

УДК 534.2

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ
В АКУСТИЧЕСКОЙ ДВАЖДЫ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ**© 2013 г. В.А. Буров¹, К.В. Дмитриев¹, И.Ю. Демин², О.В. Руденко^{1,2}, С.Н. Сергеев¹¹Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова
²Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

burov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2013

Изучается прохождение акустических импульсов через дважды отрицательную среду. Для недиспергирующей среды нарушается принцип причинности. В среде с резонансными функциями отклика по плотности и сжимаемости область «раскачки» среды, т.е. огибающая зоны возбуждения, движется с конечной групповой скоростью, и принцип причинности соблюдается. Установившийся режим сходен со случаем прохождения монохроматического сигнала в среде без дисперсии.

Ключевые слова: левые среды, метаматериалы, дважды отрицательные среды.

Акустическими дважды отрицательными средами называются такие среды, которые при определенных условиях (например, в ограниченной полосе частот) могут быть описаны как сплошные среды, обладающие одновременно двумя отрицательными эффективными параметрами: плотностью ρ и сжимаемостью η . В дальнейшем, для краткости, они будут называться отрицательными средами. Такие среды близки по свойствам к левым средам, которые сейчас активно изучаются в электродинамике и характеризуются одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями. Реализованные экспериментально в электродинамике [1] левые среды оказались достаточно сильно диспергирующими и обладающими существенным поглощением. Однако этот факт сам по себе не отрицает возможность существования подобных сред практически без поглощения. В связи с этим представляет интерес вопрос о принципиальных ограничениях на величину дисперсии и поглощения в подобных средах. Этот вопрос тесно связан с выполнением принципа причинности.

Наличие аномальной дисперсии в отрицательных средах может быть объяснено следующим образом. При падении волны перпендикулярно границе раздела из положительной среды в отрицательную среду фазовая скорость меняет свой знак и становится отрицательной. Пусть эти две среды являются идеально согласованными, т.е. их плотности и сжимаемости совпадают по абсолютной величине, но различаются знаком. Тогда импедансы сред совпадают, и отраженная от границы волна отсутствует. При

этом, если предполагать, что на границе не происходит рождения или поглощения энергии, поток энергии и связанный с ним вектор Умова–Пойнтинга должны быть всюду положительными. Поскольку распространение энергии обычно связывается с групповой скоростью, то отсюда можно сделать вывод о противоположной направленности фазовой и групповой скоростей в отрицательной среде, что эквивалентно утверждению об обязательном наличии аномальной дисперсии. Однако в отрицательной среде вектор Умова–Пойнтинга может не совпадать по направлению с групповой скоростью; поэтому для окончательного ответа на вопрос о необходимости дисперсии нужно более детальное рассмотрение и моделирование.

Для моделирования волновых процессов в системах, содержащих включения отрицательных сред, рассмотрение будет вестись на основе исходной для акустики системы линеаризованных уравнений гидродинамики:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\eta}p) + \nabla \mathbf{v} = \varphi; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\rho}\mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{v} и p – соответственно колебательная скорость и давление акустической волны, φ и \mathbf{f} – скалярные и векторные источники поля, а вместо скалярных величин плотности ρ и сжимаемости η вводятся операторы $\hat{\rho}$ и $\hat{\eta}$, что обусловлено рассмотрением широкого класса сред, где эти параметры могут выражать функции отклика среды, являясь интегральными операторами типа свертки по временной переменной. Систему уравнений (1) удобно представить в матричном виде:

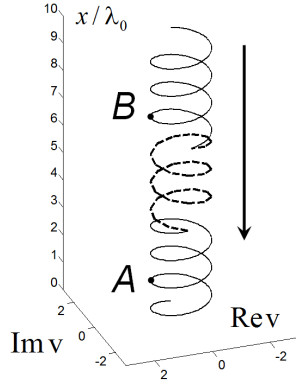


Рис. 1. Результат расчета полного поля колебательной скорости \mathbf{v} в слое, содержащем включение отрицательной среды. Пунктирные линии соответствуют области включения; стрелкой обозначено направление распространения падающей волны

