УДК 517.977

МИНИМАКСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Р.С. Бирюков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

ruslan.biryukov@gmail.com

Поступила в редакцию 12.03.2013

Для линейного объекта при внешнем возмущении и неопределенных начальных условиях определяется уровень гашения возмущений как наибольшее значение L_2-нормы целевого выхода, при условии, что L_2-норма внешнего возмущения и выбранная положительно определенная квадратичная форма начального состояния ограничены некоторыми постоянными. С использованием вариационного подхода показано, что построение минимаксных регуляторов, обеспечивающих минимальный уровень гашения, сводится к решению нелинейной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Риккати.

Ключевые слова: оптимальное управление, минимаксный подход, конечный временной интервал, внешнее возмущение, неопределенные начальные условия.

Введение

При разработке стратегий управления объектом в случае, когда ни начальное состояние, ни внешнее возмущение точно неизвестны, разумно основываться на принципе гарантированного результата, когда о качестве управления судят по наихудшему возможному случаю.

Если на объект не действует внешнее возмущение, то, следуя [1, 2], назовем уровнем гашения начальных возмущений максимально возможное отношение L_2-нормы его целевого выхода к евклидовой норме начального состояния. Закон управления, минимизирующий уровень гашения, называется γ-оптимальным.

В случае когда начальное состояние объекта нулевое и на него действует внешнее возмущение, под уровнем гашения внешнего возмущения понимают наибольшее значение отношения L_2-нормы целевого выхода объекта и возмущения. Задача минимизации уровня гашения совпадает с классической задачей H_∞-оптимального управления [3, 4].

Особый интерес представляет ситуация, когда объект находится в неизвестном начальном состоянии и на него действует внешнее возмущение. В этом случае в [5] в качестве уровня гашения рассматривалось наибольшее отношение L_2-нормы целевого выхода к квадратному корню от суммы квадрата L_2-нормы внешнего возмущения и заданной квадратичной формы начального состояния. Подобный подход называется обобщенным H_∞-оптимальным управлением. С использованием вариационного подхода в [6] было показано, что вычисление оптимального уровня гашения сводится к решению нелинейной краевой задачи для некоторого дифференциального матричного уравнения Риккати, которая, в силу нелинейности, может быть решена аналитически лишь в вырожденных случаях.

В данной работе в качестве уровня гашения предлагается взять наибольшее значение L_2-нормы целевого выхода, при условии, что L_2-норма внешнего возмущения и выбранная положительно определенная квадратичная форма начального состояния ограничены некоторыми постоянными. В этом случае задача вычисления минимального уровня гашения также сводится к решению нелинейной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Риккати. Для решения данной задачи используется метод Ньютона.

Постановка задачи

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ линейный управляемый объект

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_1(t)w + B_2(t)u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C(t)x + D(t)u, \end{aligned} \tag{1}$$

в котором $x \in R^{n_x}$ – состояние объекта, $u \in R^{n_u}$ – управление, $z \in R^{n_z}$ – управляемый выход и

$w \in R^{n_w}$ — возмущение, $A = A(t)$, $B_1 = B_1(t)$, $B_2 = B_2(t)$, $C = C(t)$ и $D = D(t)$ – заданные матричные функции соответствующих порядков. В дальнейшем для краткости мы будем опускать указание аргумента t, если это не вызывает недоразумений. Также предположим, что $\forall t \in [0,T]$ справедливо $D^{\mathrm{T}}(t)D(t) > 0$ и $C^{\mathrm{T}}(t)D(t) = 0$.

Относительно возмущения $v(t)$ будем предполагать, что $v \in L_2[0,T]$, т.е. справедливо неравенство

$$\int_0^T |w|^2\, dt < +\infty, \qquad |w|^2 = w^{\mathrm{T}} w.$$

В качестве допустимых законов управления для системы (1) будем рассматривать такие $u = u(t)$, при которых для любых возмущений $w \in L_2[0,T]$ существует и единственно решение системы (1). Данное множество управлений будем в дальнейшем обозначать через U. Очевидно, что с учетом сделанных предположений для любого решения системы (1) управляемый выход $z(t)$ также будет принадлежать $L_2[0,T]$.

