

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

О СТРУКТУРЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ДИФФЕОМОРФИЗМА В ОКРЕСТНОСТИ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ К 1-ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

© 2013 г.

А.П. Маркова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

anijam@yandex.ru

Поступила в редакцию 19.03.2013

Рассматривается симплектический диффеоморфизм на 4-мерном симплектическом многообразии, имеющий 1-эллиптическую неподвижную точку и гомоклиническую траекторию к ней. Сформулированы условия общего положения, при выполнении которых в достаточно малой окрестности гомоклинической траектории существует по 4 трансверсальных гомоклинических траектории к каждой инвариантной КАМ-кривой на центральном многообразии неподвижной точки.

Ключевые слова: симплектический диффеоморфизм, 1-эллиптическая неподвижная точка, инвариантная КАМ-кривая, гомоклиническая траектория, центральное многообразие, отображение рассеяния, нормальная форма.

Введение

В данной работе рассматривается симплектический диффеоморфизм, имеющий 1-эллиптическую неподвижную точку и гомоклиническую траекторию к этой точке. К такой постановке сводится изучение траекторий гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, имеющей периодическую траекторию типа седло-центр и гомоклиническую траекторию к ней.

Рассматриваемая задача в идейном плане восходит к задаче о структуре окрестности петли сепаратрисы седло-центра (его собственные значения состоят из пары чисто мнимых и пары ненулевых вещественных чисел) в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы [1–6]. Петли сепаратрис к седло-центру были обнаружены в ограниченной круговой задаче трех тел [7]. Для случая вещественной аналитической гамильтоновой системы вопрос об описании поведения траекторий в окрестности гомоклинической траектории к состоянию равновесия типа седло-центр был впервые поставлен и частично решен в [1]. В частности, в [1] было найдено условие общего положения, гарантирующее существование четырех гомоклинических траекторий у каждой из малых (ляпуновских) периодических траекторий на центральном многообразии седло-центра, а поэтому – неинтегрируемость и сложную динамику [8, 9]. В [3]

при дополнительном предположении, что гомоклиническая траектория к седло-центру лежит на некотором двумерном инвариантном симплектическом подмногообразии, это условие было переформулировано в терминах соответствующей задачи рассеяния для системы, линеаризованной вдоль гомоклинической траектории. Полученные результаты были обобщены в [5] на случай гамильтоновых систем с n степенями свободы, $n \geq 3$, имеющих гомоклиническую траекторию к состоянию равновесия типа седло-центр (пара чисто мнимых собственных значений, остальные собственные значения имеют ненулевые реальные части). В системах с двумя степенями свободы удается получить больше информации о структуре системы в окрестности петли и ее бифуркациях, например показать существование счетного семейства периодических траекторий разного типа в особом уровне гамильтониана, гомоклинических контуров на этом уровне и пр. [4, 6]. Обобщение указанных результатов на обратимые гамильтоновы системы позволило получить дополнительную информацию о структуре бифуркационных множеств и возможности ренормализации системы в окрестности петли [2, 6].

Сведение задачи о структуре траекторий гамильтоновой системы с тремя степенями свободы с гладким гамильтонианом H к изучению 4-мерного симплектического диффеоморфизма

осуществляется следующим образом. Пусть система имеет периодическую траекторию γ типа седло-центр (ее мультипликаторами являются $e^{\pm i\alpha}$, μ , μ^{-1} , $\mu \neq \pm 1$). Эта периодическая траектория принадлежит двумерному симплектическому цилиндру, составленному из продолжения γ на близкие уровни гамильтониана. На 5-мерном уровне $H = H(\gamma)$ периодическая траектория имеет сильно устойчивое и сильно неустойчивое двумерные инвариантные многообразия, проходящие через γ и принадлежащие уровню гамильтониана. Если эти многообразия пересекаются вдоль некоторой траектории Γ , то эта гомоклиническая траектория стремится к γ при $t \rightarrow \pm\infty$. Возьмем в уровне гамильтониана $H = H(\gamma)$ в произвольной точке траектории γ секущую N к потоку. На N поток индуцирует локальное симплектическое (относительно ограничения формы Ω на N) отображение Пуанкаре f , имеющее 1-эллиптическую неподвижную точку p и определенное в некоторой окрестности U точки p . Сильно устойчивое и сильно неустойчивое многообразия γ при пересечении с N задают локальные инвариантные кривые, проходящие через p , след Γ дает счетное множество гомоклинических точек, накапливающихся к точке p . Полученный симплектический диффеоморфизм f и является тем отображением, которое рассматривается в данной работе. Его инвариантные КАМ-кривые – следы двумерных инвариантных торов, лежащих в пересечении 4-мерного центрального многообразия периодической траектории $W^c(\gamma)$ с уровнем $H = H(\gamma)$.