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} & \nabla \\ \nabla & \frac{\partial}{\partial t} \hat{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \varphi \end{pmatrix} \text{ или } \hat{A}^{(t)} \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{F}}, \text{ где}$$

$$\hat{A}^{(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} & \nabla \\ \nabla & \frac{\partial}{\partial t} \hat{\eta} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Символ (t) означает, что соответствующий оператор зависит от времени. Произвольное пространственное распределение плотности и сжимаемости можно представить в виде суммы положительных фоновых значений этих параметров и добавок операторного типа, которые могут не являться малыми: $\hat{\rho} = \rho_0 + \hat{\rho}'$ и $\hat{\eta} = \eta_0 + \hat{\eta}'$. Падающее поле $\tilde{\mathbf{u}}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$, которое создается источниками в однородной среде с фоновыми параметрами ρ_0 и η_0 , удовлетворяет уравнению $\hat{A}_0^{(t)} \tilde{\mathbf{u}}_0 = \tilde{\mathbf{F}}$, где введен оператор

$$\hat{A}_0^{(t)} = \begin{pmatrix} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \\ \nabla & \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}. \text{ Предполагая, что это поле}$$

известно, можно найти поле в системе, содержащей неоднородность. Действительно, $\hat{A}^{(t)} \tilde{\mathbf{u}} = \hat{A}_0^{(t)} \tilde{\mathbf{u}}_0 = \tilde{\mathbf{F}}$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_0 &= (\hat{A}_0^{(t)})^{-1} \hat{A}^{(t)} \tilde{\mathbf{u}} = (\hat{A}_0^{(t)})^{-1} (\hat{A}_0^{(t)} + (\hat{A}^{(t)} - \hat{A}_0^{(t)})) \tilde{\mathbf{u}} = \\ &= \tilde{\mathbf{u}} + (\hat{A}_0^{(t)})^{-1} (\hat{A}^{(t)} - \hat{A}_0^{(t)}) \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} - (\hat{A}_0^{(t)})^{-1} \hat{A}_1^{(t)} \tilde{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

где $\hat{A}_1^{(t)} = \hat{A}^{(t)} - \hat{A}_0^{(t)}$ – оператор, характеризующий неоднородность. Уравнение $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}_0 +$

$(\hat{A}_0^{(t)})^{-1} \hat{A}_1^{(t)} \tilde{\mathbf{u}}$ представляет собой операторный аналог уравнения Липпмана–Швингера, где роль функции Грина выполняет оператор \hat{A}_0^{-1} . Его решение имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = (\hat{E} - (\hat{A}_0^{(t)})^{-1} \hat{A}_1^{(t)})^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad (2)$$

где \hat{E} – единичный оператор.

При рассмотрении монохроматических процессов с временной зависимостью $\sim \exp(-i\omega t)$ дифференцирование по времени можно исключить: $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$. Тогда (2) может быть представлено в интегральной форме как $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{r}) + \int_{\mathfrak{R}} \hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\hat{A}_1(\mathbf{r}') \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'$, где $\hat{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

– матричная функция Грина. Ее явный вид известен и применялся для анализа волновых процессов в различных системах, в том числе содержащих отрицательные среды [2]. В частности, в одномерном случае (размерность $D = 1$) получается

$$\begin{aligned} \hat{G}_{D=1}(x - x') &= \frac{\exp(i k_0 |x - x'|)}{2} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\eta_0}{\rho_0}} & \text{sgn}(x - x') \\ \text{sgn}(x - x') & \sqrt{\frac{\rho_0}{\eta_0}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Анализировалось перпендикулярное падение плоской монохроматической волны с длиной λ_0 и единичной амплитудой на включение толщиной $3\lambda_0$ отрицательной среды, плотность ρ и сжимаемость η которой идеально согласованы с плотностью ρ_0 и сжимаемостью η_0 фоновой положительной среды: $\rho = -\rho_0$ и $\eta = -\eta_0$. На рис. 1 по двум горизонтальным осям отложены, соответственно, действительная и мнимая компоненты рассчитанной колебательной скорости \mathbf{v} в системе (поскольку задача одномерная, \mathbf{v} здесь скаляр). Вдоль вертикальной оси X отложена пространственная координата. Полученное распределение колебательной скорости имеет вид спирали, которая закручена в одну или другую сторону, в зависимости от знака фазовой скорости звука. Из рис. 1 видно, что на границах включения из отрицательной среды знак спиральности меняется. В точках, которые расположены вне включения с разных сторон от этого включения, причем таких, что расстояние между ними равно двойной толщине включения, фазы в каждый момент времени

