

УДК 537.86

## СИНХРОНИЗАЦИЯ БИЕНИЙ В АНСАМБЛЕ СВЯЗАННЫХ ФАЗОУПРАВЛЯЕМЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

© 2013 г.

*М.А. Мищенко, В.В. Матросов, В.Д. Шалфеев*

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

[mischenko@neuro.nnov.ru](mailto:mischenko@neuro.nnov.ru)

*Поступила в редакцию 02.04.2013*

Установлено наличие режима синхронизации биений в ансамбле двух связанных фазоуправляемых генераторов на основе системы фазовой синхронизации. Произведено разбиение пространства параметров на области существования синхронизации регулярных биений при различных значениях параметров.

*Ключевые слова:* синхронизация, синхронизация биений, фазоуправляемый генератор, система фазовой автоподстройки частоты.

Системы фазовой синхронизации (СФС), также называемые системами фазовой автоподстройки частоты (ФАП), широко применяются в системах передачи информации [1, 2]. Основной режим работы таких систем – режим синхронизации подстраиваемого генератора опорным сигналом. Именно этот режим используется для решения задач стабилизации частоты, управления частотой и фазой, а также ряда других задач. Однако, при больших значениях начальных частотных расстройках, вне области синхронного режима эти же системы могут демонстрировать сложные автомодуляционные колебания или биения, в том числе хаотические. Режим биений может представлять интерес при использовании системы ФАП в качестве генератора автомодуляционных колебаний различной сложности, например как нейроноподобный генератор, рассмотренный в работе [3].

Цель настоящей работы – выяснить возможность синхронизации биений в связанных системах ФАП. В качестве модели системы ФАП рассмотрим систему ФАП с разделительным конденсатором в цепи управления. В [4] была исследована система фазовой синхронизации с разделительной ёмкостью в двумерном случае, а в работах [3, 5] рассматривались особенности динамики трехмерной модели. Данная динамическая система определена в цилиндрическом фазовом пространстве  $(\varphi(\text{mod}2\pi), y, z)$  и записывается в виде системы дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 \cos \varphi)y, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  – текущая разность фаз подстраиваемого и опорного генераторов,  $\gamma$  – начальная частотная расстройка,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – параметры инерционности цепи управления.

В такой системе отсутствует состояние равновесия, которое в классических системах ФАП отвечает режиму синхронизации. Но в фазовом пространстве существует предельный цикл, соответствующий режиму биений, который при варьировании параметров модели (1) может менять период, кратность и превращаться в хаотический аттрактор. На рис. 1 представлены проекции  $(\varphi, y)$  аттракторов в фазовом пространстве системы (1) и соответствующие осциллограммы  $y(\tau)$  для характерных динамических режимов модели (1). Как можно увидеть из рис. 1, в системе могут наблюдаться различные динамические режимы биений: регулярные биения (рис. 1a), пачечные биения с различным количеством импульсов в пачке (рис. 1b–e) и хаотические биения (рис. 1f).

Области существования таких динамических режимов были изучены в [5], где было произведено разбиение сечений пространства параметров  $(\gamma, \varepsilon_1)$  и  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  на области существования различных динамических режимов.

Следует отметить, что реализующиеся в модели (1) динамические режимы биений внешне весьма сходны с характерными динамическими режимами биологических нейронов (режимы периодической активности, регулярной пачечной активности, хаотической пачечной активности) [6,7]. Это обстоятельство позволяет рассматривать модель (1) как модель нейроноподобного элемента, построенного на базе системы ФАП (далее используем сокращение НПФАП). Рассмотрим далее возможность син-

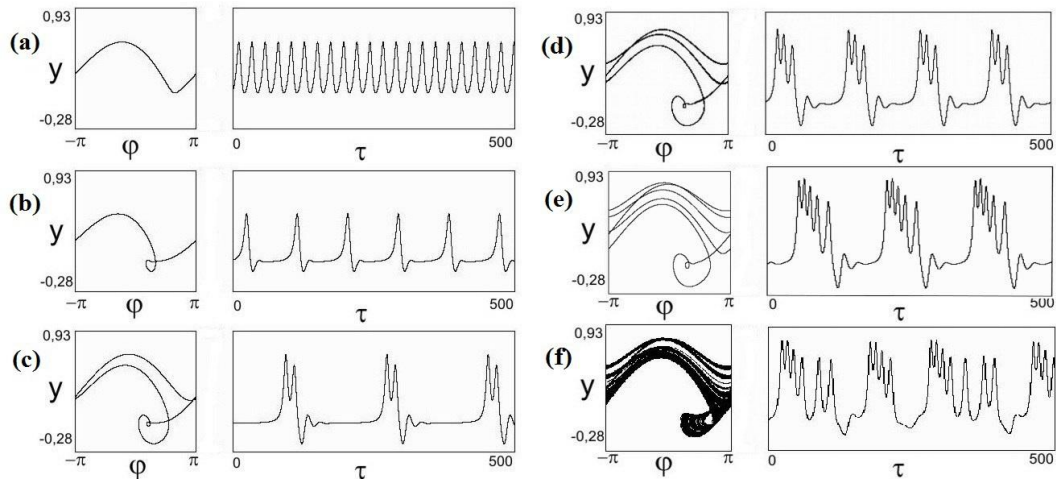


Рис. 1. Проекция аттракторов и осциллограммы характерных динамических режимов модели (1)