Изучаемая ниже задача о поведении траекторий 4-мерного симплектического диффеоморфизма в окрестности гомоклинической траектории к неподвижной точке восходит к работам Биркгофа, затем Смейла, Шильникова [8, 9] и др. Случай гомоклинической траектории к гиперболической неподвижной точке типа седло-фокус для 4-мерного симплектического отображения изучен в [10]. Основные формулировки результатов данной работы были опубликованы в [11].

1. Постановка задачи и основные результаты

В работе рассматривается C^r -гладкий, $r \geq 6$, симплектический диффеоморфизм f на C^∞ -гладком 4-мерном симплектическом многообразии (M, Ω) , где Ω – C^∞ -гладкая 2-форма.

Предполагается, что f имеет 1-эллиптическую неподвижную точку p , то есть дифференциал в этой точке $Df(p)$ имеет пару собственных значений $e^{\pm i\alpha}$ на единичной окружности и пару вещественных собственных значений μ , μ^{-1} , $\mu \neq \pm 1$. В дальнейшем мы предполагаем, что μ положительно и $0 < \mu < 1$. Такую неподвижную точку будем называть ориентируемой 1-эллиптической точкой. Если μ , μ^{-1} отрицательны, точку назовем неориентируемой. Случай неориентируемой неподвижной точки может быть сведен к случаю ориентируемой при рассмотрении f^2 вместо f .

В окрестности 1-эллиптической неподвижной точки существует C^{r-1} -гладкое двумерное инвариантное симплектическое центральное подмногообразие W^c , соответствующее мультипликаторам $e^{\pm i\alpha}$. Ограничение диффеоморфизма f на W^c является C^{r-1} -гладким двумерным симплектическим диффеоморфизмом, а p – его эллиптической неподвижной точкой. Мы предполагаем, что для отображения $f|_{W^c}$ точка p является точкой общего эллиптического типа, точнее, мы предполагаем отсутствие сильных резонансов ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$) и неравенство нулю первого биркгофовского коэффициента. В этом случае 1-эллиптическую точку будем называть 1-эллиптической точкой общего типа. Тогда по теории КАМ на W^c в окрестности точки p существует канторовское множество положительной меры замкнутых инвариантных кривых, окружающих точку p и накапливающихся к ней. Необходимая минимальная гладкость симплектического диффеоморфизма равна 5. Это и объясняет предположение $r \geq 6$.

Центральное многообразие W^c является нормально гиперболическим в смысле [12, 13] и имеет локальное гладкое трехмерное устойчивое многообразие W_{loc}^{cs} и локальное гладкое трехмерное неустойчивое многообразие W_{loc}^{cu} , поскольку два мультипликатора μ , μ^{-1} соответственно меньше и больше единицы (эти два локальных трехмерных многообразия являются одновременно центральным устойчивым и центральным неустойчивым многообразиями неподвижной точки p). Эти многообразия могут быть продолжены относительно действия соответственно f^{-1} и f . Их продолжения мы обозначаем W^s и W^{cu} .

Каждая инвариантная КАМ-кривая на W^c может рассматриваться как седловая, поскольку она имеет локальные двумерные устойчивое и неустойчивое многообразия, которые также могут быть продолжены до глобальных многообразий под действием диффеоморфизма. Каждое такое многообразие гомеоморфно цилиндру, кроме того, оно является лагранжевым подмногообразием в M . Существование этих подмногообразий следует из результатов [12, 13].