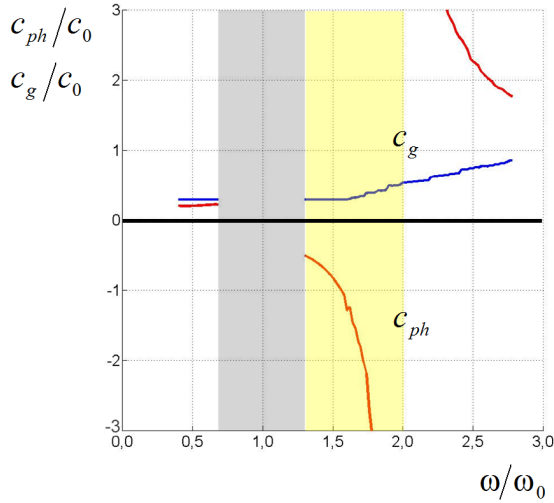


Рис. 2. Зависимость фазовой (c_{ph} , обозначена красной линией) и групповой (c_g , обозначена синей линией) скорости от несущей частоты. Область графика, закрашенная серым, соответствует диапазону сильного поглощения волны. Область графика, закрашенная желтым, соответствует положительной групповой и отрицательной фазовой скорости

совпадают (для примера, таковыми являются точки A и B на рис. 1). Это связано с тем, что набег фазы в отрицательной среде отрицателен и компенсирует набег фазы в положительной фоновой среде. Вектор Умова–Пойнтинга в рассматриваемом случае не меняется на границе с отрицательной средой из-за отсутствия отраженной волны, что подтверждается численным моделированием.

Пусть рассматриваемая отрицательная среда не обладает в некотором диапазоне частот дисперсией. Это означает, что условие равенства фаз выполнено в точках A и B на любой его частоте и при прохождении через слой сложного сигнала, спектр которого целиком лежит в этом диапазоне, сигналы в рассматриваемых точках в один и тот же момент времени должны быть равны. В [3, 4] было проведено моделирование падения импульса гауссовой формы на слой недиспергирующей среды. При этом оказалось, что импульс на выходе слоя появляется до того, как исходный импульс достигает слоя. Такое поведение противоречит принципу причинности, а значит, сделанное предположение об отсутствии дисперсии не может выполняться.

Для анализа распространения немонохроматических сигналов в диспергирующей среде необходимо представить уравнение (2) в явной интегральной форме. Для получения выражения для функции Грина, которая соответствует в этом случае обратному оператору $(\hat{A}_0^{(v)})^{-1}$, следует выполнить обратное преобразование Фурье от функции Грина (3), соответствующей

монохроматическому процессу: $\hat{G}(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \int \hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\omega(t-t')} d\omega$. В рассматриваемом далее одномерном случае

$$\hat{G}_{D=1}(t-t', x-x') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_0/\rho_0} & \text{sgn}(x-x') \\ \text{sgn}(x-x') & \sqrt{\rho_0/\eta_0} \end{pmatrix} \delta\left(\frac{|x-x'|}{c} - (t-t')\right),$$

где δ – дельта-функция Дирака. В итоге, уравнение типа Липпмана–Швингера принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} v(x,t) \\ p(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(x,t) \\ p_0(x,t) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \iint dz' dt' \delta\left(\frac{|x-x'|}{c} - (t-t')\right) \times \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_0/\rho_0} & \text{sgn}(x-x') \\ \text{sgn}(x-x') & \sqrt{\rho_0/\eta_0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\rho}'(x') & 0 \\ 0 & \hat{\eta}'(x') \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t'} \begin{pmatrix} v(x',t') \\ p(x',t') \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Оно позволяет анализировать распространение сигналов через одномерную систему с произвольным распределением плотности и сжимаемости. Пусть такое распределение задается операторами $\hat{\rho}'(x) = \tilde{\rho}(x)\omega_0 \int_0^\infty d\tau \sin(\omega_0\tau)(\cdot)$ и $\hat{\eta}'(x) = \tilde{\eta}(x)\omega_0 \int_0^\infty d\tau \sin(\omega_0\tau)(\cdot)$. Здесь параметры $\tilde{\rho}(x)$ и $\tilde{\eta}(x)$ являются скалярными величинами и служат для сохранения размерности. Введенные операторы соответствуют тому, что среда содержит рассеиватели дипольного и монопольного типов, причем рассеяние носит резонансный характер. Частота резонанса равна ω_0 , а поглощение в резонаторах отсутствует.

