М Е Х А Н И К А

УДК 534.121.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗЕ

© 2013 г.

Н.Ю. Культина, В.В. Новиков, Ю.Ю. Панченко

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

natalia.kultina@gmail.com

Поступила в редакцию 14.01.2013

Изучается динамика упругой пластины, движущейся в своей плоскости со сверхзвуковой скоростью. Показано, что диссипативная сила, введенная в системе координат, связанной с пластиной, и аэродинамическая сила, установленная по закону плоских сечений, оказывают разнонаправленное влияние на устойчивость пластины.

Ключевые слова: колебания, устойчивость, динамика пластины, флаттер.

Упругая пластина движется прямолинейно в своей плоскости с постоянной скоростью U в газе. В плоскости невозмущенной пластины введем систему осей Oxy, движущуюся вместе с пластиной так, что ось Ox направлена по скорости. Уравнение малых поперечных колебаний пластины имеет вид [1, 2]

$$D\nabla^4 w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_0 h \eta \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0,$$

где D – цилиндрическая жесткость, ρ_0 – плотность материала, h – толщина пластинки. Параметр η характеризует силу сопротивления, введенную в системе координат, связанной с пластиной. Последнее слагаемое в уравнении движения $q(x,t)$ отвечает аэродинамическому воздействию на пластину. Функция $q(x,t)$ в случае сверхзвуковых скоростей вводится в соответствии с законом плоских сечений [1]:

$$q = \frac{\chi p_\infty}{c_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t} - U\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

где χ – показатель политропы газа, p_∞ и c_∞ – давление и скорость газа на бесконечности.

Будем считать, что пластина свободно оперта по краям $x = 0,\ x = a,$ и ограничимся рассмотрением случая цилиндрического изгиба пластины: $w = w(x,t)$.

После перехода к безразмерным переменным и параметрам уравнение движения и соответствующие ему краевые условия записываются в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} + \gamma\frac{\partial w}{\partial t} - \gamma v\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

$$w\big|_{x=0} = w\big|_{x=1} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0.$$

Здесь масштаб времени $t_* = a^2\sqrt{\rho_0 h / D}$, а пространственный масштаб – ширина пластины a, параметр диссипации $\varepsilon = \eta a^2\sqrt{\rho_0 h / D}$, коэффициент, характеризующий влияние аэродинамических сил, $\gamma = \chi p_\infty a^2 / c_\infty\sqrt{\rho_0 h D}$, безразмерная скорость пластины $v = aU\rho_0 h / D$.

Обозначения для поперечного прогиба, времени и координат оставили прежними.

Аэродинамическое воздействие на пластину можно интерпретировать как силу, пропорциональную скорости изменения прогиба в системе, связанной с газом. Если провести аналогию с задачей об устойчивости вращающегося гибкого вала [1], то силу, отвечающую параметру ε, следовало бы назвать внутренним трением (вводится в системе, связанной с пластиной), а аэродинамическую силу, характеризуемую параметром γ, – внешним трением.

Критическую скорость потока, при которой пластина теряет устойчивость, можно определить с помощью метода Бубнова–Галёркина. Представим w в виде ряда

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin(\pi k x)$$

и ограничимся в нём двумя первыми членам. Система уравнений для функций u_1 и u_2 имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + (\varepsilon+\gamma)\dot{u}_1 + \pi^4 u_1 - \dfrac{8}{3\pi}\gamma v u_2 = 0, \\ \ddot{u}_2 + (\varepsilon+\gamma)\dot{u}_2 + 16\pi^4 u_2 + \dfrac{8}{3\pi}\gamma v u_1 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