Определим целевой функционал формулой

$$J(u, x_0, w) = \int_0^T |z|^2\, dt + x^{\mathrm{T}}(T)Sx(T), S^{\mathrm{T}} = S \ge 0, \quad (2)$$

тогда задача минимаксного управления системой (1) заключается в определении такого управления u^*, начального возмущения x_0^* и внешнего возмущения w^*, что

$$J(u^*, x_0^*, w^*) = \min_{u \in U} \max_{(x_0, w) \in W_\delta} J(u, x_0, w), \quad (3)$$

где

$$W_\delta := \{(x_0, w) \in R^{n_x} \times L_2[0,T]: \\ x_0^{\mathrm{T}} R x_0 \le 1, \int_0^T |w|^2\, dt \le \delta^2\}$$

и $R^{\mathrm{T}} = R > 0$. При этом соответствующие начальное возмущение x_0^* будем называть наихудшим начальным возмущением, внешнее возмущение w^* – наихудшим возмущением, а u^* – минимаксным управлением.

Заметим, что в случае $\lambda_{\min}(R) \to \infty$, где через $\lambda_{\min}(R)$ обозначено минимальное собственное число матрицы R, справедливо $x_0 \to 0$, т.е. система в начальный момент времени находится в покое и на нее действует только внешнее возмущение w, поэтому задача минимаксного управления сводится к классической задаче H_∞-управления. С другой стороны, как нетрудно видеть, если $\delta \to 0$, то мы получаем задачу γ-оптимального управления.

Решение задачи о минимаксном управлении

Сформулируем и докажем основной результат.

Теорема. Задача (3) имеет решение тогда и только тогда, когда на интервале $[0,T]$ существует решение $X(t)$ матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{X} + A^{\mathrm{T}}X + XA + C^{\mathrm{T}}C - \\ - X\left[B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}} - \nu^{-1}B_1B_1^{\mathrm{T}}\right]X = 0, \quad (4) \\ X(T) = S,$$

параметр ν удовлетворяет уравнению

$$\int_0^T x^{\mathrm{T}} X B_1 B_1^{\mathrm{T}} X x dt = \nu^2\delta^2, \quad (5)$$

где x — решение системы:

$$\dot{x} = \left\{A - B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X + \nu^{-1}B_1B_1^{\mathrm{T}}X\right\}x, \\ x(0) = x_0^*. \quad (6)$$

В этом случае оптимальное значение функционала $J(u^*, x_0^*, w^*) = \mu + \nu\delta^2$ достигается при минимаксном законе управления

$$u^*(t) = -(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X(t)x(t), \quad (7)$$

наихудшем внешнем возмущении

$$w^*(t) = \nu^{-1}B_1^{\mathrm{T}}X(t)x(t) \quad (8)$$

и наихудших начальных условиях

$$x_0^* = \alpha e, \qquad \alpha^{-2} = e^{\mathrm{T}}Re, \quad (9)$$

где e — единичный собственный вектор, соответствующий $\mu = \lambda_{\max}(R^{-1}X(0))$, т.е. максимальному собственному числу матрицы $R^{-1}X(0)$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость, для этого предположим существование решения задачи (3) и воспользуемся вариационным методом на основе подхода Лагранжа. Составим вспомогательный функционал

$$\Lambda(x, u, x_0, w) = x^{\mathrm{T}}(T)Sx(T) + \\ + \mu(1 - x^{\mathrm{T}}(0)Rx(0)) + \int_0^T L(x, \dot{x}, u, w)dt, \quad (10)$$

где лагранжиан L имеет вид

$$L(x, \dot{x}, u, w) = z^{\mathrm{T}}z - \nu w^{\mathrm{T}}w + \\ + 2\lambda^{\mathrm{T}}(\dot{x} - Ax - B_1w - B_2u), \quad (11)$$

при этом $\mu, \nu \in R$ и $\lambda = \lambda(t) \in R^{n_x}$ – множители Лагранжа.