Рассматривалось падение на слой такой среды по нормали импульсов с огибающей гауссовой формы длительностью T и несущей частотой ω :

$$\tilde{u}_0(x,t) = \tilde{u}_0 \exp[\omega(t-x/c_0)] \times \exp\left[-(t-x/c_0)^2/2T^2\right],$$

где $c_0 = 1/\sqrt{\rho_0\eta_0}$ – скорость звука в фоновой среде. Толщина слоя составляла $L = 1.5\lambda_0$, где $\lambda_0 = 2\pi c_0/\omega_0$ – длина волны резонансной частоты в фоновой среде. При моделировании полагалось $\tilde{\rho}(x) = \rho_0$ и $\tilde{\eta}(x) = \eta_0$. При этом импеданс фоновой среды равен импедансу слоя, и от его границ отсутствует отражение, что несколько упрощает анализ процесса. Фиксировалась

зависимость поля давления от времени на входе и выходе из слоя. На выходе из слоя форма сигнала оставалась близкой к гауссовой. Это позволило вычислять групповую скорость в слое как величину, обратную времени распространения максимума сигнала через слой: $c_g = L/\tau_{\max}$. Фазовая скорость рассчитывалась как $c_{ph} = \omega \Delta x / \Delta \phi$, где $\Delta \phi$ – набег фазы внутри слоя, соответствующий прохождению волной расстояния Δx .

Результаты расчета, соответствующие изменению несущей частоты сигнала в диапазоне от $0.4\omega_0$ до $2.8\omega_0$, приведены на рис. 2. На низких частотах фазовая и групповая скорости оказываются близкими. По мере приближения несущей частоты к ω_0 в среде быстро растет поглощение. Это приводит к образованию запрещенной зоны, в которой волна не распространяется внутрь слоя, а гаснет на его границе. При этом энергия, заключенная в импульсе, запасается в резонаторах среды. Дальнейшее увеличение частоты приводит к выходу из резонансной области и снижению поглощения. Колебания резонаторов на частотах выше резонансной происходят в противофазе с приложенным к ним воздействием. Это обуславливает возможность отрицательности эффективных параметров, которыми может характеризоваться среда на определенной частоте. Фазовая скорость при этом становится отрицательной. Групповая скорость по-прежнему является положительной, это означает, что сигнал на выходе слоя не может появиться раньше, чем сигнал на его входе, т.е. рассматриваемая среда удовлетворяет принципу причинности. На частоте $\omega \approx 1.5\omega_0$ фазовая скорость в слое оказывается равна по модулю и противоположна по знаку фазовой скорости в фоновой среде. Существенно то, что эта частота не лежит в запрещенной зоне, и хотя поглощение (вызванное, по-видимому, накоплением энергии во внутренних степенях свободы резонаторов) весьма значительно и достигает 4 дБ на длине волны, это позволяет рассматривать волновые процессы в среде. С увеличением частоты фазовая скорость растет по абсолютной величине, оставаясь отрицательной. При $\omega \approx 2\omega_0$ она стремится к бесконечности. Физически это означает, что колебания среды происходят синфазно по всей толщине слоя. Групповая скорость, с которой происходит распространение энергии и информации, остается конечной положительной величиной, которая не имеет особенностей в этой точке. При $\omega > 2\omega_0$ фазовая скорость становится положи-

тельной и с ростом частоты стремится к c_0 . К этому же значению стремится и групповая скорость. Такое поведение объясняется уменьшением вклада резонаторов в функцию отклика среды по мере удаления частоты от резонансной.

При анализе поведения фазовой и групповой скоростей существенно, что рассматриваемые процессы являются установившимися или близкими к таковым. Это означает, что длительность импульса T должна быть велика по сравнению с периодом колебаний резонаторов среды $2\pi/\omega_0$ и периодом $2\pi/\omega$, соответствующим несущей частоте.

Представляет интерес рассмотрение процесса установления волнового процесса в отрицательной среде. С этой целью анализировалось падение на слой сигнала, аналогичного рассмотренным выше. Несущая частота была выбрана равной $\omega = 1.5\omega_0$. На рис. 3 представлена зависимость рассчитанной фазы сигнала от расстояния в четыре последовательных момента времени $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$. Первые три из них соответствуют началу прохождения импульса через слой. Такое прохождение сопряжено с «раскачиванием» резонаторов среды и запасанием в них энергии. Фаза в точке $x = 0$ в каждом случае полагалась равной нулю. Область, лежащая левее точки A , содержит фоновую среду. В зависимости от времени характер поведения

