

УДК 534-16

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРОВ В МОНОАТОМНЫХ ЦЕПОЧКАХ

© 2013 г.

*И.П. Лобзенко, Г.М. Чечин*

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

ivanlobzenko@gmail.com

Поступила в редакцию 04.02.2013

Рассматривается проблема построения точных движущихся дискретных бризеров в моноатомных цепочках. Приводятся полученные решения для систем с различным числом частиц.

*Ключевые слова:* дискретные бризеры, движущиеся бризеры, нелинейные колебания, моноатомные цепочки.

В рамках нелинейной динамики гамильтоновых решеток исследуются разнообразные динамические объекты, в частности, стационарные и движущиеся дискретные бризеры [1–3]. Стационарными дискретными бризерами (СДБ) называются локализованные в пространстве и периодические во времени колебания решетки. Существование и устойчивость этих динамических объектов непосредственно связаны с дискретностью и нелинейностью рассматриваемых систем. В настоящее время теория СДБ достаточно хорошо развита (см., например, [3]). Более того, эти динамические объекты наблюдаются экспериментально в системах самой различной физической природы. Наряду со стационарными, во многих нелинейных системах наблюдаются и разнообразные мобильные локализованные объекты, некоторые из которых можно приближенно рассматривать как движущиеся дискретные бризеры (ДДБ). Точным ДДБ в цепочке из  $N$  частиц называется локализованное колебательное возбуждение, которое через определенное время  $T$  полностью повторяет себя со сдвигом на некоторое число ( $r$ ) узлов:

$$x_i(0) = x_{i+r}(T), \quad v_i(0) = v_{i+r}(T), \quad i = 1..N.$$

Здесь  $x_i(t)$ ,  $v_i(t)$  – соответственно смещение и скорость  $i$ -й частицы в момент времени  $t$ . Будем условно называть  $T$  периодом ДДБ.

Вопрос о возможности существования точных ДДБ в нелинейных гамильтоновых решетках до сих пор не нашел своего окончательного решения [3, 4]. Тем не менее, в работах [5, 6] были построены точные ДДБ для частных случаев цепочки из  $N=3$ ,  $N=4$  частиц. Настоящая работа посвящена поиску точных движущихся бризеров в цепочках с большими значениями  $N$ .

Изучаемая модель представляет собой цепочку Ферми–Пасты–Улама–β, которая определяется следующими динамическими уравнениями:

$$x_i = f(x_{i+1} - x_i) - f(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1..N, \\ f(\xi) = \xi + \beta \xi^3.$$

Предполагается наличие периодических граничных условий:

$$x_0(t) \equiv x_N(t), \quad x_{N+1}(t) \equiv x_1(t).$$

Для построения ДДБ нами были использованы разные варианты метода спуска в многомерных расширенных фазовых пространствах изучаемых динамических систем. При этом проводилась минимизация функции

$$d(\xi, T) = \frac{1}{N} \sum_i (x_i(0) - x_{i+r}(T))^2 + \\ + \frac{1}{N} \sum_i (v_i(0) - v_{i+r}(T))^2,$$

где  $\xi = \{x_i(0), v_i(0) \mid i=1..N\}$  – полный набор начальных условий для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику исследуемой цепочки. Функция  $d(\xi, T)$  зависит не только от начальных условий  $\xi$ , но и от периода  $T$  и определяет степень близости искомого решения к точному ДДБ.

Как известно, основной трудностью методов спуска является наличие в пространстве минимизации локальных минимумов, препятствующих нахождению глобального минимума, который при существовании бризерного решения должен быть равен нулю.

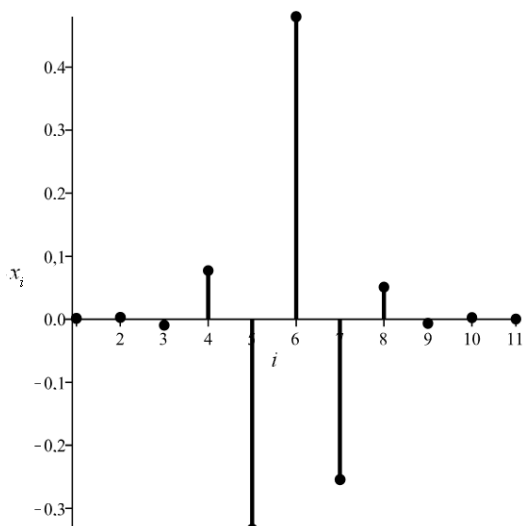
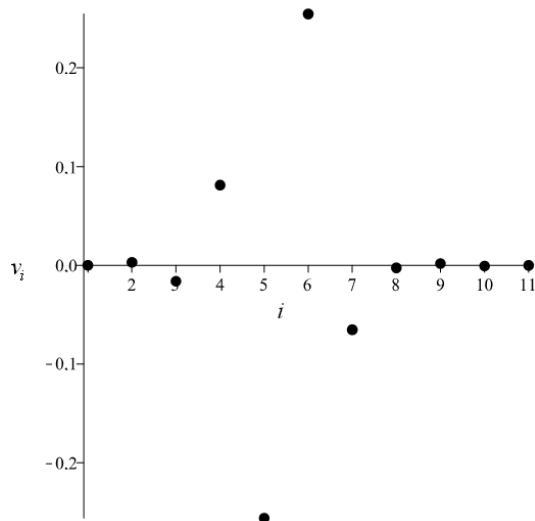
В результате применения методов случайного спуска нами были найдены с достаточно высокой степенью точности ДДБ в цепочках с  $N=5, 7, 9, 11, 13$  и  $\beta=4$  при наличии периодических граничных условий. При этом начальным приближением для поиска ДДБ в цепочке с  $N$  частицами служил движущийся бризер, найденный для случая  $N=2$ .