Условие стационарности по x записывается как

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} - L_x = 2\dot{\lambda}^{\mathrm{T}} - 2x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C + 2\lambda^{\mathrm{T}}A = 0$$

или

$$\dot{\lambda} - C^{\mathrm{T}}Cx + A^{\mathrm{T}}\lambda = 0. \quad (12)$$

Граничные условия на множители Лагранжа $\lambda(t)$ получаем из условий трансверсальности на концах интервала:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -\mu Rx(0), \\ \lambda(T) &= -Sx(T). \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку в лагранжиан (11) не входят производные $\dot{u}$ и $\dot{w}$, то соответствующие условия стационарности

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{u}} - L_u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}L_{\dot{w}} - L_w = 0$$

являются алгебраическими уравнениями, разрешая которые относительно u и w приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} u^* &= (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}\lambda, \\ w^* &= -\nu^{-1}B_1^{\mathrm{T}}\lambda. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя найденные значения в систему (1) и добавляя уравнение (12), приходим к системе для отыскания как состояния x, так и множителей Лагранжа λ:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \left[B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}} - \nu^{-1}B_1B_1^{\mathrm{T}}\right]\lambda, \\ \dot{\lambda} &= -A^{\mathrm{T}}x + C^{\mathrm{T}}C\lambda, \end{cases} \quad (15)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \lambda(0) = -\mu Rx_0, \quad \lambda(T) = -Sx(T). \quad (16)$$

Существование решения полученной двухточечной краевой задачи следует из предположения о существовании решения задачи (3). Запишем решение системы (15) в терминах фундаментальной матрицы:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,T) & \Phi_{12}(t,T) \\ \Phi_{21}(t,T) & \Phi_{22}(t,T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11}(T,T) & \Phi_{12}(T,T) \\ \Phi_{21}(T,T) & \Phi_{22}(T,T) \end{bmatrix} = I.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \Phi_{21}(t,T)x(T) + \Phi_{22}(t,T)\lambda(T) = \\ &= \{\Phi_{21}(t,T) - \Phi_{22}(t,T)S\}x(T), \\ x(t) &= \Phi_{11}(t,T)x(T) + \Phi_{12}(t,T)\lambda(T) = \\ &= \{\Phi_{11}(t,T) - \Phi_{12}(t,T)S\}x(T). \end{aligned} \quad (17)$$

Так как решение краевой задачи (15), (16) существует, то матрица $\Phi_{11}(t,T) - \Phi_{12}(t,T)S$ обратима для всех $t \in [0,T]$, следовательно, выражая из второго соотношения $x(T)$ и подставляя в первое, получаем:

$$\lambda(t) = -X(t)x(t), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} X(t) = \{&\Phi_{22}(t,T)S - \Phi_{21}(t,T)\} \times \\ &\times \{\Phi_{11}(t,T) - \Phi_{12}(t,T)S\}^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем, что функция $X(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати (4). Для этого продифференцируем соотношение (18) в силу системы (15)

$$\begin{aligned} &-A^{\mathrm{T}}\lambda + C^{\mathrm{T}}Cx = -\dot{X}x - \\ &- X\left[Ax + (B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}} - \nu^{-1}B_1^{\mathrm{T}}B_1)\lambda\right], \end{aligned}$$

подставим вместо λ выражение (18) и упростим:

$$\begin{aligned} &x^{\mathrm{T}}(\dot{X} + A^{\mathrm{T}}X + AX + C^{\mathrm{T}}C - \\ &- X\left[B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}} - \nu^{-1}B_1^{\mathrm{T}}B_1\right]X)x = 0. \end{aligned}$$

Данное соотношение должно выполняться при всех x, следовательно,

$$\begin{aligned} &\dot{X} + A^{\mathrm{T}}X + AX + C^{\mathrm{T}}C - \\ &- X\left\{B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}} - \nu^{-1}B_1^{\mathrm{T}}B_1\right\}X = 0. \end{aligned}$$