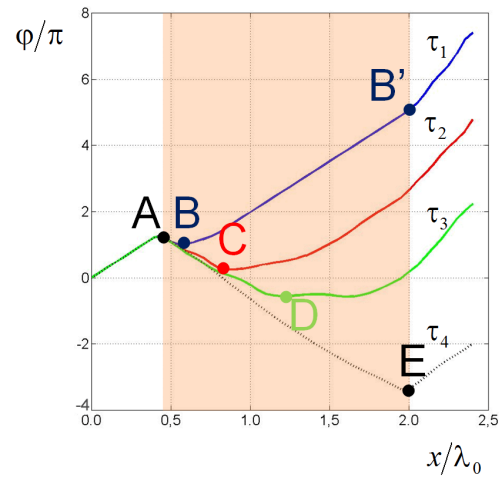


Рис. 3. Зависимость фазы волны ϕ от координаты в моменты времени $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$, соответствующие началу прохождения импульса через слой, и в момент времени τ_4 , когда волновой процесс в слое является установившимся. Закрашенной областью обозначено положение слоя. Отмеченные точки соответствуют изменению поведения фазы с расстоянием: в точках A и E изменение вызвано границами слоя; точки B , C и D являются границами областей «раскачанной» и «нераскачанной» среды

фазы в ней не меняется, поэтому для всех четырех графиков этот участок является общим.

Момент времени τ_1 соответствует началу прохождения импульса через слой. При этом фаза волны убывает на участке AB , а на участке BB' растет. Это означает, что в слое идет переходный процесс, при этом участок AB соответствует среде, в которой уже произошла «раскачка» резонаторов, обуславливающая убывающий характер зависимости фазы от расстояния. На участке BB' среда еще «нераскачана». При этом прямолинейный характер этого участка (особенно правой его части) и параллельность его участку, находящемуся левее точки A , позволяет заключить, что «нераскачанная» среда обладает свойствами фоновой среды. В частности, «фазовая скорость», если определять ее согласно процедуре, описанной ранее для установившегося процесса, равна в такой среде c_0 .

В моменты времени τ_2 и τ_3 происходит рост области «раскачанной» среды (соответственно, участки AC и AD) слева направо. В отличие от момента τ_1 рост фазы с расстоянием правее точек C и D не является прямолинейным, т.е. область переходного процесса охватывает всю правую часть слоя.

В момент времени τ_4 весь слой оказывается состоящим из «раскачанной» среды. Участок AE при этом близок к прямолинейному, и для него можно определить фазовую скорость, равную $-c_0$. Можно видеть, что фаза в точке E опережает фазу в точке A . Эта ситуация аналогична изображенной на рис. 1, когда рассматривался чисто монохроматический процесс.

Таким образом, при рассмотрении вопросов, связанных с выполнением принципа причинности в отрицательных средах, недостаточно ог-

раничиваться монохроматическим режимом, поскольку он не позволяет учесть существенную для таких сред роль дисперсии. Если отрицательная среда не обладает дисперсией, то она не удовлетворяет принципу причинности. Рассмотренный случай отрицательной метасреды, характеризующейся резонансными функциями отклика по плотности и сжимаемости, сохраняет причинность. При этом в такой среде частотная область сильного поглощения может не совпадать с областью проявления отрицательных свойств, а динамика проникновения излучения в такую среду удовлетворяет принципу причинности, причем установившийся режим имеет много черт, сходных со случаем прохождения монохроматического сигнала в среде без дисперсии.

Работа выполнена при поддержке грантов ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (номер гранта 14.В37.21.2034), Президента РФ № НШ-2631.2012.2, № МК-2041.2011.5, грантов РФФИ № 10-02-00636, № 12-02-31674 мол_а, а также при частичной поддержке Правительства РФ (договоры 11.G 34.31.0005 и 11.G 34.31.0066).

Список литературы

1. Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C. et al. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 18. P. 4184–4187.
2. Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н. // Акустич. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292–306.
3. Буров В.А., Волошинов В.Б., Дмитриев К.В., Поликарпова Н.В. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением // УФН. 2011. Т. 181. № 11. С. 5–11.
4. Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н. Принцип причинности в акустических дважды отрицательных средах // Известия РАН. Серия Физическая. 2011. Т. 75. № 12. С. 1745–1750.

PROPAGATION OF PULSE SIGNALS IN A DOUBLE-NEGATIVE ACOUSTIC MEDIUM

V.A. Burov, K.V. Dmitriev, I.Yu. Demin, O.V. Rudenko, S.N. Sergeev

The propagation of acoustic pulses through a double-negative medium is studied. The causality principle is violated for a non-dispersive medium. However, in the medium with resonant density and compressibility response functions where the envelope of the excitation area moves with a finite group velocity, the causality principle is observed. The steady-state regime is similar to the case of monochromatic signal propagation in the medium without dispersion.

Keywords: left-handed media, metamaterials, double-negative media.