хронизации двух нейроноподобных элементов НПФАП<sub>1</sub> и НПФАП<sub>2</sub>, то есть синхронизации биений в двух связанных между собой системах ФАП, описываемых моделями (1).

Система фазовой синхронизации содержит в своей схеме дискриминатор, который сравнивает характеристики колебаний (частота, фаза) опорного и подстраиваемого генератора и вырабатывает управляющий сигнал. Распространен этот принцип для соединения двух элементов НПФАП, описываемых уравнениями (1). Рассмотрим однонаправленную связь от элемента НПФАП<sub>1</sub> к элементу НПФАП<sub>2</sub> через частотный дискриминатор со следующей характеристикой:  $\Phi(y_2 - y_1) = \frac{2\alpha(y_2 - y_1)}{1 + (\alpha(y_2 - y_1))^2}$ , где  $\alpha$  –

параметр нелинейности дискриминатора. Тогда модель двух однонаправленно связанных нейроноподобных элементов запишется в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \varepsilon_{11}\varepsilon_{12} \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12})z_1 - (1 + \varepsilon_{11}\cos\varphi_1)y_1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \varepsilon_{21}\varepsilon_{22} \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22})z_2 - \\ & - (1 + \varepsilon_{21}\cos\varphi_2)y_2 - \delta_y \Phi(y_2 - y_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – текущие фазовые рассогласования первого и второго генераторов относительно опорного сигнала;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – начальные расстройки частот первого и второго генераторов относительно опорного сигнала;  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$  и  $\varepsilon_{21}$ ,  $\varepsilon_{22}$  – параметры фильтров в цепях управления ФАП<sub>1</sub> и ФАП<sub>2</sub> соответственно;  $\delta_y$  – безразмерный параметр связи.

Будем считать, что два колебания на выходе НПФАП<sub>1</sub> и НПФАП<sub>2</sub> синхронизированы, если разность фаз  $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$  с течением времени не выходит за пределы определенных границ, то есть  $\Delta\varphi$  ограничена некоторой константой  $\varphi_{\text{syn}}$ . Далее аттрактор, удовлетворяющий условию  $\Delta\varphi < \varphi_{\text{syn}}$ , будем называть *синхроаттрактором* (*синхроциклом* или *синхротором*, если аттрактор является периодическим или квазипериодическим решением). Если частоты выходных колебаний НПФАП<sub>1</sub> и НПФАП<sub>2</sub> совпадают, то говорят о синхронизации на основном тоне. Если колебания НПФАП<sub>2</sub> имеют частоту, в  $k$  раз превышающую частоту колебаний НПФАП<sub>1</sub>, где  $k=2, 3, 4, \dots$ , то это движение соответствует синхронизации на гармонике. Если же частота колебаний в НПФАП<sub>2</sub> в  $k$  раз меньше частоты колебаний НПФАП<sub>1</sub>, то говорят о синхронизации на ультрагармонике. Возможен случай, когда колебания НПФАП<sub>1</sub> периодические, а колебания НПФАП<sub>2</sub> являются квазипериодическими или хаотическими, при этом разность фаз  $\Delta\varphi$  ограничена. Этот режим синхронизма определим как синхронизацию в среднем. Далее рассмотрим синхронизацию периодической активности НПФАП.

Значения параметров модели НПФАП<sub>1</sub> зафиксируем в точке с координатами  $\gamma_1=0.2$ ,  $\varepsilon_{11}=2$ ,  $\varepsilon_{12}=10$ . При этих значениях параметров НПФАП<sub>1</sub> демонстрирует режим периодической активности (см. рис.1а). Параметры фильтров системы ФАП<sub>2</sub> также зафиксируем, определив их значения такими же, как у НПФАП<sub>1</sub>:  $\varepsilon_{21}=2$ ,  $\varepsilon_{22}=10$ . Значения параметров  $\gamma_2$ ,  $\delta_y$ ,  $\alpha$  будем варьировать, при этом основной вопрос, который нас будет интересовать: в каком диапазоне изменения параметра  $\gamma_2$  выбранный нами способ связи может обеспечить режим синхронизации выходных колебаний НПФАП<sub>1</sub> и НПФАП<sub>2</sub>?