На рис. 1 и рис. 2 представлены соответственно начальные смещения и скорости частиц

Таблица

Начальные условия, при которых в системе реализуется точный движущийся бризер

	$N=5$	$N=7$	$N=9$	$N=11$
Смещения				0.001449474
			0.002556741	0.002954408
		-0.008441335	-0.008628172	-0.009417981
	0.048415026	0.077114204	0.077139962	0.07716158
	-0.355554263	-0.332520649	-0.332770085	-0.332794198
	0.470996927	0.479814409	0.480084191	0.48011942
	-0.27231175	-0.253657115	-0.254080245	-0.254284571
0.019145236	0.050791384	0.052235036	0.050996252	
		-0.005686286	-0.006421704	
		0.002741115	0.00257721	
			0.000526935	
Скорости				1.88E-09
			0.001872348	0.003034375
		-0.015358806	-0.017125342	-0.016170813
	0.082345648	0.080095961	0.081219722	0.081230856
	-0.266283498	-0.255813957	-0.255450654	-0.256018571
	0.267632162	0.254291813	0.2542605	0.254602348
	-0.063312622	-0.064366192	-0.065176544	-0.065242767
	-0.020380774	-0.003614211	-0.002912388	-0.002550606
		0.004781249	0.003210914	0.001759737
			0.000155807	-0.000641832
			-6.44E-05	
	$T = 13.411911$	$T = 13.518354$	$T = 13.511061$	$T = 13.509968$

Рис. 1. Начальные смещения, соответствующие точному движущемуся бризеру в модели ФПУ- $\beta$ Рис. 2. Начальные скорости, соответствующие точному движущемуся бризеру в модели ФПУ- $\beta$ 

цепочки из 11 узлов, которые соответствуют точному движущемуся бризеру в этой системе.

В таблице приведены полученные решения для движущихся дискретных бризеров при  $N=5,7,9,11$ ;  $\beta=4$ . Точность этих решений опре-

деляется величиной невязки  $d(\xi, T) \sim 10^{-6}$ . Из таблицы видно, что по мере увеличения числа частиц цепочки форма ДДБ стремится к некоторому профилю, который, по-видимому, соответствует случаю  $N=\infty$ .

Авторы выражают благодарность доценту кафедры теории колебаний и автоматического регулирования О.И. Канакову за конструктивные дискуссии, полезные советы и гостеприимство во время пребывания И.П. Лобзенко в ННГУ.

*Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», соглашение 14.В37.21.2034, гранта РФФИ № 12-02-31229 «Симметричные, термодинамические и кристаллографические критерии для поиска и создания новых магнитоэлектриков».*

#### Список литературы

1. Flach S. and Willis C.R. // *Physics Reports*. 1998. V. 295. P. 182–264.
2. Aubry S. // *Physica D*. 2006. V. 216. P. 1–30.
3. Flach S. and Gorbach A. // *Physics Reports*. 2007. V. 467. P. 1–116.
4. Yusuke Doi, Kazuyuki Yoshimura // *Wave Motion*. 2007. V. 45. P. 83–99.
5. Bao-Feng Feng, Youn-Sha Chan // *Mathematics and Computers in Simulations*. 2007. V. 74. P. 292–301.
6. Yusuke Doi, Kazuyuki Yoshimura // *Journal of the Physical Society of Japan*. 2009. V. 78. P. 034401–034410.

## NUMERICAL SIMULATIONS OF MOBILE DISCRETE BREATHERS IN MONOATOMIC CHAINS

*I.P. Lobzenko, G.M. Chechin*

This paper addresses the problem of constructing exact mobile discrete breathers in monoatomic chains. The solutions obtained for systems with a different number of particles are presented.

*Keywords:* discrete breathers, mobile breathers, nonlinear oscillations, monoatomic chains.