Неподвижная точка p в малой окрестности также имеет две C^r -гладкие локальные инвариантные кривые, проходящие через нее: ее устойчивое $W_{loc}^s(p)$ и неустойчивое $W_{loc}^u(p)$ инвариантные многообразия. Их продолжения с помощью f^{-1} и f (обозначаем, соответственно, $W^s(p)$ и $W^u(p)$) также являются C^r -гладкими кривыми.

Наши основные предположения в этой работе состоят в следующем:

Предположение 1 (о существовании гомоклинического пересечения). Кривые $W^s(p)$ и $W^u(p)$ пересекаются в некоторой точке q , задавая тем самым гомоклиническую траекторию Γ точки p .

Предположение 2 (условие трансверсальности). Пересечение $W^s(p)$ и $W^{cu}(p)$ в точке q трансверсально.

В §3 будет построено линейное симплектическое отображение рассеяния S , действующее в касательной плоскости к центральному многообразию $T_p W^c \subset T_p M$. Ограничение дифференциала $Df(p)$ на симплектическую инвариантную плоскость $T_p W^c$ является двумерным линейным симплектическим отображением, имеющим пару собственных значений $e^{\pm i\alpha}$ на единичной окружности. Поэтому плоскость расслоена на замкнутые инвариантные кривые этого отображения, каждая из которых является эллипсом и получается из одной из них умножением координат на положительную постоянную. Зафиксируем некоторый эллипс E . Тогда его образ $S(E)$ под действием отображения рассеяния также является эллипсом с тем же центром в начале координат симплектической плоскости $T_p W^c$ и той же площади относительно ограничения 2-формы Ω на эту плоскость. Поэтому либо пересечение $E \cap S(E)$ трансверсально и тогда состоит из четырех точек, либо эти эллипсы совпадают.

Предположение 3 (условие рассеяния). Пересечение $E \cap S(E)$ трансверсально.

Ясно, что это условие не зависит от выбора эллипса E . Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть для симплектического диффеоморфизма f , имеющего неподвижную 1-эллиптическую точку общего типа, выполнены предположения 1, 2 и 3. Тогда существует такая окрестность U гомоклинической траектории Γ , что каждая замкнутая инвариантная КАМ-кривая на центральном многообразии W^c имеет в U четыре трансверсальных гомоклинических траектории.

Инвариантные многообразия диффеоморфизма в окрестности гомоклинической траектории схематично изображены на рисунке.

2. Следствия из условия трансверсальности

В силу предположений 1 и 2 два гладких трехмерных многообразия $W^{cs}(p)$ и $W^{cu}(p)$ пересекаются в точке q трансверсально, то есть по гладкому двумерному диску Σ , содержащему точку q . Диск является симплектическим относительно 2-формы ω – ограничения 2-формы Ω на Σ . Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. Если выполнены предположения 1 и 2, то Σ и $W^u(p)$ трансверсальны в $W^{cu}(p)$ в точке q , и, следовательно, $W^u(p)$ и $W^{cs}(p)$ также трансверсальны в точке q .

Предположение 1 говорит о том, что отображение f вырождено, так как в общем случае две

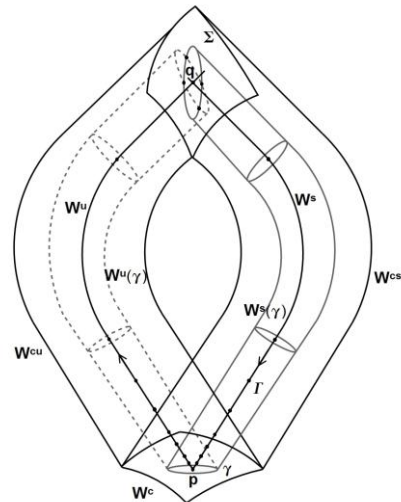


Рис.