Дополним полученное уравнение начальным условием, для чего в соотношении (19) положим $t = T$, тогда:

$$\begin{aligned} X(T) = \{&\Phi_{22}(T,T)S - \Phi_{21}(T,T)\} \times \\ &\times \{\Phi_{11}(T,T) - \Phi_{12}(T,T)S\}^{-1} = S. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее, подставим $t = 0$ в (18) и воспользуемся условиями (16), после чего получаем соотношение:

$$\left[X(0) - \mu R\right]x_0^* = 0,$$

откуда следует, что наихудшее начальное возмущение $x_0^* = \alpha e$, где e – единичный собственный вектор, соответствующий собственному числу μ матрицы $R^{-1}X(0)$. Поскольку по условию матрица R положи-тельно определена, как и решение $X(t)$, то для μ справедливо условие положительности, т.е. $\mu > 0$. Множитель α находится из соотношения

$$\mu(1 - (x_0^*)^{\mathrm{T}}Rx_0^*) = 0,$$

подставляя в которое $x_0^* = \alpha e$ получаем $\alpha^{-2} = e^{\mathrm{T}}Re$, что совпадает с условием (9).

Уравнение (4) также необходимо дополнить условием для определения ν. Из условия положительности получаем, что $\nu > 0$, а из условия дополняющей нежесткости

$$\nu\left(\int_0^T |w^*|^2\, dt - \delta\right) = 0,$$

после подстановки выражения w^* через $X(t)$, получаем соотношение (5).

Теперь докажем достаточность, т.е. что решение, определяемое уравнением (4) и соотношениями (7), (8) и (9), действительно является минимаксом функционала (2). Для этого рассмотрим следующее выражение

$$\dot V + z^{\mathrm T} z - \nu w^{\mathrm T} w,$$

где $V = x^{\mathrm T} X x$, а матрица $X = X^{\mathrm T} \geq 0$ удовлетворяет уравнению (4), и покажем, что его можно представить в виде:

$$\dot V + z^{\mathrm T} z - \nu w^{\mathrm T} w = (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) - \\ - \nu (w - w^*)^{\mathrm T} (w - w^*), \tag{21}$$

где u^* и w^* определяются формулами (7) и (9) соответственно. Действительно, вычислим от функции V производную в силу системы (1):

$$\begin{aligned} &\dot V + z^{\mathrm T} z - \nu w^{\mathrm T} w = \\ &= x^{\mathrm T} \left\{ \dot X + A^{\mathrm T} X + XA + C^{\mathrm T} C \right\} x + \\ &+ w^{\mathrm T} B_1^{\mathrm T} X x + x^{\mathrm T} X B_1^{\mathrm T} w - \nu w^{\mathrm T} w + \\ &+ u^{\mathrm T} B_2^{\mathrm T} X x + x^{\mathrm T} X B_2 u + u^{\mathrm T} D^{\mathrm T} D u \end{aligned} \tag{22}$$

и преобразуем выражение, стоящее в правой части равенства, выделяя полный квадрат по w:

$$w^{\mathrm T} B_1^{\mathrm T} X x + x^{\mathrm T} X B_1^{\mathrm T} w - \nu w^{\mathrm T} w =$$
$$= -\nu (w - w^*)^{\mathrm T} (w - w^*) + \nu^{-1} x^{\mathrm T} X B_1 B_1^{\mathrm T} X x$$

и по u:

$$u^{\mathrm T} B_2^{\mathrm T} X x + x^{\mathrm T} X B_2 u + u^{\mathrm T} D^{\mathrm T} D u =$$
$$= (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) - x^{\mathrm T} X B_2 (D^{\mathrm T} D)^{-1} B_2^{\mathrm T} X x.$$

Подставляя полученные соотношения в (22) получаем:

$$\begin{aligned} &\dot V + z^{\mathrm T} z - \nu w^{\mathrm T} w = (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) - \\ &- \nu (w - w^*)^{\mathrm T} (w - w^*) + x^{\mathrm T} \{ \dot X + A^{\mathrm T} X + XA + \\ &+ C^{\mathrm T} C - X \left[B_2 (D^{\mathrm T} D)^{-1} B_2^{\mathrm T} - \nu^{-1} B_1 B_1^{\mathrm T} \right] X \} x. \end{aligned} \tag{23}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, в силу (4) обращается в ноль, следовательно, справедливость соотношения (21) доказана.