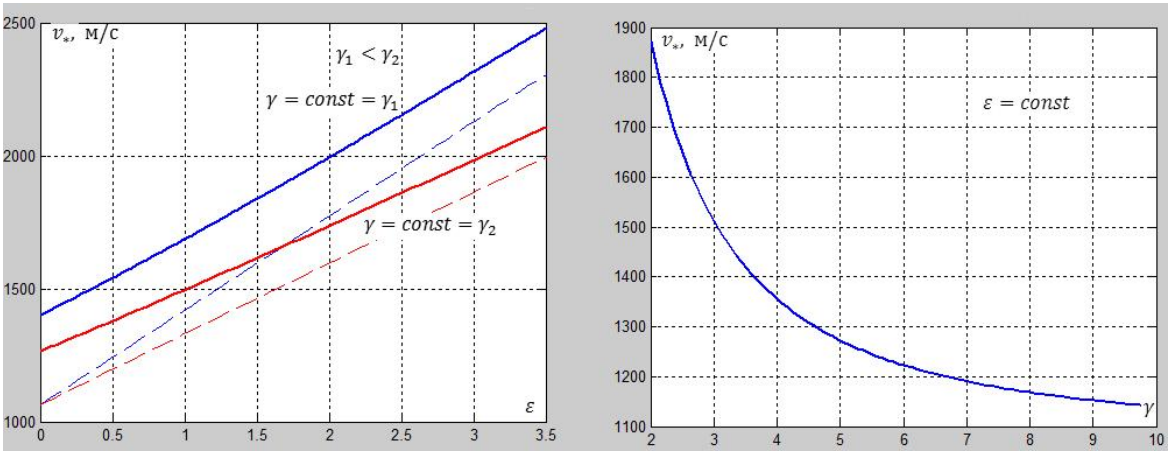

Рис. 1. Зависимость критической скорости υ_* от параметров ε и γ

Отсюда находим, что критическая скорость потока υ_* определяется выражением

$$\upsilon_* = \frac{45\pi^4}{16}\frac{1}{\gamma}\sqrt{1+\frac{34}{225}(\varepsilon+\gamma)^2}. \qquad (3)$$

Зависимость критической скорости от параметров ε и γ представлена на рис. 1.

Данные результаты получены для стальной пластины шириной $a = 1$м, толщиной $h \sim 10^{-3}$м, движущейся в воздухе (скорость звука на бесконечности $c_\infty = 331$м/с, давление на бесконечности $p_\infty = 101325$Па, показатель политропы $\chi = 1.4$). С увеличением сопротивления ε растет значение критической скорости при фиксированном значении параметра γ. График критической скорости в этом случае имеет асимптоту $v = \frac{3\sqrt{34}\pi^4}{16}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}+1\right)$, показанную на рис. 1 прерывистой линией. Эту прямую при достаточно больших значениях параметра γ можно трактовать как границу области устойчивости пластины. Видно, что с увеличением γ эта граница понижается, т.е. при фиксированном значении ε с ростом параметра γ значение критической скорости уменьшается. Аналогично задаче об устойчивости вращающегося вала [1] здесь потере устойчивости способствуют циркуляционные силы в уравнениях движения (2). Если в случае вращающегося вала циркуляционные силы возникают из-за учета внутреннего трения, вводимого во вращающейся с валом системе координат, то в рассматриваемой задаче циркуляционные силы являются частью сил аэродинамического взаимодействия.

Таким образом, силы, характеризуемые параметрами ε и γ, по-разному влияют на устойчивость пластины: сила сопротивления (ε) стабилизирует пластину, тогда как аэродинамическая сила (γ) дает дестабилизирующий эффект.

Уточнение полученного результата требует учёта большего числа членов ряда, что неизбежно делает задачу громоздкой и сложной для аналитического решения. Существует другой подход к решению задачи. Он состоит в исследовании характеристических показателей исходного уравнения малых колебаний пластины (1). В этом случае критическая скорость отвечает появлению характеристического показателя с положительной вещественной частью. Разделим переменные в уравнении (1) и представим решение в виде бегущей волны [2]:

$$w(x,t) = W(x)e^{st}, \qquad (4)$$

где $W(x)$ – комплексная функция вещественной переменной x, s – характеристический показатель или комплексная частота.

Подставляя (4) в (1), находим, что функция $w(x,t)$ будет удовлетворять уравнению и граничным условиям (1) тогда и только тогда, когда $W(x)$ является собственной функцией следующей краевой задачи

$$W^{IV} - \gamma\upsilon W' = \lambda W, \qquad (5)$$
$$W(0) = W(1) = W''(0) = W''(1) = 0,$$

где λ – собственное значение краевой задачи (5), которое выражается через характеристический показатель:

$$\lambda = -s^2 - (\varepsilon+\gamma)s. \qquad (6)$$

Из (6) следует зависимость характеристических показателей от собственного значения λ:

$$s = \frac{\varepsilon+\gamma}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1-\frac{4}{(\varepsilon+\gamma)^2}\lambda}\right]. \qquad (7)$$

При любых значениях λ один из характеристических показателей (7) имеет отрицательную вещественную часть, а вещественная часть второго в зависимости от величины λ может быть

как отрицательной, так и положительной. Границе области устойчивости отвечает $s = i\sigma$, где σ – вещественное число, следовательно, в соответствии с (6) на границе области устойчивости $\lambda = \sigma^2 - i(\varepsilon + \gamma)\sigma$.