гладкие кривые в четырехмерном многообразии не пересекаются. Это условие выделяет множество диффеоморфизмов коразмерности 2 в пространстве всех C^r -гладких симплектических диффеоморфизмов на M . Конечно, пересечение трехмерного $W^{cu}(p)$ и одномерного $W^s(p)$ многообразий в четырехмерном многообразии M является случаем общего положения, но точка пересечения может не принадлежать $W^u(p)$.

Также справедлива следующая лемма:

Лемма 2. На диске Σ существуют два канторовских множества C_u и C_s гладких замкнутых инвариантных кривых $w_u(\gamma)$ и $w_s(\gamma)$, которые являются следами продолжения неустойчивого $W^u(\gamma)$ и, соответственно, устойчивого $W^s(\gamma)$ многообразий инвариантных КАМ-кривых $\gamma \in W^c$. Кроме того, интегралы от 2-формы ω по дискам $D^u(\gamma)$ и $D^s(\gamma)$, ограниченным кривыми $w_u(\gamma)$ и $w_s(\gamma)$, равны:

$$\int_{D^u(\gamma)} \omega = \int_{D^s(\gamma)} \omega.$$

3. Линеаризация и отображение рассеяния

В формулировке условия рассеяния (предположение 3) используется оператор рассеяния S . В этом параграфе описано построение этого оператора, действующего на касательной плоскости к центральному многообразию $T_p W^c$. Этот оператор является обобщением понятия оператора рассеяния для уравнения типа Шредингера [14]. В задачах гомоклинической динамики, связанных с негиперболическими состояниями равновесия, он впервые был введен в [4].

Рассмотрим линеаризацию отображения f вдоль гомоклинической траектории q_n , $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = f(q_n)$, $q_0 = q$, то есть семейство линейных симплектических отображений $L_n = Df^n : T_{q_n} M \rightarrow T_{q_{n+1}} M$. Это семейство стабилизируется: $\lim L_n = Df(p)$ при $|n| \rightarrow \infty$. Поскольку $f^n(q) \rightarrow p$ при $|n| \rightarrow \infty$, то для заданной окрестности V точки p существует такое достаточно большое натуральное N , что $f^n \in V$ для всех $|n| \geq N$. В окрестности V отображение f после линейной симплектической замены переменных может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu x_n + \dots, \\ y_{n+1} &= \mu^{-1} y_n + \dots, \\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \dots, \end{aligned}$$

где $0 < \mu < 1$, а многоточие обозначает члены второго порядка и выше. Линеаризация дискретной динамической системы вдоль гомоклинической траектории задается системой (1):

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \mu \xi_n + P_n \zeta_n, \\ \eta_{n+1} &= \mu^{-1} \eta_n + Q_n \zeta_n, \\ \chi_{n+1} &= R_\alpha \chi_n + W_n \zeta_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n, \chi_n) = (\xi_n, \eta_n, \chi_n^1, \chi_n^2)$ – 4-вектор-столбец координат в касательном пространстве в точке $q_n = (x_n, y_n, u_n, v_n)$, R_α обозначает матрицу поворота на угол α

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

P_n , Q_n – 1-строчные матрицы, W_n – матрица (4×2) . Для этих матриц справедливы следующие оценки при $|n| \geq N$:

$$\|P_n\| \leq C \mu_1^{|n|}, \quad \|Q_n\| \leq C \mu_1^{|n|}, \quad \|W_n\| \leq C \mu_1^{|n|},$$

где $0 < \mu < \mu_1 < 1$, C – некоторое положительное число, зависящее от N .

Рассмотрим $|n| \geq N$ и обозначим

$$S_n = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & R_{n\alpha} \end{pmatrix},$$

где E_2 – единичная матрица (2×2) . Выполним в системе (1) неавтономную (зависящую от n) симплектическую замену и перейдем во вращающуюся систему координат: $\zeta_n = S_n \psi_n$, где $\psi = (\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\chi})$. Эта замена позволяет исключить вращение по координатам $\chi_n = (\chi_n^1, \chi_n^2)$, что дает возможность использовать в доказательствах метод сжатых отображений. После замены, сохраняя старые обозначения, вместо системы (1) получим систему вида:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \mu \xi_n + F_n \zeta_n, \\ \eta_{n+1} &= \mu^{-1} \eta_n + G_n \zeta_n, \\ \chi_{n+1} &= \chi_n + H_n \zeta_n, \end{aligned} \quad (2)$$

где F_n , G_n – 1-строчные матрицы, H_n – матрица (4×2) , для которых справедливы оценки, аналогичные оценкам для матриц P_n , Q_n и W_n . Заметим, что система (2) является неавтономной.