Далее, проинтегрируем выражение (21) по переменной t на интервале от 0 до T

$$\begin{aligned} &\int_0^T \dot V dt + \int_0^T \left(z^{\mathrm T} z - \nu w^{\mathrm T} w \right) dt = \\ &= \int_0^T (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) dt - \\ &- \nu \int_0^T (w - w^*)^{\mathrm T} (w - w^*) dt \end{aligned}$$

и учтем, что

$$\int_0^T \dot V dt = x^{\mathrm T}(T) S x(T) - x_0^{\mathrm T} X(0) x_0.$$

Таким образом, после преобразований получаем

$$\begin{aligned} &x_1^{\mathrm T} S x_1 + \int_0^T z^{\mathrm T} z dt = \nu \delta^2 + \mu + x_0^{\mathrm T} (X(0) - \mu R) x_0 + \\ &+ \int_0^T (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) dt - \\ &- \nu \int_0^T (w - v^*)^{\mathrm T} (w - w^*) dt. \end{aligned} \tag{24}$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (24), есть функционал (2), поэтому исходная задача (3) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} &\min_{u \in U} \max_{(x_0, w) \in W_\delta} [x_0^{\mathrm T} (X(0) - \mu R) x_0 + \\ &+ \int_0^T (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) dt - \\ &- \nu \int_0^T (w - w^*)^{\mathrm T} (w - w^*) dt], \end{aligned}$$

где $\nu > 0$. Последняя же задача легко решается в силу того, что расщепляется на три подзадачи и подынтегральные выражения представляют собой полные квадраты:

$$\begin{aligned} &\max_{x_0^{\mathrm T} R x_0 \leq 1} x_0^{\mathrm T} (X(0) - \mu R) x_0 + \\ &+ \min_{u \in U} \int_0^T (u - u^*)^{\mathrm T} (D^{\mathrm T} D)(u - u^*) dt - \\ &- \nu \max_{\|w\| \leq \delta} \int_0^T (w - w^*)^{\mathrm T} (w - w^*) dt. \end{aligned}$$

Выше было показано, что μ есть одно из собственных чисел матрицы $R^{-1} X(0)$, однако выражение

$$\max_{x_0^{\mathrm T} R x_0 \leq 1} x_0^{\mathrm T} (X(0) - \mu R) x_0$$

достигает своего максимального значения только тогда, когда $\mu = \lambda_{\max}(R^{-1} X(0))$, где через $\lambda_{\max}(R^{-1} X(0))$ обозначено максимальное собственное число матрицы $R^{-1} X(0)$. Таким образом, получаем, что набор (u^*, x_0^*, w^*), определяемый соотношениями (7), (8) и (9), действительно доставляет минимакс функционалу (2), при этом оптимальное значение равно

$$J(u^*, x_0^*, w^*) = \mu + \nu \delta^2.$$

Теорема доказана.

Заметим, что уравнение (4) совместно с условиями (5), (6) есть нелинейная краевая задача, решением которой являются как матричная функция $X(t)$, так и параметр ν. Для ее решения удобно упростить интегральное условие (5), воспользовавшись следующей хорошо известной леммой (см., например, [7]).

Лемма. Если $W(t)$ является решением уравнения

$$\dot W + P^{\mathrm T} W + WP + Q = 0, \qquad V(T) = 0,$$

а $x(t)$ – решение системы $\dot{x} = Px$ при $t \in [0,T]$, то справедлива формула

$$\int_0^T x^{\mathrm{T}} Q x dt = x^{\mathrm{T}}(0) W(0) x(0).$$

Чтобы применить лемму, положим $P = A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X$ и $Q = X M_1 X$, где $M_1 = B_1 B_1^{\mathrm{T}}$ и $M_2 = B_2 (D^{\mathrm{T}} D)^{-1} B_2^{\mathrm{T}}$, тогда левая часть соотношения (5) принимает вид:

$$\int_0^T x^{\mathrm{T}} X B_1 B_1^{\mathrm{T}} X x dt = (x_0^*)^{\mathrm{T}} U(0) x_0^*,$$