Множество таких значений λ располагается на так называемой параболе устойчивости [2]:

$$\mathrm{Re}\lambda = \frac{1}{(\varepsilon+\gamma)^2}(\mathrm{Im}\lambda)^2.$$

Если значение λ принадлежит внутренней области параболы устойчивости, то оба характеристических показателя s имеют отрицательные вещественные части, с переходом λ через параболу устойчивости один из показателей s обретает положительную вещественную часть.

Рассмотрим поведение собственных значений λ в зависимости от параметров сопротивления ε и аэродинамических сил γ. Общее решение уравнения (5) является линейной комбинацией четырех независимых решений $W_i(\lambda, x)$ [2]

$$W(x) = \sum_{i=1}^{4} C_i W_i(\lambda, \gamma\upsilon, x).$$

Будем отыскивать независимые решения в виде

$$W(x) = e^{-rx}. \qquad (8)$$

Подстановка решения (8) в уравнение (5) приводит к уравнению относительно параметра r:

$$r^4 + \gamma\upsilon r - \lambda = 0. \qquad (9)$$

Можно показать, что это уравнение имеет два комплексно-сопряженных и два действительных корня [4]. Запишем комплексно-сопряженные корни уравнения (9) в виде

$$r_{1,2} = \mu \pm i\nu.$$

Подставляя $r_{1,2}$ в уравнение (9), найдем, что другие два корня, а также параметры задачи λ и $\gamma\upsilon$ выражаются через введенные величины μ и ν следующим образом:

$$\begin{aligned} r_3 &= -\mu - \sqrt{\nu^2 - 2\mu^2}; \\ r_4 &= -\mu + \sqrt{\nu^2 - 2\mu^2}; \\ \gamma\upsilon &= 4\mu(\nu^2 - \mu^2); \\ \lambda &= (\mu^2 + \nu^2)(\nu^2 - 3\mu^2). \end{aligned} \qquad (10)$$

Построив по найденным корням $r_{1,2,3,4}$ общее решение уравнения (5) и подчинив его краевым условиям, придем к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} F(\mu,\nu) = {} & 2\nu\mu^2\sqrt{\nu^2 - 2\mu^2}\,[\mathrm{ch}(2\mu) - \\ & - \mathrm{ch}\sqrt{\nu^2 - 2\mu^2}\cos\nu] + \\ & + [(\mu^2 - \nu^2)^2 + 2\mu^4]\,\mathrm{sh}\sqrt{\nu^2 - 2\mu^2}\sin\nu = 0. \end{aligned}$$

Из третьего равенства (10) заключаем, что критическая скорость отвечает максимальному значению функции

$$Q(\mu,\nu) = \frac{4\mu}{\gamma}(\nu^2 - \mu^2).$$

Таким образом, для определения границ области устойчивости необходимо решить задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} Q(\mu,\nu) \to \max, \\ F(\mu,\nu) = 0. \end{cases}$$

Экстремальное значение функции $Q(\mu,\nu)$ достигается при μ и ν, являющихся решением системы уравнений [4]

$$\begin{cases} F(\mu,\nu) = 0 \\ \Phi(\mu,\nu) = 0, \end{cases}$$

где

$$\Phi(\mu,\nu) = \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial Q}{\partial \nu} - \frac{\partial F}{\partial \nu}\frac{\partial Q}{\partial \mu}. \qquad (11)$$

На рис. 2 показано поведение функций $F(\mu,\nu) = 0$ и $\Phi(\mu,\nu) = 0$ в зависимости от параметров μ и ν. Графики получены для стальной пластины шириной $a = 1$ м, толщиной $h \sim 10^{-3}$ м, движущейся в воздухе.

Графически точкам пересечения ветвей $F(\mu,\nu) = 0$ и $\Phi(\mu,\nu) = 0$ отвечают параметры μ и ν, являющиеся решениями системы уравнений (11). Численно определив первую точку пересечения $(\mu_*, \nu_*) = (2.65, 6.6)$, получим значение критической скорости в зависимости от параметра γ согласно (10):

$$\upsilon_* = \frac{1}{\gamma}4\mu_*(\nu_*^2 - \mu_*^2) = \frac{387.3}{\gamma}. \qquad (12)$$

Сравним данный результат с полученным при исследовании задачи методом Бубнова–Галёркина при учете первых двух членов ряда w. Качест-