Лемма 3. Существует достаточно большое $N > 0$, такое, что для любых ξ_N^0 , $\chi_N \in \mathbb{R}^2$ и любых $n \geq N$ существует единственное реше-

ние (ξ_n, η_n, χ_n) системы (2), удовлетворяющее следующим граничным условиям: $\xi_n = \xi_N^0$, $\chi_n \rightarrow \chi_\infty$, $|\xi_n| \rightarrow 0$, $|\eta_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для доказательства этой леммы по аналогии с [5] вместо системы (2) рассматривается эквивалентная ей система (3):

$$\begin{aligned} \xi_n &= \mu^{n-N} \xi_N^0 + \sum_{s=N}^{n-1} \mu^{n-1-s} F_s \zeta_s, \\ \eta_n &= -\sum_{s=n}^{\infty} \mu^{s+1-n} G_s \zeta_s, \\ \chi_n &= \chi_\infty - \sum_{s=n}^{\infty} H_s \zeta_s. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя принцип сжимающих отображений, мы показываем, что система (3) имеет единственное решение в банаховом пространстве всех последовательностей $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n, \chi_n)$, равномерно ограниченных на $[N, \infty)$ с нормой $\|\zeta\| = \sup_{n \geq N} (|\xi_n|, |\eta_n|, |\chi_n|)$. Значит, система (2) имеет единственное решение, удовлетворяющее граничным условиям из леммы 3.

Также справедлива лемма 4 (чтобы не перегружать обозначения, мы опускаем индексы ξ_N^0):

Лемма 4. Решения $\zeta_n(\xi, \chi_\infty)$ системы (2) удовлетворяют следующим соотношениям линейности:

- I. $\zeta_n(\xi', \chi_\infty) + \zeta_n(\xi'', 0) = \zeta_n(\xi' + \xi'', \chi_\infty)$;
- II. $\zeta_n(\xi', 0) + \zeta_n(\xi'', 0) = \zeta_n(\xi' + \xi'', 0)$,
 $\zeta_n(\alpha \xi, 0) = \alpha \zeta_n(\xi, 0)$;
- III. $\zeta_n(0, \alpha \chi'_\infty + \beta \chi''_\infty) = \alpha \zeta_n(0, \chi'_\infty) + \beta \zeta_n(0, \chi''_\infty)$.

Леммы 3 и 4 позволяют выделить в касательном пространстве к точке q_n трехмерную плоскость $L_N \subset T_{q_n} M$, которая состоит из точек (ξ_N, η_N, χ_N) , соответствующих ограниченному решению системы (2). Кроме того, плоскость L_N расслоена на прямые: через каждую точку такой прямой проходит решение (2), соответствующее одному и тому же χ_∞ . В частности, $\chi_\infty = \underline{0}$ соответствует касательная прямая к W^s в $T_{q_N} M$.

Утверждения, аналогичные доказанным выше, справедливы и для $n \leq -N$. Поэтому в касательном пространстве $T_{q_{-N}} M$ существует трехмерная плоскость L_{-N} , расслоенная на прямые, через каждую точку которой проходит решение системы (2), соответствующее одному и тому же $\chi_{-\infty}$ при $n \rightarrow -\infty$.

Теперь построим отображение рассеяния $S: T_p W^c \rightarrow T_p W^c$. Возьмем произвольную точку $\chi_{-\infty} \in T_p W^c$. Зафиксировав эту точку, мы получим прямую из построенного расслоения в плоскости L_{-N} . Применим к этой прямой отображение Df^{2N} . В результате получим прямую в $T_{q_N} M$, трансверсальную плоскости L_N . Полученная прямая пересекает эту трехмерную плоскость в единственной точке, через которую проходит единственная прямая из построенного расслоения в плоскости L_N . Пусть этой прямой соответствует точка $\chi_{+\infty} \in T_p W^c$. Положим $S(\chi_{-\infty}) = \chi_{+\infty}$.