где функция $U(t)$ является решением уравнения

$$\begin{gathered}\dot{U} + \left[A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X\right]^{\mathrm{T}} U + \\ + U\left[A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X\right] + X M_1 X = 0, \\ U(T) = 0.\end{gathered} \quad (25)$$

Далее, подставим полученное соотношение в (5) и заменим выражение для x_0^* согласно (9). Тогда после упрощения получаем соотношение:

$$e^{\mathrm{T}}\left[U(0) - \nu^2 \delta^2 R\right] e = 0. \quad (26)$$

Таким образом, исходная краевая задача (4) – (6) после упрощений свелась к решению уравнений (4) и (25) совместно с условием (26). Ввиду нелинейности данных уравнений краевая задача может быть решена аналитически лишь в исключительных случаях, поэтому возникает необходимость использовать численные методы. В следующем параграфе описывается применение метода Ньютона для решения поставленной задачи.

Численное решение краевой задачи

Для решения краевой задачи (4), (25) и (26) рассмотрим соотношение (26) как нелинейное уравнение относительно ν:

$$f(\nu) = e^{\mathrm{T}}\left[U(0) - \nu^2 \delta^2 R\right] e = 0,$$

зависящее от решений (4) и (25). Тогда, используя метод Ньютона, решение этого уравнения можно найти с достаточно высокой скоростью с заданной точностью ε. В этом случае итерационная формула имеет вид:

$$\nu_{k+1} = \nu_k - \frac{f(\nu_k)}{f'(\nu_k)} = \nu_k - \frac{e^{\mathrm{T}}\left[U(0) - \nu_k^2 \delta^2 R\right] e}{e^{\mathrm{T}}\left[V(0) - 2\nu_k \delta^2 R\right] e}, \quad (27)$$

где $V = U_{\nu}'$ – производная по параметру ν функции U. Для определения уравнения, которому удовлетворяет функция V, продифференцируем уравнение (25) по параметру ν, тогда:

$$\begin{gathered}\dot{V} + \left[A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X\right]^{\mathrm{T}} V + \\ + V\left[A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X\right] - \\ - \left[M_2 Y - \nu^{-1} M_1 Y + \nu^{-2} M_1 X\right]^{\mathrm{T}} U - \\ - U\left[M_2 Y - \nu^{-1} M_1 Y + \nu^{-2} M_1 X\right] + \\ + X M_1 Y + Y M_1 X = 0, \quad \Omega(T) = 0,\end{gathered} \quad (28)$$

где $Y = X_{\nu}'$. Аналогично находится уравнение, которому удовлетворяет Y, для этого продифференцируем (4) по параметру ν, после чего получаем:

$$\begin{gathered}\dot{Y} + \left[A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X\right]^{\mathrm{T}} Y + \\ + Y\left[A - M_2 X + \nu^{-1} M_1 X\right] - \\ - \nu^{-2} X M_1 X = 0, \quad Y(T) = 0.\end{gathered} \quad (29)$$

Окончательно получаем, что на каждом шаге метода Ньютона по формуле (27) необходимо решать систему уравнений (4), (25), (28) и (29) с заданными начальными условиями. Приведем схему вычислений:

1. Задать допустимую абсолютную погрешность $\varepsilon > 0$ и начальное приближение ν_0.

2. Положить $\nu = \nu_0$.

3. Найти решение уравнений (4), (25), (28) и (29) с заданными начальными условиями.

4. Вычислить следующее приближение w по формуле (27).

5. Если $|w - \nu| < \varepsilon$, то останавливаем вычисления и полагаем $\nu^* = w$. В противном случае $\nu = w$ и возвращаемся на шаг 3.

