующей рекурсивной процедуре:

1. $p_{T-1}^I := p$.

2. Для всех $t = 1,...,T-2$ $p_t^I := p(p_{t+1}^I)$.

Другой подход к внедрению последовательной во времени меры рисков называется принципом Беллмана.

Принцип Беллмана

Предположим, что на каждом периоде $t = 1,...,T$ можно посчитать истинную функцию потерь $f_t(x_t(\xi^t), \xi^t)$ и целевую функцию $F_t(Z_t,...,Z_T \mid \xi^t) : Z'_t \times ... \times Z'_T \times R^{k_t} \to R$. Для упрощения обозначим $x_t := x_t(\xi^t)$, $t \in T$. На каждом этапе $t \in T$ многоступенчатой модели необходимо минимизировать все потери, которые могут возникнуть с текущего этапа t к последнему этапу T с учетом информации по всем реализациям неопределенных параметров ξ_t в момент времени t. Иными словами, на каждом этапе $t \in T$ необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\min_{x_t,...,x_T} F_t(f_t(x_t, \xi_t),..., f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^t). \qquad (3)$$

Важно отметить, что каждое правило принятия решения $x_\tau(\xi^\tau)$, $\tau = t,...,T$, является функцией параметров ξ^τ. Такая функция имеет место для всех соответствующих параметров ξ^t времени t.

Одноступенчатая модель $t = 1$ определена как

$$\min_{x_t,...,x_T} F_1(f_1(x_1, \xi_1),..., f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^1), \qquad (4)$$

где $\xi_1 = 1$ включается для постоянства. Модель на последнем периоде $t = T$ определяется как

$$\min_{x_T} F_T(f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^T). \qquad (5)$$

Оптимальное значение $V_t(x_{t-1}, \xi^t)$ проблемы минимизации (3) является функцией ξ^t и последним решением x_{t-1}. Проблему (3) можно представить в следующем виде:

$$\min_{x_t}[\inf_{x_t,...,x_T} F_t(f_t(x_t, \xi_t), f_{t+1}(x_{t+1}, \xi_{t+1}),..., f_T(x_T, \xi_T) \mid \xi^t)]. \qquad (6)$$

Теорема 2.1. Оптимизационная проблема (6) удовлетворяет условию последовательности во времени, если для $t=1,...,T$ оптимальное значение внутри скобок может быть сформулировано в виде

$$\varphi_t(f_t(x_t,\xi_t),...,V_{t+1}(x_t,\xi^{t+1})\,|\,\xi^t), \quad (7)$$

где $\varphi_t(.,.|.)$ – действительная функция.

Используя данную теорему, проблему (6) можно сформулировать в виде

$$\min_{x_t}\varphi_t(f_t(x_t,\xi_t),...,V_{t+1}(x_t,\xi^{t+1})\,|\,\xi^t). \quad (8)$$

Соответствующее динамическое равенство для последнего периода $t=T$:

$$V_T(x_{T-1},\xi^T)=\inf_{x_t}F_T(f_T(x_T,\xi_T)\,|\,\xi^T) \quad (9)$$

Соответственно, для $t=T-1,...,1$ динамическое равенство можно записать как

$$\begin{aligned}&V_T(x_{T-1},\xi^T)=\\&=\inf_{x_t}\varphi_T(f_t(x_t,\xi_t)V_{t+1}(x_t,\xi^{t+1})\,|\,\xi^T).\end{aligned} \quad (10)$$

Пример 2.1. Примером последовательной во времени проблемы является многоступенчатая стохастическая проблема программирования нейтральных рисков. Рассмотрим следующую интерпретацию:

$$\begin{aligned}&\min_{x_1}f_1(x_1,\xi_1)+E(\inf_{x_2}f_2(x_2,\xi_2)+\\&+...+E(\inf_{x_T}f_T(x_T,\xi_T)...),\end{aligned} \quad (11)$$

где $\xi^1=1$ задано для согласованности в общей интерпретации стохастического программирования. Данную задачу оптимизации следует понимать таким образом: для случайного процесса $\xi_1,\xi_2,...,\xi_T$ на каждом этапе t решается следующая проблема:

$$F_t(Z_t,...,Z_T\,|\,\xi^t):=E(Z_t+Z_{t+1}+...+Z_T\,|\,\xi^t). \quad (11)$$

Используя теорему 2.1, можно сформулировать выражение

$$\begin{aligned}&\varphi_t(f_t(x_t,\xi_t),V_{t+1}(x_t,\xi^{t+1})\,|\,\xi^t):=\\&:=E(f_t(x_t,\xi_t)+V_{t+1}(x_t,\xi^{t+1})\,|\,\xi^t)\end{aligned} \quad (12)$$

и, соответственно, динамические неравенства для $t=T$

$$V_T(x_{T-1},\xi^T)=E(\inf_{x_T}f_T(x_T(\xi^T),\xi_T\,|\,\xi^T)) \quad (13)$$

и для $t=2,...,T-1$

$$V_t(x_{t-1},\xi^T)=E(\inf_{x_T}f_t(x_t,\xi_t)+V_{t+1}(x_t,\xi^{t+1})\,|\,\xi^t). \quad (14)$$

Так как можно сформулировать динамические уравнения, которые удовлетворяют теореме 2.1, многоступенчатая стохастическая проблема программирования нейтральных рисков является последовательной во времени.