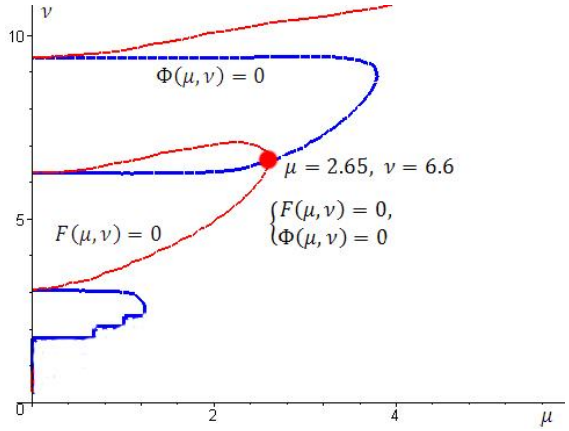

Рис. 2. Решение системы уравнений (11)

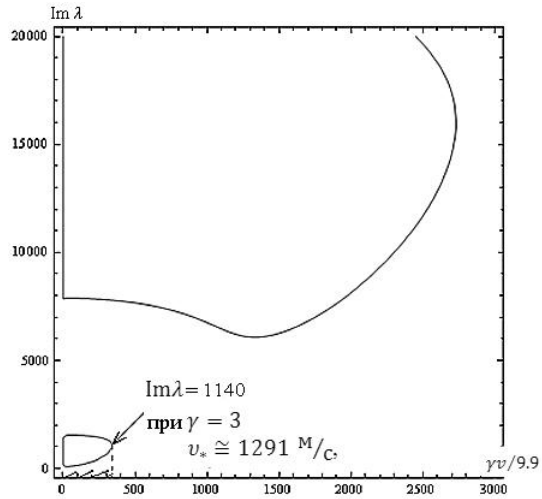

Рис. 3. График зависимости $\mathrm{Im}\lambda(\gamma v)$

венно зависимости критической скорости от параметра γ сходны. Числовые значения критической скорости уточняются. Например, при значении $\gamma = 3$ критическая скорость, вычисленная по (12), равна $1291 м/с$, а рассмотрение упрощенной задачи (2) дает $\upsilon_* \cong 1500 м/с$.

Заметим, что решению системы (11) отвечает появление пары комплексно-сопряженных собственных значений λ, т.е. переход λ через границу параболы устойчивости. Геометрически решения системы (11) можно найти как точки на плоскости ($\omega, \gamma\upsilon$), где $\lambda = i\omega$, в которых касательная к кривой $\omega(\gamma\upsilon)$ вертикальна. Первая точка $(\mu_*, \nu_*) = (2.65, 6.6)$ соответствует появлению первой пары комплексно-сопряженных λ – потере устойчивости пластины. Отвечающая этому скорость и будет критической. На рис. 3 показана зависимость ω от $\gamma\upsilon$, полученная численно для стальной пластины шириной $a = 1 м$, толщиной $h \sim 10^{-3} м$, движущейся в воздухе.

Ранее отмечалась аналогия рассматриваемой задачи с задачей о дестабилизации внутренним трением ротора с гибким валом. Имеются и другие примеры механических систем, в которых учет диссипации приводит к уменьшению области устойчивости [3,5].

Отдельно укажем на сходство в описании причин возникновения неустойчивости пластины, движущейся в газе, и неустойчивости поверхности тангенциального разрыва между жидкостями при наличии малой вязкости [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00314).

Список литературы

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.

2. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Изв. АН СССР. Прикладная математика и механика. 1956. Т. XX. С. 211–222.

3. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О влиянии диссипации на устойчивость механических систем // Вестник ННГУ. Мат. моделирование и опт. управление. 2001. № 1. С. 34–53.

4. Куликов А.Н., Пилипенко Г.В. Резонанс собственных частот в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Моделирование и анализ инф. систем. 2011. Т. 1. С. 56–67.

5. Денисов Г.Г. Диссипация и устойчивость в механических системах//Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 183–190.

6. Денисов Г.Г. К вопросу об устойчивости поверхности тангенциального разрыва между жидкостями // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 182–184.

ON STABILITY OF AN ELASTIC PLATE MOVING IN GAS

N.Yu. Kultina, V.V. Novikov, Yu.Yu. Panchenko

The dynamics of an elastic plate moving in its plane in gas at supersonic speed is studied. The dissipative force in the plate's coordinate system and the aerodynamic force determined according to the law of plane sections have been shown to affect differently the plate stability.

Keywords: oscillations, stability, dynamics of plate, flutter.