Покажем, что построенный оператор S является линейным. Ясно, что $S(\underline{0}) = \underline{0}$. В самом деле, $\chi_{-\infty} = \underline{0}$ в плоскости L_{-N} соответствует прямая из расслоения, которая является касательной к сильно неустойчивому многообразию W^u в касательном пространстве $T_{q_{-N}} M$. Ее образ под действием отображения дифференциала Df^{2N} является прямой в касательном пространстве $T_{q_N} M$, которая трансверсальна $T_{q_N} W^{cs}$ в силу предположения 2 и пересекает его в нуле пространства $T_{q_N} M$. Через ноль проходит единственная прямая из расслоения – касательная прямая к сильно устойчивому многообразию W^s , соответствующая $\chi_{+\infty} = \underline{0}$.

Обозначим $l_{\chi_{-\infty}}$ прямую из L_{-N} , через каждую точку которой проходит решение, соответствующее $\chi_{-\infty}$ при $n \rightarrow -\infty$. Используя соотношения линейности I и II, мы получим следующее представление для решений системы (2):

$$\begin{aligned} \zeta_n(\xi_N^0, \lambda \chi_{-\infty}) &= \zeta_n(0, \lambda \chi_{-\infty}) + \\ &+ \zeta_n(\xi_N^0, 0) = \lambda \zeta_n(0, \chi_{-\infty}) + \zeta_n(\xi_N^0, 0). \end{aligned}$$

Чтобы найти $S(\lambda \chi_{-\infty})$, мы действуем Df^{2N} на $\lambda l_{\chi_{-\infty}} + l_0^u$ (здесь l_0^u – касательная прямая к W^u в точке q_{-N}). В L_{-N} мы получим две точки, через каждую из которых проходит единственная прямая из расслоения: это соответственно $\lambda l_{\chi_{-\infty}}$ и l_0^s (l_0^s – касательная прямая к W^s в точке q_N). Таким образом, S переводит $\lambda \chi_{-\infty}$ в $\lambda \chi_{+\infty} + \underline{0} = \lambda \chi_{+\infty}$. Аналогично, для суммы получаем соотношения:

$$\begin{aligned}\zeta_n(\xi_N^0, \chi'_{-\infty} + \chi''_{-\infty}) &= \zeta_n(\xi_N^0 + 0, \chi'_{-\infty} + \chi''_{-\infty}) = \\ &= \zeta_n(\xi_N^0, 0) + \zeta_n(0, \chi'_{-\infty} + \chi''_{-\infty}) = \\ &= \zeta_n(\xi_N^0, 0) + \zeta_n(0, \chi'_{-\infty}) + \zeta_n(0, \chi''_{-\infty}).\end{aligned}$$

В этом случае Df^{2N} действует на $I_{\chi'_{-\infty}} + I_{\chi''_{-\infty}} + I_0''$.

Кроме того, S является симплектическим отображением. Линейное симплектическое отображение S мы называем *оператором рассеяния*.

4. Гомоклинические траектории к КАМ-кривым

Для доказательства теоремы 1 о существовании гомоклинических траекторий к инвариантным КАМ-кривым на центральном многообразии мы предполагаем, что для отображения f выполнены все предположения 1, 2 и 3. Тогда согласно §2 многообразия $W^{cu}(p)$ и $W^{cs}(p)$ в точке q пересекаются трансверсально. Для инвариантной кривой $\gamma \in W^c$ ее устойчивое многообразие, продолженное с помощью f^{-1} , за конечное число итераций достигнет окрестности точки q и трансверсально пересечет диск Σ в $W^{cs}(p)$ по замкнутой кривой $w_s(\gamma)$. Аналогичным образом на Σ получается кривая $w_u(\gamma)$. Две полученные кривые $w_u(\gamma)$ и $w_s(\gamma)$ C^2 -близки к эллипсу, если γ лежит в достаточно малой окрестности неподвижной точки p .