В качестве иллюстрации изложенного алгоритма рассмотрим систему первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u + w, \\ z &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \end{aligned}$$

для которой $S \geq 0$ и $R > 0$. Оптимальное значение функционала (2) равно

$$J(u^*, x_0^*, w^*) = R^{-1} X(0) + \nu \delta^2,$$

где $X(t)$ и ν находятся как решение задачи (4), (25) и (26):

$$\begin{gathered} 3\dot{X} + 1 - 2X - (1 - \nu^{-1}) X^2 = 0, X(T) = S, \\ \dot{W} - 2\left[1 + (1 - \nu^{-1}) X\right] W + X^2 = 0, \\ W(T) = 0, W(0) = \nu^2 \delta^2 R. \end{gathered}$$

Для решения системы и нахождения ν использовался метод Ньютона (27), а для численного интегрирования систем уравнений – метод Рунге – Кутты пятого порядка с модификацией Мерсона. Проверка эффективности работы алгоритма осуществлялась следующим образом. Начальное приближение ν_0 выбиралось как случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0.5, 2.0]$. Алгоритм стартовал 5000 раз, и каждый раз его работа завершалась успешно, т.е. находилось минимальное значение $\nu = 0.6693$7 с принятой точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Число выполненных итераций в

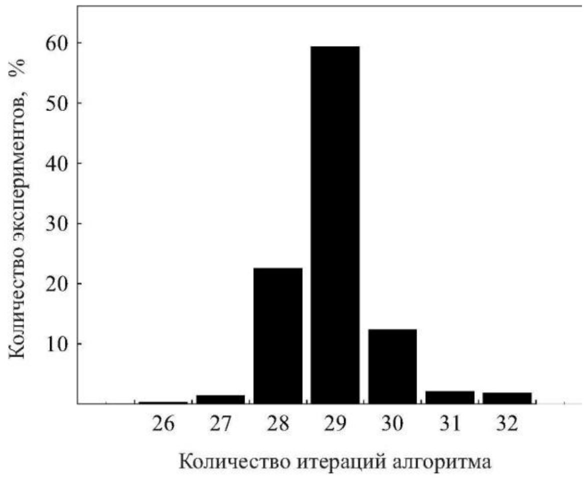

Рис.

этих случаях в процентном отношении отображено на гистограмме. Как видно из рисунка, в подавляющем числе случаев для завершения работы алгоритма потребовалось не более 28 – 30 итераций.

Заключение

В данной статье рассмотрена задача синтеза минимаксного управления для линейных детерминированных систем при внешнем возмущении и неопределенных начальных условиях. Показано, что минимаксное управление может быть выражено через решение нелинейной краевой задачи для матричного уравнения Риккати.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-31358 мол_а).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез оптимальных линейно-квадратичных законов управления на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2007. № 3. С. 3–18.

2. Баландин Д.В., Коган М.М. Линейно-квадратичные и γ-оптимальные законы управления // АиТ. 2008. № 6. С. 5–14.

3. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. № 8. P. 831–847.

4. Kwakernaak H. Robust control and H_∞-optimization – Tutorial paper // Automatica. 1993. V. 29. № 2. P. 255–273.

5. Khargonekar P.P., Nagpal K.M., Poolla K.R. H_∞ control with transients // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29. № 6. P. 1373–1393.

6. Lu W.W., Balas G.J. and Lee E.B. A variational approach to H_∞ control with transients // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. P. 1875–1879.

7. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.

MINIMAX CONTROL OF A LINEAR OBJECT UNDER EXTERNAL DISTURBANCE AND UNKNOWN INITIAL CONDITIONS ON A FINITE TIME HORIZON

R.S. Biryukov

The suppression level of perturbations for a linear object with an external disturbance and unknown initial conditions is determined as the greatest value of the L_2-norm of the objective output when the L_2-norm of the external disturbance and some positive definite quadratic form of the initial state are bounded by some constants. Using a variational approach, it is shown that the construction of minimax controllers ensuring a minimum level of perturbation suppression is reduced to the solution of a nonlinear boundary value problem for a matrix Riccati differential equation.

Keywords: optimal control, minimax approach, finite horizon, external disturbance, unknown initial conditions.