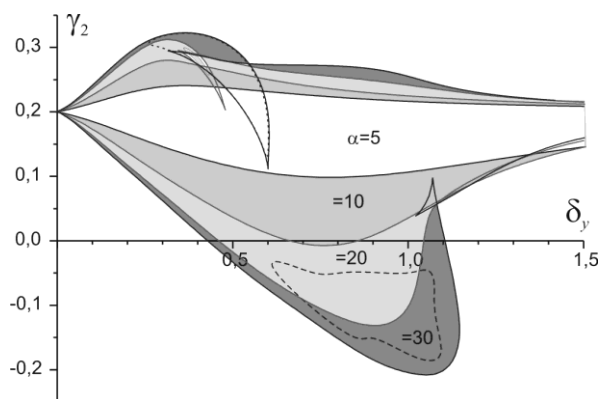


Рис. 2. Области синхронизации периодической активности нейроноподобного элемента, рассчитанные по модели (2)

Очевидно, что при  $\gamma_2=0.2$  колебания элементов одинаковы. При  $\gamma_2 \neq \gamma_1$  частоты выходных колебаний НПФАП<sub>1</sub> и НПФАП<sub>2</sub> различны, поэтому при  $\delta_y=0$  разность фаз  $\Delta\phi$  будет постоянно нарастать. Включение частотного кольца управления ( $\delta_y > 0$ ,  $\alpha > 0$ ) позволяет ограничить  $\Delta\phi$ , то есть выйти на режим синхронизма. Диапазон изменения  $\gamma_2$ , где режим синхронизма сохраняется (полоса синхронизации), зависит как от силы связи  $\delta_y$ , так и от параметра нелинейности  $\alpha$  частотного дискриминатора. На рис. 2 приведены области синхронизации периодической активности НПФАП-элемента на плоскости параметров  $(\delta_y, \gamma_2)$  модели (2) для различных значений параметра  $\alpha$ .

Здесь различными оттенками выделены области синхронизации при  $\alpha=5, 10, 20$  и  $30$  соответственно. Из рис. 2 видно, что с ростом  $\delta_y$  полоса синхронизации увеличивается, достигает максимума и далее начинает медленно спадать. Верхняя и нижняя границы области синхронизации имеют экстремумы при разных значениях  $\delta_y$ . Область синхронизации тем больше, чем больше крутизна характеристики частотного дискриминатора  $\alpha$ . Однако следует обратить внимание на то, что увеличение полосы синхронизации за счет параметра  $\alpha$  может привести к мультистабильности и, как следствие, к гистерезисным явлениям, к синхронизации на кратных частотах и, наконец, к возникновению разрывов в полосе синхронизации.

Установлено, что области синхронизации ограничены бифуркационными поверхностями двукратных предельных циклов. При увеличении  $\alpha$  на этих поверхностях появляются складки, которые на плоскости  $(\delta_y, \gamma_2)$  приводят к «скручиванию» границ области синхронизации и появлению областей с мультистабильным поведением в виде «ласточкина хвоста». На рис. 2 «скручивание» верхней границы области синхронизации наблюдается при  $\alpha=20$  и  $30$ , нижней – при  $\alpha=30$ . Переход к синхронизации на ульт-

рагармониках и в среднем обусловлен бифуркациями удвоения периода.

На рис. 3 приведены проекции фазовых портретов и осциллограммы аттракторов модели (2), характеризующие различные режимы синхронизации колебаний НПФАП<sub>1</sub> и НПФАП<sub>2</sub>.

В силу однонаправленной связи проекция фазового портрета аттрактора модели (2) на плоскость  $(\gamma_1, y_1)$  и осциллограмма  $y_1(\tau)$  остаются неизменными при вариациях параметров  $\gamma_2, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$  элемента НПФАП<sub>2</sub> и параметров связи  $\delta_y, \alpha$ . Рисунок 3b соответствует синхронизации на основном тоне, рис. 3c – на ультрагармонике. Движение, изображенное на рис. 3d, является хаотическим, усредненная частота колебаний НПФАП<sub>2</sub> совпадает с частотой колебаний НПФАП<sub>1</sub>, поэтому можно говорить о синхронизации в среднем. На рис. 2 области синхронизации на ультрагармониках ограничены пунктирными линиями, соответствующими первой бифуркации удвоения периода синхроцикла модели (2). При продвижении вглубь области, ограниченной пунктирными линиями, можно наблюдать серию бифуркаций удвоения периода синхроцикла, приводящую к появлению хаотического синхроаттрактора, определяющего режим синхронизации в среднем (рис. 3d). Далее хаотический аттрактор может проходить через бифуркацию, приводящую к резкому увеличению амплитуды колебаний переменных  $y_2$  и  $z_2$  (рис. 3e), что нарушает режим синхронизма.