Для завершения доказательства теоремы 1 требуется связать свойства пересечения кривых $w_u(\gamma)$ и $w_s(\gamma)$ на Σ со свойствами пересечения эллипсов E и $S(E)$ на плоскости $T_p W^c$. Для этого мы рассматриваем нормальную форму отображения f в окрестности точки p до членов пятого порядка, которая имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \mu x_n \left(1 + ax_n y_n + b(u_n^2 + v_n^2) + \right. \\ &\quad \left. + c(u_n^2 + v_n^2)^2 + dx_n y_n (u_n^2 + v_n^2) + ex_n^2 y_n^2 \right), \\ y_{n+1} &= \mu^{-1} y_n \left(1 - ax_n y_n - b(u_n^2 + v_n^2) - c(u_n^2 + v_n^2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - dx_n y_n (u_n^2 + v_n^2) - ex_n^2 y_n^2 + (ax_n y_n + b(u_n^2 + v_n^2))^2 \right), \\ u_{n+1} &= u_n \cos(\alpha + \kappa) - v_n \sin(\alpha + \kappa) - \\ &\quad - (v_n \cos \alpha + u_n \sin \alpha) \left(\frac{l}{2} x_n y_n (u_n^2 + v_n^2) + m x_n^2 y_n^2 \right), \\ v_{n+1} &= u_n \sin(\alpha + \kappa) + v_n \cos(\alpha + \kappa) + \\ &\quad + (u_n \cos \alpha - v_n \sin \alpha) \left(\frac{l}{2} x_n y_n (u_n^2 + v_n^2) + m x_n^2 y_n^2 \right),\end{aligned}$$

где $\kappa = \frac{h}{2}(u_n^2 + v_n^2) + gx_n y_n - \frac{k}{4}(u_n^2 + v_n^2)^2$, $a, b, c, d, e, g, h, k, l, m \in \mathbb{R}$.

Траектории отображения в нормальной форме близки к траекториям исходного отображения в рассматриваемой окрестности неподвижной точки p . Из условия рассеяния будет следовать, что на диске Σ следы инвариантных цилиндров (то есть продолжения устойчивого и неустойчивого многообразий инвариантной кривой, лежащей на центральном многообразии) нормализованного отображения будут пересекаться трансверсально по четырем точкам. Но следы на диске Σ инвариантных цилиндров нормализованного отображения близки в C^2 -топологии к следам инвариантных цилиндров исходного отображения. Это влечет трансверсальность пересечения кривых $w_u(\gamma)$ и $w_s(\gamma)$ полной системы, то есть они пересекаются по четырем точкам, и, следовательно, теорема 1 справедлива.

Замечание. Вернемся теперь к системе с тремя степенями свободы, из которой получен изучаемый выше симплектический диффеоморфизм. Тогда соответствующее отображение Пуанкаре на секущей к периодической траектории зависит от параметра c – значения гамильтониана. Пусть значение c_0 соответствует изученному выше отображению, и рассмотрим малые изменения c . Тогда периодическая траектория системы, а поэтому и неподвижная точка отображения Пуанкаре, гладко зависит от параметра c . Следовательно, устойчивое, неустойчивое, центрально-устойчивое, центрально-неустойчивое многообразия неподвижной точки также гладко зависят от c . Поэтому трансверсальность пересечения W^{cu} и W^s сохранится в точке, близкой к гомоклинической точке, но эта точка пересечения уже не будет, вообще говоря, гомоклинической точкой соответствующей 1-эллиптической неподвижной точки для возмущенного отображения. Рассмотрим снова пересечение многообразий W^{cu} и W^{cs} вблизи бывшей гомоклинической точки. Это снова будет гладкий двумерный диск, на котором следы от неустойчивых и устойчивых многообразий инвариантных кривых на центральном многообразии будут гладкими замкнутыми кривыми, а следы от неустойчивого и устойчивого многообразий неподвижной точки являются двумя, вообще говоря, различными точками m_u , m_s , расстояние между которыми будет иметь порядок $|c - c_0|$ (сепаратрисы расщеплены). Поскольку следы неустойчивых многообразий