3. Расходы трансакций

В многоступенчатой оптимизации портфеля инвесторы могут сбалансировать свой портфель на каждом этапе. Тем не менее, изменение баланса не является бесплатной процедурой. Таким образом, трансакционные издержки должны быть приняты во внимание. Представим, что на каждом этапе $t, t=1,...,T-1$, вектор весовых активов $w_t(\xi^t)$ обозначает текущее состояние, $b_t(\xi^t)$ – активы, приобретаемые на этом этапе, и $s_t(\xi^t)$ – активы, которые продаются на этом этапе. Без трансакционных издержек баланс портфеля может быть рассчитан как

$$w_t(\xi^t)=\xi_t w_{t-1}(\xi^{t-1})+b_t(\xi^t)-s_t(\xi^t). \quad (15)$$

Трансакционные издержки рассчитываются как фиксированный процент $c_b(c^s)$ активов, покупаемых (продаваемых) на каждом временном этапе. С учетом этого уравнения баланс портфеля должен удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned}&w_t(\xi^t)=\xi_t w_{t-1}(\xi^{t-1})+\\&+(1-c_b)b_t(\xi^t)-(1+c_s)s_t(\xi^t).\end{aligned} \quad (16)$$

4. Эффективный портфель средней дисперсии

Если риск портфеля моделируется его дисперсией, многоступенчатая оптимизационная проблема средней дисперсии задается в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\min w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\Sigma w_{T-1}(\xi^{T-1}),\\&s.t.\ w_t\in W_t,\ s_t\in S_t,\ b_t\in B_t,\ t=1,...,T-1,\\&E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T)\ge\overline{r_p},\\&1^T b_1(\xi^1)-1^T s_1(\xi^1)=W_0,\\&(1-c_b)b_1(\xi^1)-(1+c_s)s_1(\xi^1)=w_1(\xi^1),\\&1^T b_t(\xi^t)-1^T s_t(\xi^t)=0,\ t=2,...,T,\\&w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t+(1-c_b)b_t(\xi^t)-\\&-(1+c_s)s_t(\xi^t)=w_t(\xi^t),\ t=2,...,T,\end{aligned} \quad (17)$$

где входной параметр W_0 обозначает начальную сумму для инвестирования. Введем следующие множества:

$$\begin{aligned}&W_t:=\{w_t\in L_{k^t,n}:w_{\min}\le w_t(\xi^t)\le w_{\max}\},\\&S_t:=\{s_t\in L_{k^t,n}:0\le s_t(\xi^t)\le s_{\max}\},\\&B_t:=\{b_t\in L_{k^t,n}:0\le b_t(\xi^t)\le b_{\max}\},\end{aligned}$$

где $b_{\max}\in R^I$ и $s_{\max}\in R^I$ обозначают максимальный объем активов, которые покупаются и продаются соответственно. Точно так же, $w_{\max}\in R^I$ и $w_{\min}\in R^I$ обозначают максимальный и минимальный доход, разрешенный для каждого из активов, соответственно. Если короткие продажи не разрешены, то необходимо установить $w_{\min}\ge 0$.

5. Временная непоследовательность эффективного портфеля средних условных значений риска

Модель данной задачи может быть представлена как следующая оптимизационная проблема:

$$
\begin{gathered}
\min a(\xi^1)+(1-\beta)^{-1}\Xi(z(\xi^T)),\\
s.t.\ w_t\in W_t,\ s_t\in S_t,\ b_t\in B_t,\ t=1,\dots,T-1,\\
\alpha\in L_{k^1,1},\ z\in L_{k,1},\\
-w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T-\alpha(\xi^1)\le z(\xi^T),\\
0\le z(\xi^T),\\
E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T)\ge\overline{r_p},\\
1^T b_1(\xi^1)-1^T s_1(\xi^1)=W_0,\\
(1-c_b)b_1(\xi^1)-(1+c_s)s_1(\xi^1)=w_1(\xi^1),\\
1^T b_t(\xi^t)-1^T s_t(\xi^t)=0,\ t=2,\dots,T,\\
w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t+(1-c_b)b_t(\xi^t)-\\
-(1+c_s)s_t(\xi^t)=w_t(\xi^t),\ t=2,\dots,T.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

Теорема 5.1. Проблема (18) не является последовательной во времени.