Таким образом, была показана возможность синхронизации регулярных биений в системе двух связанных фазоуправляемых генераторов. Также было отмечено существование синхронизации на гармониках и в среднем. Данные результаты представляют интерес в контексте идеи использования системы ФАП в качестве модели нейрона, предложенной в работах [3, 5]. Полученные результаты могут быть положены в основу дальнейших исследований более сложных ансамблей связанных нейроноподобных элементов как с другими видами связей, так и с другими

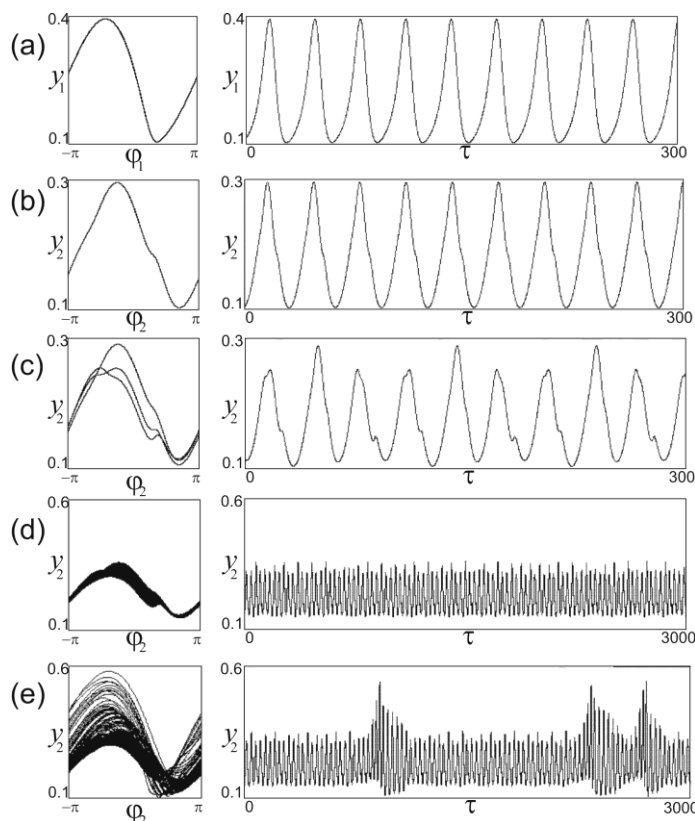


Рис. 3. Проекция фазовых портретов и осциллограммы  $y_1(\tau)$  и  $y_2(\tau)$  аттракторов модели (2) при  $\gamma_1=0.2$ ,  $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{21}=2$ ,  $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{22}=10$ ,  $\alpha=30$ , характеризующие режим синхронизма колебаний НПФАП<sub>1</sub> (a) и НПФАП<sub>2</sub> на основном тоне  $k=1$  при  $\gamma_2=0.3$  (b); на ультрагармонике  $k=3$  при  $\gamma_2=0.30975$  (c); в среднем при  $\gamma_2=0.31006$  (d); асинхронный режим при  $\gamma_2=0.31013$  (e)

конфигурациями связей. Интерес к предложенному элементу НПФАП стимулируется еще и тем, что наряду с возможностью проведения численных экспериментов здесь имеется возможность организации проведения натуральных экспериментов, поскольку разработка и создание экспериментальных схем вполне реальны на основе имеющихся промышленных технологий изготовления интегральных схем ФАП, составляющих основу предложенных НПФАП-элементов и ансамблей таких элементов.

*Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (контракт №14.В37.21.1073) и Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России» на 2007–2013 гг. (контракт №11.519.11.1003).*

#### Список литературы

1. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. 2-е изд. М.: Связь, 1972. 497 с.
2. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. 288 с.
3. Мищенко М.А. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 5. № 3. С. 279–282.
4. Шалфеев В.Д. // Известия вузов. Радиофизика. 1968. Т. 11. № 3. С. 397–406.
5. Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4. С. 122–130.
6. Rabinovich M., Varona P., Selverston A., Abarbanel H. // Reviews of Modern Physics. 2006. V.78. № 4. P. 1213–1265.
7. Izhikevich E.M. Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. The MIT Press, 2006.

### SYNCHRONIZATION OF BEATS IN AN ENSEMBLE OF COUPLED PHASE-CONTROLLED OSCILLATORS

M.A. Mishchenko, V.V. Matrosov, V.D. Shalfeev

A beat synchronization mode has been found in a system of two PLL oscillators. Parameter space partitioning into domains of existence of regular beat synchronization has been made for different parameter values.

*Keywords:* synchronization, synchronization of beats, phase-controlled oscillator, phase-locked loop (PLL) system.