КАМ-кривых накапливаются к точке m_u , а следы устойчивых многообразий КАМ-кривых накапливаются к точке m_s , то для КАМ-кривых, достаточно близких к неподвижной точке (из окрестности порядка $I^{1/2}$, $I = \text{const}$ задает в главном порядке инвариантную кривую на центральном многообразии), их многообразия не пересекаются, и для них нет однообходных гомоклинических траекторий. Однако в большей окрестности порядка $I^{1/4}$ пересечения возникают, но уже по двум гомоклиническим траекториям, более того, при некоторых значениях c здесь возможны касания устойчивых и неустойчивых многообразий КАМ-кривых, то есть возможны явления типа Ньюхауса (см., например, для случая периодических траекторий [15]).

Подробные доказательства всех вышеприведенных результатов будут опубликованы в работе, готовящейся к публикации.

Автор выражает благодарность Л.М. Лерману за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00001-а, и ФЦП «Кадры», № 14.В37.21.0361.

Список литературы

1. Лерман Л.М. О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра // Методы качеств. теории диф. ур. Межвуз. сб. науч. трудов / Под ред. Е.А. Леонтович-Андроновой. Горький: Горьковский ун-т, 1987. С. 89–103.
2. Mielke A., Holmes P., O'Reilly O. Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle-center // J. of Dyn. and Diff. Eq. 1992. V. 4. P. 95–126.
3. Grotta Ragazzo C. Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation //

- Commun. in Math. Physics. 1994. V. 166. P. 155–177.
4. Koltsova O.Yu., Lerman L.M. Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center // Inter. J. of Bifur. and Chaos. 1995. V. 5. № 2. P. 397–408.
5. Koltsova O., Lerman L. Families of transverse Poincare homoclinic orbits in 2N-dimensional Hamiltonian systems close to the system with a Loop to a saddle-center // Inter. J. of Bifur. and Chaos. 1996. V. 6. № 6. P. 991–1006.
6. Grotta Ragazzo C. Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle-centers // Commun. on Pure and Applied Math. 1997. V. 50. P. 105–147.
7. Llibre J., Martinez R., Simo C. Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the restricted three-body problem // J. of Diff. Eq. 1985. V. 58. № 1. P. 104–156.
8. Smale S. Diffeomorphisms with infinitely many periodic points // Diff. and Combinatorial Topology /Ed. S. Cairns. Princeton Univ. Press, 1965. P. 63–80.
9. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб. 1967. Т. 74(116). № 3. С. 378–397.
10. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Существование счетного множества эллиптических периодических траекторий у четырехмерных симплектических отображений с гомоклиническим касанием // Тр. МИАН. М.: Наука, 2004. Т. 244. С. 115–142.
11. Лерман Л.М., Маркова А.П. // ДАН. 2010. Т. 433. № 1. С. 10–12.
12. Hirsh M., Pugh C., Shub M. Invariant manifolds // Lecture Notes in Math. Berlin–New York: Springer-Verlag, 1977. V. 583.
13. Fenichel N. Asymptotic stability with rate conditions, II // Indiana Univer. Math. J. 1977. V. 26. № 1. P. 81–93.
14. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
15. Gonchenko S., Turaev D., Shilnikov L. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps // Nonlinearity. 2007. V. 20. P. 241–275.

ON THE STRUCTURE OF SYMPLECTIC DIFFEOMORPHISM IN THE NEIGHBORHOOD OF A HOMOCLINIC ORBIT TO 1-ELLIPTIC POINT

A.P. Markova

A symplectic diffeomorphism on a 4-dimensional symplectic manifold having 1-elliptic fixed point and a homoclinic orbit to it is considered. Genericity conditions are formulated under which in a sufficiently small neighborhood of the homoclinic orbit there exist 4 transverse homoclinic orbits to each invariant KAM curve on the center manifold of the fixed point.

Keywords: symplectic diffeomorphism, 1-elliptic fixed point, invariant KAM curve, homoclinic orbit, center manifold, scattering mapping, normal form.