Доказательство. Для того чтобы доказать непоследовательность во времени, применяется теорема 2.1. Запишем сначала динамические уравнения проблемы. Для последнего инвестиционного периода $t=T-1$ оценочная функция $V_{T-1}([w_{T-2},\alpha],\xi^{T-1})$ определяется с помощью оптимального значения проблемы:

$$
\begin{gathered}
\min(1-\beta)^{-1}\Xi([-w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T-\alpha(\xi^1)]^+),\\
s.t.\ w_t\in W_t,\ s_t\in S_t,\ b_t\in B_t,\ t=1,\dots,T-1,\\
\alpha\in L_{k^1,1},\ z\in L_{k,1},\\
E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T)\ge\overline{r_p},\\
1^T b_{T-1}(\xi^{T-1})-1^T s_{T-1}(\xi^{T-1})=0,\\
w_{T-2}(\xi^{T-2})\xi_{T-1}+(1-c_b)b_{T-1}(\xi^{T-1})-\\
-(1+c_s)s_{T-1}(\xi^{T-1})=w_{T-1}(\xi^{T-1}),\ t=2,\dots,T.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Аналогично, для $t=T-2,\dots,2$ значение функции $V_{T-1}([w_{T-1},\alpha],\xi^T)$ определяется оптимальным значением проблемы

$$
\begin{gathered}
\min E([V_{t+1}([w_t(\xi^t),\alpha(\xi^1)],\xi^{t+1})),\\
s.t.\ w_t\in W_t,\ s_t\in S_t,\ b_t\in B_t,\ \alpha\in L_{k^1,1},\\
1^T b_t(\xi^t)-1^T s_t(\xi^t)=0,\\
w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t+(1-c_b)b_t(\xi^t)-\\
-(1+c_s)s_t(\xi^t)=w_t(\xi^t)
\end{gathered}
\tag{20}
$$

и на первом этапе ($t=1$) соответствующая задача представлена в виде

$$
\begin{gathered}
\min \alpha(\xi^1)+E([V_{t+1}([w_t(\xi^t),\alpha(\xi^1)],\xi^{t+1})),\\
s.t.\ w_t\in W_t,\ s_t\in S_t,\ b_t\in B_t,\ \alpha\in L_{k^1,1},\\
1^T b_1(\xi^1)-1^T s_1(\xi^1)=0,\\
(1-c_b)b_1(\xi^1)-(1+c_s)s_1(\xi^1)=w_1(\xi^1).
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Отметим, что $\alpha(\xi^1)$ является переменной на первом этапе. Поскольку решения на последнем инвестиционном периоде $T-1$ зависят от $\alpha(\xi^1)$, то невозможно сформулировать $\varphi_t(.,.|.)$, как требует теорема 2.1. Заметим, что теорема предполагает, что оптимальное значение на этапе $T-1$ должно зависеть только от правил принятия решений на этапе $T-2$, т.е. w_{T-2}, s_{T-2} и b_{T-2}.

Теорема доказана.

6. Последовательный во времени эффективный портфель средних условных значений риска

Для последнего инвестиционного периода $t=T-1$ значение функции $V_{T-1}([w_{T-2},\alpha],\xi^{T-1})$ определяется оптимальным значением проблемы

$$
\begin{gathered}
\min \alpha_{T-1}(\xi^{T-1})+(1-\beta)^{-1}\Xi_{P_T}([-w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\times\\
\times\xi_T-\alpha_{T-1}(\xi^{T-1})]^+),\\
s.t.\ w_{T-1}\in W_{T-1},\ s_{T-1}\in S_{T-1},\\
b_{T-1}\in B_{T-1},\ \alpha_{T-1}\in L_{k^{T-1},1},\\
E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T)\ge\overline{r_p},\\
1^T b_{T-1}(\xi^{T-1})-1^T s_{T-1}(\xi^{T-1})=0,\\
w_{T-2}(\xi^{T-2})\xi_{T-1}+(1-c_b)b_{T-1}(\xi^{T-1})-\\
-(1+c_s)s_{T-1}(\xi^{T-1})=w_{T-1}(\xi^{T-1}).
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Если следовать процедуре построения последовательной во времени меры рисков, то значение функции $V_t(w_{t-1},\xi^t)$, $t=T-2,\dots,2$, определяется оптимальным значением проблемы

$$
\begin{gathered}
\min \alpha_t(\xi^t)+(1-\beta)^{-1}\times\\
\times E_{P_{t+1}}([V_{t+1}([w_t(\xi^t),\xi^{t+1})-\alpha_t(\xi^t)]),\\
s.t.\ w_t\in W_t,\ s_t\in S_t,\ b_t\in B_t,\ \alpha_t\in L_{k^t,1},\\
1^T b_t(\xi^t)-1^T s_t(\xi^t)=0,\\
w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t+(1-c_b)b_t(\xi^t)-\\
-(1+c_s)s_t(\xi^t)=w_t(\xi^t)
\end{gathered}
\tag{23}
$$

и на первом этапе ($t=1$) соответствующая проблема имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\min \alpha_1(\xi^1)+(1-\beta)^{-1}\times\\
\times E_{P_2}([V_2([w_1(\xi^1),\xi^2)-\alpha_1(\xi^1)]^+),
\end{gathered}
\tag{24}
$$

$$s.t.\ w_1 \in W_1,\ s_1 \in S_1,\ b_1 \in B_1,\ \alpha_t \in L_{k^t,1},$$
$$1^T b_t(\xi^t) - 1^T s_t(\xi^t) = 0,$$
$$(1-c_b)b_1(\xi^1) - (1+c_s)s_1(\xi^1) = w_1(\xi^1).$$

Сочетая динамические уравнения (22), (23) и (24) в одной модели и вводя переменные $z_t(\xi^t),\ t = 2,...,T$, чтобы избежать выражений $[x]^+$, возникающих в целевой функции, получаем следующую проблему:

$$\begin{gathered}
\min a_1(\xi^1) + (1-\beta)^{-1}\Xi_{P_2}(z_2(\xi^2)),\\
s.t.\ w_t \in W_t,\ s_t \in S_t,\ b_t \in B_t,\\
\alpha_t \in L_{k^t,1},\ t = 1,...,T-1,\\
z_t \in L_{k^t,1}, t = 2,...,T,\\
-w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T - \alpha_{T-1}(\xi^{T-1}) \le z_T(\xi^T),\\
E(w_{T-1}^T(\xi^{T-1})\xi_T) \ge \overline{r_p},\\
1^T b_1(\xi^1) - 1^T s_1(\xi^1) = W_0,\\
z_t(\xi^T) \ge 0,\ t = 2,...,T,\\
(1-c_b)b_1(\xi^1) - (1+c_s)s_1(\xi^1) = w_1(\xi^1),\\
1^T b_t(\xi^t) - 1^T s_t(\xi^t) = 0,\ t = 2,...,T-1,\\
w_{t-1}(\xi^{t-1})\xi_t + (1-c_b)b_t(\xi^t) -\\
-(1+c_s)s_t(\xi^t) = w_t(\xi^t),\ t = 2,...,T-1,\\
z_t(\xi^t) + \alpha_{t-1}(\xi^{t-1}) \ge \alpha_t(\xi^t) +\\
+(1-\beta)^{-1}E_{P_{t+1}}(z_{t+1}(\xi^{t+1})),\ t = 2,...,T-1.
\end{gathered} \tag{25}$$

Теорема 6.1. Проблема (25) является последовательной во времени**.**

Доказательство. Поскольку проблема (25) получена из динамических уравнений (22), (23) и (24), необходимо показать, что они удовлетворяют теореме 2.1. Для каждого этапа $t = 1,...,T-2$ можно сформулировать целевую функцию в виде

$$\begin{gathered}
\varphi_t(f_t(w_t,\xi_t), V_{t+1}(w_t,\xi^{t+1}) \mid \xi^t) =\\
= \alpha_t(\xi^t \mid \xi^t) + (1-\beta)^{-1}E_{P_{t+1}}([V_{t+1}(x_t(\xi^t),\xi^{t+1}) -\\
-\alpha_t(\xi^t)]^+ \mid \xi^t).
\end{gathered} \tag{26}$$

Таким образом, проблема (25) является последовательной во времени.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Gulpinar N., Rustem B., and Settergren R. Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction costs // Innovations in Financial and Economic Networks. 2003. № 3. P. 46–63.

2. Wei C. Robust Portfolio Optimization Using Conditional Value At Risk. Master Thesis. Imperial College London, June 2008.

3. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952.

4. Shapiro A. On a time consistency concept in risk averse multistage stochastic programming // Operations Research Letters – ORL. 2009. V. 37. № 3. P. 143–147.

5. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton, NJ: Princeton University Press; republished: Dover, 2003.

6. Goldfarb D. and Iyengar G. Robust Portfolio Selection Problems // Mathematics of Operations Research. 2003. V. 28. № 1. P. 1–38.

RISK MEASURES IN MULTISTAGE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS

O.A. Galkina

Portfolio optimization is the problem of allocating capital over different assets in order to maximize investment returns and minimize risks. Assessing risk profile is quite a challenge. The paper considers the multistage portfolio optimization problem. An analysis of current risk profiles is presented and risk measures with the required properties are constructed to be used in stochastic programming.

Keywords: risk measure, multistage problem, variance, portfolio.